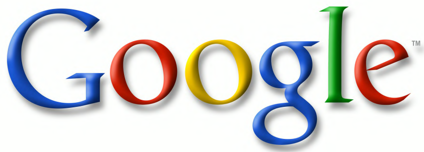
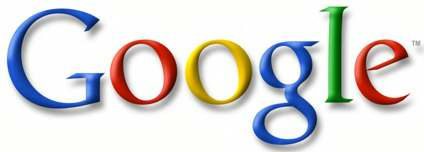














Ant. Coypel ... pinxit — *Carol. Dupuis sculp.*

HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXXX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXXXII.

TABLE
POUR
L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

TABLE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

MECHANIQUE.



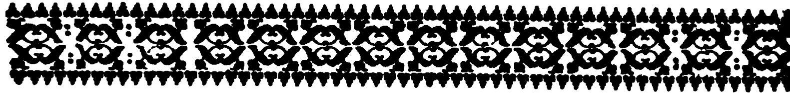


TABLE
POUR
LES MEMOIRES.





HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCXXX.

PHISIQUE GENERALE.

SUR QUELQUES EXPERIENCES DE L'AIMAN.



Ous supposons ici tout ce qui a été dit en 1728*, sur des Expériences de l'Aiman, faites par M. du Fay. Il en résulte que le Tourbillon, qui se forme autour de tout Aiman, n'est pas double, comme M. Descartes l'avoit conçû, mais simple; toute la matiére magnétique entre par le Nord de l'Aiman, & sort par le Sud, pour rentrer ensuite par le

V. les M. p. 142.
* p. 1. & suiv.

Nord. Il faut développer un peu plus cette idée pour l'intelligence de ce qui suivra.

On doit concevoir un Aiman comme un corps où sont ouvertes une infinité de routes paralleles, telles que par quelque cause que ce soit la matiére magnétique qui pénétre ce corps s'y peut mouvoir en un certain sens, du Nord au Sud, & ne le pourroit du Sud au Nord. Et parce que cette matiére se meut avec beaucoup plus de facilité dans l'Aiman que dans l'air, lorsqu'après être entrée par le Nord de la Pierre elle en est sortie par le Sud, elle ne continüe pas son chemin en ligne droite dans l'air, comme il semble qu'elle le devroit, mais elle se réfléchit pour retourner au Nord de l'Aiman, & y rentrer par-là, c'est ce qui fait le Tourbillon. Tout cela, quoique sujet à de grandes difficultés, est si constant par les faits visibles, qu'on ne peut se dispenser de l'admettre, en attendant l'éclaircissement des difficultés.

Les Phisiciens prennent la Terre pour un grand Aiman. La matiére magnétique entrée uniquement par le Nord de la Terre, selon M. du Fay, sort donc par le Sud. Si l'on suppose un Aiman ordinaire, posé de sorte que son Nord soit tourné vers le Nord de la Terre, la matiére magnétique sortie par le Sud de la Terre, & qui en va chercher le Nord, rencontre le Sud de l'Aiman par où elle ne peut entrer; & si cet Aiman est aisément mobile, comme il le sera étant posé sur l'eau dans une petite Gondole, elle le tournera de façon qu'elle le puisse pénétrer, c'est-à-dire, qu'elle fera prendre à son Nord la place de son Sud, & par conséquent le Sud de l'Aiman sera dirigé vers le Nord de la Terre. Il peut y avoir de l'équivoque ou de l'embarras dans les expressions dont on se sert sur ce sujet, parce que c'est le Sud propre d'un Aiman qui se dirige vers le Nord de la Terre, & M. du Fay a crû devoir fixer les idées en ne distinguant les Poles d'un Aiman que par la direction qu'ils prennent.

Dans un Aiman les routes de la matiére magnétique sont déterminées, comme nous venons de le dire, elles ne lui permettent de se mouvoir qu'en un sens, mais le Fer, qui

certainement est un Aiman imparfait, l'est en ce que ces mêmes routes n'y sont pas si déterminées, les petits poils dont il est hérissé intérieurement, peuvent se coucher en un sens, & après cela se coucher en sens contraire, selon qu'il a été expliqué en 1728, & par conséquent la même route admettra la matiére magnétique müe tantôt en un sens, tantôt dans le sens opposé.

Voilà quels sont les principes essentiels du Sistême de M. du Fay, il a songé à le fortifier soit en l'employant à expliquer des phénomenes, qui ne l'ont pas été si heureusement jusqu'ici, soit en satisfaisant aux objections dont on pourroit l'attaquer.

La plûpart des Phisiciens prétendent que dans un Aiman le pole qui se dirige vers le Nord a beaucoup plus de force que l'autre, & ils croyent que la proximité du pole Boréal de la Terre en est la cause, mais sans compter que ce devroit être le contraire dans les pays situés au de-là de l'Equateur, ce qui n'est rien moins que certain, une expérience, qui paroît décisive, renverse cette explication. M. du Fay a approché assés près l'un de l'autre deux Aimans assés égaux en force, il ne faut pas qu'ils se touchent, car ils ne feroient plus qu'un Aiman, il a plongé dans de la limaille de Fer le pole de l'un, qui en a pris autant qu'il en pouvoit porter; si le voisinage du second a rendu ce premier capable de porter plus de limaille, il a dû en lâcher, en laisser tomber une partie, quand on a éloigné le second, c'est cependant ce qui n'est jamais arrivé dans l'expérience bien répétée.

Ce fait se déduira sans peine de l'hipothese d'un Tourbillon, ou courant unique. La matiére magnétique une fois entrée dans un Aiman n'en sort, pour ainsi dire, que le plus tard qu'elle peut, parce qu'elle trouve beaucoup plus de facilité à s'y mouvoir que dans l'air; quand elle est entrée, elle sortoit de l'air, elle n'avoit qu'un mouvement pénible; elle est entrée toute dispersée, & a pris une assés grande étendüe autour du pole qui se présentoit, mais quand il a été question de sortir de la pierre, elle y a prolongé son cours

autant qu'il se pouvoit pour éviter l'air, & par-là elle s'est rassemblée & serrée vers le pole de la sortie. Or le pole de l'entrée a été le Nord de l'Aiman dirigé vers le Sud de la Terre, & le pole de la sortie est le Sud de l'Aiman dirigé vers le Nord de la Terre. De-là suit évidemment la conséquence.

M. du Fay assûre en général que l'hipothese du courant simple s'accommodera mieux avec les phénomenes de l'Aiman, & il fait voir qu'elle quadreroit fort bien avec l'idée qu'a eûë le célébre M. Halley de rapporter les Aurores Boréales à la matiére magnétique. Mais cette idée n'est pas encore elle-même assés établie pour donner beaucoup de poids à celles qu'elle confirmeroit.

On objecte à l'hipothese de M. du Fay que le courant unique formé d'une matiére sortie par le Sud de la Terre, & qui va retrouver le Nord, pousseroit selon la direction du Sud au Nord tous les Aimans qui pourroient se mouvoir librement, & leur donneroit en ce sens un mouvement de progression, au lieu qu'ils n'ont constamment que celui de direction, par lequel leurs poles se tournent comme il convient. On ne doit pas trouver cet inconvénient dans l'hipothese des deux courants, qui étant opposés, se balancent l'un l'autre. La réponse est aisée. La matiére magnétique qui va du Sud au Nord pousseroit en effet l'Aiman selon cette direction, si en venant heurter sa surface extérieure elle y trouvoit de la résistance, mais elle n'y en trouve aucune, elle ne la heurte pas, elle la pénétre dès qu'elle la rencontre, & se plonge dans l'intérieur de la pierre. On sçait que cette extrême facilité de la matiére magnétique à pénétrer l'Aiman n'a pas été imaginée pour le besoin présent, mais qu'elle est établie depuis long-temps par les phénomenes. Cette matiére n'agit que sur les parties intérieures de l'Aiman, qu'elle arrange & qu'elle accommode à son cours, mais ce ne sont que celles qui sont de la derniére finesse.

Il suit de-là qu'elle se meut dans des espaces extrémement étroits, & d'où l'air est exclus, & cela même fournit à M. du Fay une réponse à l'objection qu'on lui a faite contre les

petits poils du Fer, qu'il a ſuppoſé qui tomboient par leur poids d'un ſens ou d'un autre. Ce poids, a-t-on dit, doit être compté pour nul à cauſe de l'extrême délicateſſe des poils. Il devroit être effectivement compté pour nul, ſi les poils étoient dans l'air, mais ils n'y ſont pas, & il leur arrive la même choſe qu'à une Plume, qui dans le Vuide de la Machine Pneumatique tombe avec la même vîteſſe, ou a le même poids, que ſi elle étoit de Plomb.

La vîteſſe de la matiére magnétique doit être proportionnée à ſa ſubtilité, & à cette occaſion M. du Fay a eu la penſée de meſurer cette vîteſſe. Il a conçû que ſi une Aiguille de Fer non aimantée paſſoit dans le Tourbillon d'un Aiman avec la même vîteſſe dont ce Tourbillon ſe meut, elle ne s'y aimanteroit point, parce que la matiére magnétique du Tourbillon ne pourroit faire aucune impreſſion ſur elle. Il y a fait paſſer une Aiguille avec toute la vîteſſe qu'elle avoit pû prendre de la détente ſubite d'un Reſſort de Montre, mais elle s'eſt aimantée comme elle auroit fait à la maniére ordinaire, & par conſéquent elle auroit eu beſoin d'une vîteſſe beaucoup au de-là de celle qu'elle avoit. Il n'eſt pas permis de conjecturer ſeulement juſqu'où cela pourroit aller. Cette tentative inutile n'eſt rapportée ici que pour donner lieu à d'autres qui pourroient réüſſir, quelquefois il ne faut qu'avertir les bons eſprits de tourner leurs vûës d'un certain côté.

Pour derniére preuve des petits poils du Fer, & des qualités qu'on eſt obligé de leur attribuer, M. du Fay apporte la différence des effets magnétiques du Fer, de l'Acier & de l'Acier trempé. Cette tranſpoſition de poles, dont nous avons parlé en 1728, ſi facile & ſi prompte dans le Fer, l'eſt beaucoup moins dans l'Acier, & moins encore dans l'Acier trempé, &, ce qui en eſt une ſuite, l'Acier trempé, toutes choſes d'ailleurs égales, a plus de force, & une force plus durable que l'Acier, & l'Acier plus que le Fer. La raiſon en ſaute aux yeux, les poils du Fer ont perdu leur extrême mobilité, & ſe ſont roidis plus ou moins, ou collés les uns contre les autres, ou avec les parties voiſines.

Toute cette Théorie n'eſt pas une pure Théorie, qui ne produiſe rien. M. du Fay en tire quelle eſt la meilleure maniére d'aimanter les Aiguilles, & on la devinera de ſoi-même, pourvû qu'on ait une idée bien nette du Tourbillon unique, de ſa direction, des petits poils du Fer. On travaille avec une ſorte de ſupériorité ſur ſa matiére, quand on opere en vertu d'un Siſtême.

SUR LA LUMIE'RE SEPTENTRIONALE, ET SUR UNE AUTRE LUMIE'RE.

LE ſpectacle de la Lumiére Septentrionale a continué en 1730, rarement à la vérité, mais en recompenſe avec des circonſtances toutes nouvelles, comme s'il les affectoit de peur d'ennuyer.

M. Boüillet, Correſpondant de l'Académie, dont nous avons déja parlé plusieurs fois, la vit à Beſiers le 6 Mars, à 7 heures du ſoir, d'un fort beau rouge, élevée de plus de 20 degrés ſur l'Horiſon, mais la Lune, qui ſe leva à 7 heures 30′ la fit diſparoître, & il ne ſçût que ſur le rapport de quelques Peſcheurs de Vendres, qu'elle avoit été vûë encore à 11 heures.

Une Lumiére, & plus viſible, & tout-à-fait ſinguliére, fut obſervée le ſoir du 9 Octobre, d'un côté par M. Caſſini en Picardie, & de l'autre par M. de Mairan à Breüilpont. M. de Mairan qui commença à l'obſerver à 8 heures, & qui ſe tient ſûr qu'elle ne commença pas plûtôt, la vit à la place, de la couleur, & de la forme ordinaire des Aurores Boréales, c'eſt-à-dire, ſans jets & ſans colonnes qui en partiſſent, longue de 9 à 10 degrés, dont elle s'étendoit horiſontalement vers le Midi, à compter des Pleïades d'où elle partoit, & large de 4 degrés. Mais 7 ou 8 minutes après, elle commença à s'ébrecher vers le milieu, comme pour ſe diviſer, & ſe diviſa en effet en deux Ovales lumineuſes inclinées à l'Horiſon, longues chacune de 15 à 18 degrés,

sur 5 à 6 de largeur, entre lesquelles on voyoit les Pleïades qui les separoient. Ce fut en cet état que M. Cassini vit le Phénomene à 7 heures 20'. Alors qui ne l'avoit pas vû dans sa premiére forme ne le pouvoit guére reconnoître pour une Aurore Boréale.

Ensuite les deux Ovales s'affoiblirent de clarté, & changérent de contours ou de figure, mais inégalement & différemment l'une & l'autre, & enfin un peu après 9 heures, elles ne subsistoient plus.

Cependant à 10 heures $\frac{3}{4}$ ou 11 heures, M. de Mairan vit sûrement l'Aurore Boréale, foible, à la vérité, mais à sa place naturelle & sous l'Etoile Polaire. Elle étoit contigüe à l'Horison, sans interposition de nuages obscurs, & elle y étoit plus marquée que par-tout ailleurs. Elle alla en s'affoiblissant jusque vers Minuit, où l'Observateur la quitta.

Le P. Rouché, Religieux de l'Ordre de S. François, observa aussi à Poitiers le même Phénomene du 9 Octobre, depuis 8 heures du soir jusqu'à 9, mais il le vit sous une autre forme que M.rs Cassini & de Mairan, quoiqu'à peu près dans le même lieu du Ciel. C'étoit d'abord un demi-Cercle, dont le diametre, tourné en haut, étoit parallele à l'Horison, & long de plus de 20 degrés. Ensuite ce demi-Cercle se partagea en deux autres moindres & contigus par leurs diametres, qui faisoient une même droite, parallele encore à l'Horison. Ces figures si réguliéres ne durérent pas long-temps, les deux petits demi-Cercles se réünirent pour former un plus grand Cercle presque entier, mais très-mal terminé dans la portion qui lui manquoit. Enfin cela devint une espece de Segment de Cercle, qui finissoit par un Trident, dont les dents étoient fort longues & bien séparées. Ces apparences-là sont assés différentes des autres, & peut-être difficiles à concilier avec elles. Tout le Phénomene avoit une très-grande blancheur, & un mouvement très-lent.

Jusqu'ici nous n'avons rapporté que des Aurores ou Lumiéres Septentrionales, différentes seulement entre elles par des circonstances plus ou moins particuliéres. Mais voici enfin

une Lumiére différente par l'endroit qui paroît leur être le plus essentiel, une Lumiére entiérement Méridionale. Elle fut vûë à Bésiers le 15 Février de cette année, par M.rs Boüillet & Astier l'aîné, trois quarts d'heure après le coucher du Soleil. Elle commençoit à l'endroit où il s'étoit couché, passoit du côté de l'Occident par les derniéres Etoiles des Poissons, s'élevoit vers le Zénit jusqu'à l'Oeil du Taureau, & se terminoit dans la constellation du Lion, en suivant, mais non pas toûjours exactement, la position & le cours de l'Ecliptique. On voit par-là qu'elle étoit toute Méridionale, beaucoup plus remarquable & plus parfaite sur ce point que le demi-grand Cercle vertical, dont nous avons parlé en 1729, & qui jusque-là étoit unique.

Cette Lumiére formoit une Zone ou bande d'environ 10 degrés de largeur, & qui dans sa plus grande hauteur étoit élevée de 52 degrés sur l'Horison. Elle étoit fort rouge; & selon l'ordinaire de ces Phénomenes n'effaçoit pas les Etoiles qu'elle couvroit. Au de-là de cette Zone rouge, il y avoit vers le Midi une autre Zone de Lumiére blancheâtre, presque contigüe à la premiére du côté de l'Orient, & qui s'en éloignoit en allant vers le Méridien, & au-dessous de cette Lumiére blanche étoit un nuage obscur, qui s'étendoit jusqu'à l'Horison, tandis que le reste du Ciel étoit fort serein.

Par la position qu'avoit la Lumiére rouge rapportée aux Etoiles fixes, M. Astier s'apperçût que cette position changeoit, & que la Lumiére avoit un mouvement, mais assés petit, du Nord au Sud. La Lumiére blanche qui se tenoit toûjours à la même distance de l'autre, en avoit un pareil.

Les deux Observateurs eurent des affaires, qui ne leur permirent pas de pousser l'observation au de-là de 8 heures $\frac{1}{2}$. Ils ne virent point d'Aurore Boréale, seulement M. Astier, qui se retira le dernier, en soupçonna une en se retirant, mais elle a été vûë sûrement ailleurs dans le même Pays. Par les observations de M. de Guibal, qui étoit à S. Chignan, M. Astier conjecture qu'il y avoit quelque correspondance entre la Lumiére Méridionale & la Septentrionale, parce que

que la premiére baissoit, tandis que l'autre s'élevoit; mais on n'a rien d'assés positif sur ce point. Quelque différentes que soient ces deux Lumiéres par leur position, elles sont d'ailleurs si semblables, que la présomption est grande pour la correspondance.

Comme depuis 15 ans, que nous parlons toûjours de cette matiére, il semble qu'elle ne fait que s'embarrasser de plus en plus par la multitude & la variété des circonstances & des accidents du Phénomene, peut-être ferons-nous plaisir au Public, d'annoncer que M. de Mairan a entrepris de réduire le tout à un Sistême reglé, qui paroîtra dans peu.

SUR UNE NOUVELLE CONSTRUCTION DE THERMOMETRE.

V. les M. p. 452.

ON sçait assés par ses propres reflexions, pour peu qu'on en ait fait en observant le Thermometre, combien cet Instrument si commode, d'un si grand usage, & même si agréable, est cependant défectueux; nous ne parlons que de celui de Florence ou de Sanctorius, qui est presque le seul, car celui de M. Amontons, dont nous avons parlé en 1702*, est peu connu & peu usité, quoique construit sur de meilleurs principes, & d'une maniére fort ingénieuse, mais comme il est d'une construction difficile, & qui demandoit, du moins pour un temps, la main de l'Auteur lui-même, sa mort, qui survint, empêcha qu'il ne s'en répandît un assés grand nombre.

* p. 1. & suiv.

Nos Thermometres ordinaires marquent, à la vérité, les différents degrés de chaud ou de froid, mais chacun les marque pour soi & à sa maniére, parce qu'ils ne sont partis d'aucun point de chaud ou de froid, qui leur fût commun. C'est ainsi que deux Pendules qui n'auroient pas été mises d'abord sur la même heure au Soleil, marqueroient bien chacune, que pendant un certain temps il se seroit écoulé une heure, deux heures, &c. mais non pas quelle heure il seroit

au Ciel. De plus, en ſuppoſant les deux Pendules juſtes, on pourroit bien s'aſſûrer que le même temps ſe feroit écoulé, quand elles le marqueroient toutes deux, mais on ne peut pas s'aſſûrer pareillement que quand la liqueur s'eſt élevée d'un degré dans deux Thermometres différents, il y ait eu de part & d'autre un nouveau degré de chaleur égal; car 1.° l'Eſprit de Vin peut n'être pas le même dans les deux Thermometres, & ſelon qu'il ſera plus ou moins bien rectifié, il ſe dilatera plus ou moins à une même chaleur, ou, ce qui revient au même, celui qui a été bien rectifié ſe dilatera & montera d'un degré à une certaine chaleur, tandis que l'autre ne ſera monté du même degré qu'à une chaleur plus forte. 2.° En graduant les Thermometres, on prend pour degrés égaux de l'aſcenſion de la liqueur des parties égales de la longueur des tuyaux, cependant en ſuppoſant les diametres des tuyaux d'une égalité parfaite, ce qui eſt tout au moins très-difficile, ils ont ſouvent dans leur intérieur des inégalités conſidérables, & quelquefois telles qu'il faudra pour remplir une certaine longueur d'un tuyau près du double de la liqueur qu'il faudroit pour remplir la même longueur dans un autre tuyau. Cela vient de l'inégalité d'épaiſſeur qu'ils ont en différents endroits, des boſſes, des monticules qui ſe trouvent à leur ſurface intérieure, & ſurtout de ce qu'ils ſont ordinairement plus gros à un bout qu'à l'autre.

Voilà donc trois inconvénients principaux, qui rendent la comparaiſon des Thermometres très-incertaine & très-fautive, & ce ſeroit pourtant cette comparaiſon qui en ſeroit l'uſage le plus curieux, & le plus intéreſſant, du moins pour les Phiſiciens. On ſçauroit quel eſt le chaud ou le froid d'une Saiſon, d'une Année, d'un Climat, par rapport à celui d'une autre Saiſon, d'une autre Année, d'un autre Climat, &c. quel eſt le plus grand chaud ou le plus grand froid que des Hommes, que d'autres Animaux, ſoûtiennent ou puiſſent ſoutenir, &c. Il eſt aiſé de voir combien de ces comparaiſons exactes il naîtroit de connoiſſances, & l'on peut même aſſûrer

qu'il en naîtroit d'imprévûës. Pour nous mettre à portée d'y parvenir, M. de Reaumur a entrepris de remédier aux trois inconvénients par une nouvelle construction de Thermometre à Esprit de vin.

D'abord il adopte la belle & heureuse découverte de M. Amontons rapportée en 1702, que la chaleur de l'eau boüillante est un point fixe. Ce n'est pas que ce principe n'ait été attaqué, M. Taglini Professeur en Philosophie à Pise a trouvé qu'en faisant boüillir l'eau avec plus de force, on lui donnoit plus de chaleur, cela est vrai, & M. de Reaumur en convient; mais au lieu que M. Taglini s'est contenté de voir une premiére augmentation de chaleur, M. de Reaumur a poussé l'expérience jusqu'au bout, & a trouvé qu'enfin l'eau qui avoit boüilli un quart d'heure, ou un peu plus, ne pouvoit plus donner de nouveau degré de chaleur à l'Esprit de vin contenu dans un vase mis au milieu de l'eau boüillante. Le principe de M. Amontons, qui paroissoit détruit, subsiste donc, seulement demande-t-il une légere modification. En effet puisque l'eau la plus boüillante ne peut pas parvenir à la chaleur d'un métal fondu, il faut bien qu'elle ait un certain point fixe, prescrit par sa nature, & qu'elle ne peut passer.

Ce n'est pourtant pas la chaleur de l'eau boüillante que M. de Reaumur employe le plus souvent pour point fixe, il faudroit des tuyaux trop longs pour aller jusque là, & jamais l'air n'est à beaucoup près échauffé jusqu'à ce point dans les climats les plus ardents. Il prend le point opposé, celui de la congélation de l'eau, non de la congélation naturelle, mais de l'artificielle, qui se fait par de la glace & des Sels. On a appris par les Thermometres ordinaires que de la glace est plus froide que d'autre glace, & la raison en est que l'air a été plus froid dans un temps que dans un autre. Mais cette raison cessera à l'égard de la congélation artificielle, si on la fait, comme il est ordinaire, dans un temps où l'air n'ait aucune disposition à geler l'eau; & comme il pourroit rester le scrupule que la glace naturelle qu'on employera seroit plus ou moins froide, il faudra s'en tenir au point où la premiére

surface de l'eau, qui se gelera artificiellement, sera prise, car, selon la remarque de M. de Reaumur, cette premiére action du froid doit être toûjours assés égale, & il ne peut guere survenir d'inégalités que dans la suite par une espece d'accélération plus ou moins forte. Quand de la matiére, dont le mouvement causoit & entretenoit la liquidité, une eau en a assés perdu pour n'être plus liquide dans sa surface, il paroît qu'une autre eau en doit perdre précisément autant pour se trouver au même état; quoique les causes de froid, qui agissent sur l'une & sur l'autre, ne soient pas exactement égales, ce ne sera que leur action continuée qui rendra leur différence sensible. Après tout il ne s'agit en tout ceci que d'égalités Phisiques, qui ne peuvent jamais être aussi justes que les Géométriques.

Le froid de la congélation artificielle de l'eau étant pris pour point fixe, & en même temps, si l'on veut, la chaleur de l'eau boüillante, il faut graduer un Thermometre par rapport à ces points, c'est-à-dire, le diviser en degrés égaux, tels que l'Esprit de vin y montera depuis un froid plus grand que celui de la congélation jusqu'à cette congélation, & de-là jusqu'à la chaleur de l'eau boüillante. M. de Reaumur a pris une idée fort nouvelle sur cette graduation. Les degrés égaux le sont, non par rapport à la longueur du tuyau, nous en avons vû l'erreur manifeste, mais par rapport aux dilatations de la liqueur; si le volume de la liqueur est de 100 parties, le Thermometre marquera 1 degré, quand ce volume sera augmenté de $\frac{1}{100}$ partie par la dilatation, 2 degrés quand il sera augmenté de $\frac{2}{100}$, &c. ainsi les inégalités intérieures du tuyau ne sont plus à craindre, & quelles que soient celles qui s'y trouveront, il n'en arrivera autre chose, sinon que des degrés égaux de dilatation seront des degrés inégaux sur la longueur du tuyau. Les yeux n'en seront peut-être pas si contents, mais on aura l'avantage réel & solide de sçavoir au juste de combien une liqueur a augmenté son volume par la chaleur, jusqu'où elle le peut augmenter, combien elle est de temps à prendre cette augmentation, quel est son rapport

de dilatabilité à une autre liqueur, instructions qu'on ne pouvoit pas tirer des anciens Thermometres, qui n'en disoient rien, ou ne le disoient que d'une maniére équivoque & confuse.

Graduer le Thermometre selon des degrés égaux d'augmentation de volume, c'est le graduer selon des degrés égaux de capacité de la boule & du tuyau. Que la boule seule, ou la boule, & une certaine partie du tuyau, si l'on veut, contiennent juste 100 parties égales d'eau, chacune de ces parties étant d'une quantité bien exactement connüe, il est clair que si ensuite on en verse une nouvelle dans le tuyau, une 2de, une 3me, &c. & que l'on marque les endroits où la liqueur totale du tuyau se sera élevée, on aura des degrés égaux de la capacité du tuyau, & par conséquent aussi de la dilatation d'une liqueur qui en se rarefiant monteroit à ces différents endroits marqués, car la capacité du Thermometre ayant été mesurée de cette maniére, on en ôtera toute l'eau, qui n'a servi qu'à mesurer, & on y mettra l'Esprit de vin dont on veut observer la dilatation.

Le nombre des degrés de division est arbitraire, mais il ne laisse pas de demander un choix. 100 est trop petit, un plus grand nombre donnera des divisions plus fines, & le Thermometre en sera à cet égard ce qu'on appelle plus *sensible*. M. de Reaumur juge plus commode de prendre toûjours des centaines, & il va jusqu'à 1000. Par-là il évite le plus souvent les fractions de degré, & quand il s'en trouve, elles sont assés petites pour pouvoir être négligées.

Quand on a gradué avec de l'eau la capacité du Thermometre, il a fallu déterminer l'endroit où l'on veut que soit l'Esprit de vin après s'être condensé par la congélation artificielle. Cet endroit sera à peu-près au tiers de la longueur du tuyau à compter de la boule, car l'Esprit de vin peut ensuite se dilater de plus du double par la chaleur. Il faut que cet endroit soit le nombre de la division choisie, par ex. 1000, si la division est 1000. Lorsqu'on aura versé l'Esprit de vin, & qu'on viendra à le condenser par la congélation, s'il est

au dessus ou au dessous de l'endroit marqué, on lui ôtera, ou bien on lui ajoûtera la quantité nécessaire pour l'amener au point requis, & alors on sera sûr qu'on a le volume de 1000 parties connües d'Esprit de vin condensées par la congélation artificielle.

En voilà assés pour faire entendre en général les principes de la nouvelle construction. Le plus important, c'est l'exactitude parfaite des mesures. Il en faut d'abord de petites, dont chacune contienne ce qu'on appelle une partie, ou de l'eau, ou de l'Esprit de Vin, & M. de Reaumur en indique de si justes qu'elles ne perdront pas par le mouvement, ni par le transport nécessaire, une seule goutte de la liqueur qu'elles contiendront. Il faut ensuite pour hâter l'ouvrage, en avoir de plus grandes, qui contiendront ces petites un certain nombre de fois précis. Il vaut mieux que ce nombre soit une aliquote de 100, comme 25. Mais nous supprimons tous ces détails, quoiqu'instructifs, & souvent curieux, on les apprendra du Mémoire de M. de Reaumur, & encore mieux de la pratique.

Dans les Thermometres communs on a adapté à une assés grosse boule un tuyau délié & presque capillaire, afin qu'une très-petite augmentation de volume dans la liqueur de la boule en produisît une grande & bien sensible dans la liqueur du tuyau. C'en étoit assés pour voir que la liqueur étoit rarefiée, dès qu'elle l'étoit, & même qu'elle l'étoit plus ou moins, & l'on ne s'embarrassoit pas de sçavoir de combien elle l'étoit précisément. Mais dans les Thermometres nouveaux où l'on veut arriver à cette connoissance, qui ne peut résulter que de la mesure exacte des volumes, il est inévitable que les tuyaux soient beaucoup plus gros, parce que l'exactitude & la sensibilité du Thermometre, à mesure qu'on les veut plus grandes, demandent un plus grand nombre de parties de liqueur, & que quelques petites que soient ces parties, elles font un tout considérable. M. de Reaumur est donc obligé de choquer l'habitude des yeux, & de renoncer à l'agrément du tuyau capillaire. Ce n'est pas la peine de plaider ici la

cause de l'utilité & de la justesse contre un agrément si léger. Cependant par une espece de condescendance, les nouveaux Thermometres pourront avoir des tuyaux qui ne seront pas plus gros que ceux des gros Barometres, ausquels on est assés accoûtumé.

M. de Reaumur hasarde encore une autre difformité de ce genre. On dit qu'un Thermometre est plus ou moins sensible, selon qu'une même rarefaction ou condensation arrivée à la liqueur de la boule, est marquée sur le tuyau dans une plus grande ou moindre étendüe. M. de Reaumur imagine avec raison une autre sorte de sensibilité. Elle consistera dans la promptitude avec laquelle la liqueur sentira l'action du chaud ou du froid, & la marquera. Comme les boules de ses Thermometres seront plus grosses qu'à l'ordinaire, il a fait réfléxion qu'il leur faudroit nécessairement plus de temps pour recevoir jusqu'à leur centre, & dans la totalité de la liqueur l'action du chaud ou du froid de l'air extérieur. Un remede très-simple à cet inconvénient est que les boules, sans rien perdre de leur capacité, soient applatties autant qu'on le jugera à propos, mais il est vrai que les yeux pourront encore le trouver mauvais, du moins dans les commencements. Peut-être aussi que ces nouveautés de construction seront d'autant plus agréables qu'elles seront plus marquées, parce qu'elles promettront plus sensiblement une plus grande justesse.

On ne peut guére comparer deux anciens Thermometres, ce qui les rend assés inutiles pour des recherches Phisiques un peu délicates. Le plus ou le moins d'élevation de la liqueur dépend du rapport de la capacité ou du diametre de la boule à la capacité ou au diametre du tuyau. Plus le diametre de la boule est grand par rapport à celui du tuyau, plus la liqueur monte haut par un même degré de chaleur, pour comparer deux Thermometres différents, ou les degrés de chaleur qui ont agi sur chacun d'eux, il faudroit sçavoir quel est dans chacun le rapport de ces diametres; mais on ne le sçait point, & on ne le peut sçavoir, ne fût-ce qu'à cause

des inégalités intérieures des boules & des tuyaux, qui sont toûjours inconnuës, car il se trouveroit encore d'autres difficultés. Dans les Thermometres de M. de Reaumur, il ne s'agit plus du tout de ce rapport des diametres des boules & des tuyaux; dès que le point où s'arrête l'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle est marqué sur deux Thermometres, & je suppose ce point inégalement élevé dans les deux, & dès que l'on sçait que de part & d'autre l'Esprit de Vin a un certain nombre de parties égales entr'elles dans chaque Esprit de Vin, il n'en faut pas davantage, les deux Thermometres marqueront toûjours les mêmes degrés de chaleur, quoique ces degrés puissent être inégaux dans l'étendüe qu'ils tiendront sur le tuyau. Quand un Esprit de Vin qui aura, par exemple, 400 parties égales, montera d'un degré au-dessus de la congélation, ou, ce qui est le même, aura augmenté son volume de $\frac{1}{400}$, & quand un autre Esprit de Vin qui aura 500 parties élementaires, pour ainsi dire, égales entr'elles, & égales à celles du premier, sera monté d'un degré au-dessus de la congélation, ou aura augmenté son volume de $\frac{1}{500}$, ce sera toûjours le même degré de chaleur qui aura causé la même rarefaction dans les deux volumes différents, quelle que soit d'ailleurs l'étenduë dans laquelle ce degré sera marqué à cause de la différente capacité des boules & des tuyaux des deux Thermometres. Si les parties élementaires d'un Esprit de Vin ont été prises plus grandes que celles de l'autre, mais en même nombre, les degrés d'un des Thermometres seront naturellement plus grands, mais un degré d'élevation plus grand ne sera que l'effet de la même chaleur. Ce sera la même chose, si les parties élémentaires sont prises plus grandes, & en plus grand nombre. Il seroit bon que l'on convînt d'une même mesure exacte pour les parties élementaires, & d'un même nombre total, comme de 1000 pour le nombre de ces parties condensées par la congélation.

Il y a ici une remarque importante à faire d'après M. de Reaumur. Chacun de ces degrés inégaux en étendüe dans

deux

deux Thermometres, & peut-être dans le même, marquera bien un degré égal de la dilatation de l'Eſprit de vin, mais non pas un degré égal de chaleur. Il n'eſt pas ſûr que la chaleur, toûjours augmentée par degrés égaux, produiſe dans l'Eſprit de vin des augmentations égales de volume, il eſt poſſible qu'à meſure qu'elle croît également, elle trouve toûjours ou d'autant plus de facilité ou d'autant plus de difficulté à rarefier l'Eſprit de vin, que les premiéres dilatations coûtent à la même cauſe plus ou moins d'effort que les derniéres; cette inégalité eſt plus que vraiſemblable, & l'une & l'autre progreſſion de l'inégalité l'eſt à peu-près également. Nous pouvons ajoûter encore, quoiqu'il ne s'agiſſe ici que de la même liqueur, qu'une liqueur peut ſe rarefier ſelon la progreſſion croiſſante, & une autre ſelon la progreſſion décroiſſante. Deux Thermometres, où l'Eſprit de vin ſera inégalement élevé, marqueront donc ſeulement que l'un aura reçû un certain nombre de degrés de chaleur plus que l'autre, mais non pas quel ſera le rapport de ces différents degrés entre eux. M. de Reaumur ne croit pas qu'on puiſſe arriver à cette connoiſſance exacte, tant il eſt arrêté qu'il reſtera toûjours beaucoup d'obſcurité dans nos lumiéres.

Tout ce que nous avons dit juſqu'ici ſuppoſe que l'Eſprit de vin ſoit le même dans les différents Thermometres, mais ce ſeroit une ſuppoſition bien fauſſe dans la pratique. Deux Eſprits de vin différent extrêmement en qualité, en dilatabilité; cependant les Thermometres ordinaires n'ont aucun égard à cette différence, & c'eſt là le dernier que nous ayons à traiter de leurs principaux inconvénients.

L'Eſprit de vin eſt un mélange d'une Huile éthérée, ſubtile, inflammable, & d'une eau ou flegme; l'Eau de vie n'eſt auſſi que ce mélange, & elle devient Eſprit de vin quand on y diminuë la doſe de l'eau par rapport à celle de l'Huile, ce qu'on appelle *rectification*. L'Eſprit de vin eſt plus ou moins rectifié, & par conſéquent différent, ſelon que la doſe de l'Huile eſt plus ou moins forte, il en eſt plus ou moins dilatable par la chaleur.

Pour mesurer la dilatabilité d'un Esprit de vin quelconque, M. de Reaumur en prend dans un Matras à long col 400 parties telles qu'elles sont quand la congélation artificielle les a condensées, & ensuite il voit jusqu'où les éleve la chaleur de l'eau boüillante, ce qui donnera les deux points fixes. L'opération ne promet pas d'abord un bon succès, car longtemps avant que l'eau boüille, l'Esprit de vin bout, & s'éleve beaucoup & irréguliérement, desorte qu'il semble qu'on ne peut ni marquer alors le terme précis de son élévation, ni attendre le temps où l'eau boüillira. Mais il y a un expédient facile & heureux. On n'a qu'à retirer de l'eau chaude l'Esprit de vin qui en est entouré, aussi-tôt ses boüillonnements cessent, sa surface s'applanit, & se met tranquillement à un certain point plus élevé que celui où elle étoit, cela vient de la chaleur acquise, qui se conserve quelque temps. On remet ensuite le Matras dans l'eau qu'on rend plus chaude, l'Esprit de vin s'éleve encore, boüillonne, mais on le retire encore, & sa surface applanie se remet à un nouveau point plus élevé. On recommence ce manege jusqu'à ce que l'eau étant boüillante, la surface applanie de l'Esprit de vin, qu'on aura retiré de cette eau, & qu'on y aura remis, se tienne constamment au même point d'élévation dans ces changements alternatifs, car cela arrivera quand l'Esprit de vin aura pris toute la chaleur qu'il peut prendre par l'eau boüillante sans être échauffé jusqu'au point de boüillir.

L'Esprit de vin le mieux rectifié que M. de Reaumur ait pû trouver à Paris chés les Marchands ordinaires, est tel que s'il est 400 par la congélation artificielle de l'eau, il devient 435 par l'eau boüillante, ce qui est le rapport de 80 à 87. On voit par-là l'intervalle où seront renfermés les degrés moyens pour des Esprits de vin moins rectifiés. Il seroit à propos, & même nécessaire d'écrire sur chaque Thermometre la qualité de l'Esprit de vin exprimée par la dilatation qu'il peut prendre depuis le point où il est 400 par la congélation jusqu'à celui où il sera 435, par ex. ou 434, &c. par l'eau boüillante. Deux Thermometres seront aisés à comparer

malgré la différente dilatabilité de leurs Esprits de vin, puisque des degrés inégaux d'élévation de la liqueur, mais correspondants, ne seront que les effets du même degré de chaleur.

Il n'est nullement nécessaire de pousser la longueur des Thermometres jusqu'où la chaleur de l'eau boüillante le demanderoit, puisque celle de l'air n'ira jamais si loin à beaucoup près, cela n'est indispensable que pour l'épreuve de la qualité de l'Esprit de vin ; hors de-là de moindres tuyaux suffisent, & il est plus aisé de s'en fournir. Par la même raison de facilité & de commodité M. de Reaumur n'est pas d'avis qu'on se picque d'employer le meilleur Esprit de vin, il ne s'en trouveroit pas par tout, le plus médiocre, & même l'Eau de vie suffira, bien entendu toûjours que la qualité en sera connüe. Les tuyaux seront plus courts pour une liqueur moins dilatable, & les Thermometres pourront assés aisément, si l'on veut, être égaux.

On peut ramener deux différents Esprits de vin à être de la même dilatabilité. Cette liqueur est un composé d'eau & d'huile éthérée, & toute sa dilatabilité n'appartient pas à l'huile seule, l'eau en a aussi sa part, quoique moindre. M. de Reaumur ayant fait prendre à 400 parties d'eau de la Seine tout le froid que pouvoit lui donner d'autre eau qui l'entouroit, & commençoit à se glacer, trouva que par la chaleur de cette même eau boüillante le volume de l'eau de Seine devenoit 415. Ayant pris ensuite de l'Esprit de vin dont le volume condensé par la congélation artificielle de l'eau étoit 400, & devenoit 435 par l'eau boüillante, il a mêlé 300 parties de cet Esprit de vin avec 100 d'eau de Seine, & il a eu un Esprit de vin, dont la dilatation extrême, au lieu d'être 435, n'étoit plus que 430, & c'est précisément ce qu'on trouvera par le calcul que devoient donner les 100 parties d'eau mêlées aux 300 d'Esprit de vin selon la proportion de leurs dilatations extrêmes connües par expérience. 200 parties d'eau de Seine mêlées avec 200 parties du même Esprit de vin font un Esprit de vin dont la dilatation extrême n'est plus que 425. La dilatation extrême de l'Esprit de vin affoibli

ſe trouve toûjours ou à peu-près celle qui devoit venir ſelon le calcul.

L'Inverſe de cette Méthode ſeroit de fortifier, pour ainſi dire, un Eſprit de vin foible par un autre plus fort, après avoir connu par les épreuves rapportées la dilatabilité de l'un & de l'autre. M. de Reaumur donne la regle mathématique pour avoir par cet alliage des Eſprits de vin de tel titre qu'on voudra, car on peut tranſporter à ce ſujet les expreſſions qui appartiennent aux métaux, puiſqu'il eſt tout pareil. On pourroit donc avoir par tout de l'Eſprit de vin de la même qualité, & des Thermometres parfaitement ſemblables, ce qui ſeroit bien le mieux, du moins pour les Sçavants, mais les Sçavants eux-mêmes auront peut-être de la peine à entrer dans une convention générale, tant il eſt difficile que des hommes conviennent.

M. de Reaumur étend juſqu'à une curioſité de Phiſique aſſés intéreſſante, la méthode qu'il a trouvée pour meſurer la dilatabilité de différents Eſprits de vin. Un Eſprit de vin quelconque eſt un composé de deux ſubſtances différentes, l'eau & l'huile éthérée, toutes deux dilatables, mais différemment, & il s'agit de découvrir autant qu'on le peut, quelle eſt cette différence. Nous avons vû que ſi d'un très-bon Eſprit de vin, qui de 400 deviendroit 435, on en ôtoit 200 parties qu'on remplaçât en eau de Seine, il n'iroit plus que de 400 à 425. Suppoſons que les 200 parties reſtantes d'Eſprit de vin ne ſoient que de l'huile éthérée pure; ſur la dilatation 25, il en appartient $7\frac{1}{2}$ parties à l'eau, puiſque cette eau a 200 parties, & que la dilatation de 400 de ces parties iroit à 415, donc 25 moins $7\frac{1}{2}$, ou $17\frac{1}{2}$ ſont ce qui appartient à la dilatation de l'huile, & les dilatations de l'huile & de l'eau ſont comme $17\frac{1}{2}$ à $7\frac{1}{2}$, ou 7 à 3. Mais il s'en faut bien que dans le mêlange d'Eſprit de vin & d'eau les 200 parties reſtantes d'Eſprit de vin ne fuſſent que de l'huile, M. Géoffroy le cadet a fait voir que dans l'Eſprit de vin le mieux rectifié, il y a plus de la moitié de flegme ou d'eau, & cette eau peut légitimement paſſer

pour être toute pareille à nôtre eau commune. Dans le mélange supposé de 200 parties d'eau, & de 200 d'Esprit de vin, il y avoit donc au plus 100 parties d'huile éthérée, & au moins 300 d'eau, n'en prenons que 300. On verra aisément qu'il leur appartient 11 $\frac{1}{4}$ parties de la dilatation totale 25, dont le reste qui est 13 $\frac{3}{4}$ appartient aux 100 parties d'huile. Mais il faut bien remarquer qu'au lieu que dans la premiére supposition les parties d'eau & d'huile étoient en nombre égal, dans celle-ci leurs nombres sont comme 3 & 1. C'est le volume 3 d'eau qui a pris l'augmentation 11 $\frac{1}{4}$, & c'est le volume 1 d'huile qui a pris l'augmentation 13 $\frac{3}{4}$. Or les dilatations sont d'autant plus grandes, non-seulement en même raison que les augmentations de volume sont plus grandes, mais encore en même raison que les volumes primitifs étoient plus petits. Donc la dilatation de l'huile est à celle de l'eau comme le produit de 13 $\frac{3}{4}$ par 3 au produit de 11 $\frac{1}{4}$ par 1, ce qui donne le rapport de 33 à 9, beaucoup plus grand que le premier de 7 à 3.

C'est-là ce qui se trouve, en supposant que dans les 200 parties d'Esprit de vin, il y en avoit 100 d'huile éthérée; mais s'il n'y en avoit que 50, ce qui est très vrai-semblable, auquel cas l'huile ne feroit que la 8me partie du mélange total, on trouveroit en faisant le même calcul que la dilatation de l'huile feroit à celle de l'eau dans un rapport beaucoup plus grand que celui de 33 à 9. M. de Reaumur ne croit nullement impossible que cela n'aille encore plus loin.

Quoi-qu'il en soit, il a fait une observation, qui ne doit pas être obmise. C'est que les degrés moyens de dilatation de l'huile & de l'eau ou flegme d'un même Esprit de vin, ne sont pas proportionnels aux dilatations extrêmes. L'eau se dilate d'abord plus difficilement que l'huile, & ensuite plus facilement, de sorte que par la continuation du mouvement de dilatation elle repare une partie du désavantage qu'elle avoit eu dans le commencement. C'est ce qui a été reconnu en comparant les dilatations moyennes d'une eau pure à celles d'un Esprit de vin d'une dilatabilité connüe. Si les

dilatations de l'eau & de l'Eſprit de vin par la chaleur de l'eau boüillante devoient être comme 1 & 2, chaque premier degré de dilatation des deux liqueurs depuis la congélation artificielle, étoient comme 1 & 10. De-là il ſuit que de deux différents Eſprits de vin, le plus foible, qui par conſéquent aura plus d'eau, s'élevera moins que l'autre dans le commencement de leur marche par un même degré de chaleur, & que par-là les deux différents Thermometres ſeront difficiles à comparer, ou même que la comparaiſon jettera dans l'erreur. Il eſt vrai que pour les premiers degrés, on pourra compter que la dilatation de l'eau ou flegme ſera nulle, mais on ne ſçait pas précisément à quel nombre de ces premiers, cette ſuppoſition peut s'étendre ſans une erreur trop ſenſible; il eſt vrai auſſi que les dilatabilités extrêmes des deux Eſprits de vin étant connües, on pourra faire des réductions, en concevant que le plus foible des deux n'eſt que le plus fort affoibli par une certaine quantité d'eau pure, mais ce ſeront des réductions, & du calcul, & il vaut beaucoup mieux que tous les Thermometres ſoient faits, s'il eſt poſſible, avec le même Eſprit de vin, ce qui ſera fort aiſé, puiſqu'on peut l'amener à telle qualité que l'on veut.

On a vû par les Thermometres, & l'on a dû en être d'abord fort étonné que le froid faiſoit monter la liqueur, & que le chaud la faiſoit deſcendre, mais on a bien-tôt obſervé que ce n'étoit que dans les commencements de l'action de l'un & de l'autre, & l'on a conçû que la boule qui ſe reſſerroit par le froid avant qu'il ſe fût fait aſſés ſentir à la liqueur, la faiſoit monter dans le tuyau, & qu'au contraire cette même boule échauffée avant que la liqueur le fût, & par conſéquent dilatée, la faiſoit deſcendre en devenant d'une plus grande capacité. M. de Reaumur a pouſſé l'exactitude juſqu'à vouloir déterminer dans quelles bornes cet effet, qui ne pouvoit être conſidérable, étoit renfermé, & il a trouvé que la diminution de la capacité de la boule par le froid, ou ſon augmentation par le chaud n'alloit qu'à faire monter ou deſcendre la liqueur dans le tuyau de $\frac{1}{1200}$ partie de ſon

volume total, & par conséquent de $\frac{1}{3}$ de partie sur 400, ce qui peut bien être négligé par les plus scrupuleux.

Il ne reste plus qu'une circonstance à examiner. On laisse au haut du tuyau, dont le bout est scellé hermétiquement, un espace que la liqueur dans sa plus grande élevation n'achevera point de remplir. Faut-il que cet espace soit ce qu'on appelle vuide, c'est-à-dire, plein d'un air très-rarefié, ou faut-il y laisser de l'air ordinaire? il y a avantage & inconvénient de part & d'autre. Si l'air est très-rarefié, ce qu'on aura aisément executé en échauffant beaucoup le bout du tuyau, après quoi on le scellera brusquement, le jeu de la liqueur sera fort libre dans le tuyau, elle montera dans ce vuide, sans y trouver de résistance; mais aussi l'air contenu dans l'Esprit de vin s'en dégagera aisément, parce qu'il ne sera point pressé, il enlevera avec lui les parties les plus subtiles de l'Esprit, & cela en changera la qualité, qu'on suppose pourtant devoir être toûjours la même. Si l'air du haut du tuyau est de l'air ordinaire, la qualité de l'Esprit de vin ne changera pas, mais cet air se rarefiera par la chaleur aussi-bien que l'Esprit de vin, & repoussera en embas cet Esprit qui tendoit à se dilater. Dans l'embarras de ce pour & de ce contre qui ne peuvent être évalués précisément, M. de Reaumur prend le parti que la prudence conseille en pareil cas, un parti moyen; il faudra de l'air médiocrement échauffé.

SUR LA NATURE DE LA TERRE EN GENERAL, ET SUR SES CARACTERES.

NATURELLEMENT on ne s'avisera point de douter, si l'on sçait bien ce que c'est que de la Terre, si l'on distinguera bien cette matiére si commune d'avec toute autre, & particuliérement d'avec le Sable. Mais dès que l'on vient à considérer la formation des Pierres, par exemple, qui sont V. les M. p. 243.

quelquefois un mêlange visible de Terre & de Sable, ou; ce qui est encore plus important, si l'on travaille en Poterie, en Verrerie, en Porcelaine, tous Arts qui demandent une connoissance très-exacte des matiéres terreuses qu'on y employe, alors on s'apperçoit, ou qu'on ne sçait pas assés, ou qu'il faut sçavoir mieux qu'on ne le sçait d'ordinaire, quelle est la nature de la Terre, quels sont ses caracteres spécifiques, & si elle differe ou ne differe pas du Sable, qui entre dans les mêmes compositions, car suivant cela, on aura différentes vûës, & les raisonnements ou les opérations se regleront différemment.

Il ne s'agit point ici de remonter jusqu'aux premiers principes, jusqu'aux particules primordiales, dont la Terre peut être formée. Sans compter que l'entreprise seroit apparemment impossible, elle seroit inutile pour le dessein present, il ne faut que des caracteres sensibles & palpables, une Phisique plus grossiére suffira, mais malgré sa grossiéreté, elle demandera encore assés de subtilité & de finesse.

Quand on n'y regarde pas de près, on peut croire, & plusieurs Phisiciens même sont dans ce sentiment, ou à très-peu près, que la Terre n'est que du Sable dont les grains sont plus fins. Mais M. de Reaumur établit des différences spécifiques entre ces deux matiéres, & il n'est plus permis ni dans la Théorie, ni dans la Pratique de ne compter que sur cette prétenduë différence de la grosseur de leurs parties.

Par des expériences de M. de Reaumur très-simples & très-aisées à vérifier, la Terre s'imbibe d'eau de maniére à en être augmentée de volume, & réciproquement elle revient à son premier volume lorsqu'elle se desséche. Le Sable imbibé d'eau autant qu'il peut l'être n'augmente point son volume, & n'en perd rien en se desséchant. De-là il suit évidemment que l'eau ne fait que remplir les interstices que les grains du Sable laissent entre eux, mais qu'outre cette fonction qu'elle a aussi par rapport aux interstices des grains de la Terre, elle pénétre dans l'intérieur de ces grains, les gonfle, & les étend. Si elle ne faisoit qu'y pénétrer, & y remplir

remplir de petites cavités, elle ne feroit rien de plus que ce qu'elle faisoit dans les interstices, le volume total de la Terre n'en augmenteroit pas, il est nécessaire pour cette augmentation que les grains soient gonflés & étendus. La simple pénétration, soit dans les interstices, soit dans les cavités des grains de la Terre n'a besoin que de la pesanteur, de la mobilité, & de la finesse des particules d'eau, mais la *distension* des grains a un besoin indispensable d'une autre force qui fasse entrer violemment dans les grains plus d'eau qu'ils n'en recevroient naturellement, & qui surmonte la résistance qu'ils apportent à cette distension. Quelle est cette force? il seroit bien difficile de le dire. C'est sans doute celle qui fait que des Cordes imbibées d'eau, venant à se raccourcir parce qu'elles se gonflent, élevent des poids énormes, c'est celle qui fait que des Coins de bois bien sec entrés de force dans une Roche, la fendent & en détachent de grosses Meules de Moulin, lorsqu'ils se gonflent par l'eau dont ils sont abbreuvés. Ces effets de l'eau, beaucoup plus étonnants que celui dont il s'agit ici, nous apprennent seulement qu'appliquée d'une certaine maniére elle a une force prodigieuse, l'existence de la force est prouvée de reste, mais sa nature demeure toûjours inconnüe.

Le Sable, quelque broyé qu'il puisse être, n'en est pas plus ouvert à l'eau, il ne la laisse entrer que dans les interstices de ses grains, & jamais dans leur intérieur, si ce n'est peut-être dans leurs petites cavités, mais alors même l'eau ne les étend pas, puisque le volume total du Sable ne reçoit ni augmentation par l'introduction de l'eau, ni diminution par sa sortie, ou par le desséchement. La Terre est donc une espece de corps spongieux, dont les particules sont fléxibles & capables d'extension, celles du Sable au contraire en sont incapables par leur roideur.

Si l'on veut distribuer les Corps en certaines Classes selon leur pénétrabilité par l'eau, on aura trois Classes, la 1re de corps absolument impénétrables à l'eau, tels que le Verre, l'Argent, l'Or, la 2de de corps peu pénétrables, tels que les

Cailloux & les Criſtaux, qui ne le ſont que quand ils n'ont pas encore été aſſés long-temps expoſés à l'air, & endurcis par ſon action, la 3me de corps abſolument pénétrables, tels que les bois, les peaux ſéches des Animaux, &c. le Sable ſe rangera dans la 1re Claſſe, & la Terre dans la 3me, & par-là on voit preſque à l'œil que ce ſont deux matiéres fort différentes.

Elles le ſont encore par un autre endroit qui n'eſt pas moins marqué, ni moins déciſif. La Terre abbreuvée d'eau eſt ductile, elle prend telle forme que l'on veut, & on le voit tous les jours par l'Art de la Poterie; cette qualité répond à la malléabilité des Métaux, & apparemment n'eſt au fond que la même. Elle ne ſe trouve point dans le Sable, ſes parties ſont trop roides, & trop infléxibles, & ſans doute cela tient à ce qu'on a déja vû qu'il n'eſt pas ſpongieux comme la Terre.

Plus la Terre eſt graſſe, plus elle eſt ductile, mais elle eſt plus ou moins graſſe, ou par elle-même, par le plus ou le moins qu'elle contient d'une certaine onctuoſité, ou par la différente quantité de Sable avec lequel elle eſt mêlée. Le Sable la rend toûjours plus maigre.

On pourroit penſer que la ductilité qui ſe trouve dans la Terre, & non dans le Sable, vient de ce que les grains de la Terre ſont plus fins, ainſi qu'ils le paroiſſent ordinairement, car cette fineſſe contribüe certainement à la ductilité, qui conſiſte en ce que les petites parties gliſſent aiſément les unes ſur les autres ſans perdre leur liaiſon, ou en prenant des liaiſons nouvelles, mais M. de Reaumur a fait des expériences qui détruiſent entiérement cette idée.

Qu'avec de la Terre mêlée de Sable, comme elle l'eſt toûjours, & une quantité ſuffiſante d'eau, on faſſe une eau bourbeuſe, qu'on laiſſera repoſer dans un Vaiſſeau, le Sable le plus groſſier ſe précipitera au fond en un certain temps, & laiſſera la Terre le ſurnager, parce qu'il eſt ſpécifiquement plus peſant qu'elle. Sur ce principe de la différence de peſanteur, il eſt viſible que par cette opération réitérée, par différentes lotions ſucceſſives, on aura enfin le Sable & la Terre

aussi séparés, aussi purs chacun qu'il soit possible. Ce Sable bien pur, on le broye extrêmement fin, on réduit de même en poudre la Terre pure, & l'on voit que ces deux poudres mêlées ensemble & mises dans l'eau s'y soûtiennent également. Il faut donc que les particules de l'une & de l'autre soient d'une petitesse à trouver de la part de l'eau une égale résistance à leur descente, c'est-à-dire, qu'elles soient d'une égale finesse. Il faut même à la rigueur que celle des particules de Sable soit la plus grande, car elles sont spécifiquement plus pesantes que celles de Terre, & elles descendroient plûtôt qu'elles, ou sans elles, si elles n'avoient une plus grande surface en même raison qu'elles ont plus de pesanteur; or pour avoir une plus grande surface en raison de la pesanteur, elles doivent être plus petites, comme le sçavent les Géométres. Cependant une pâte faite de cette même poudre de Sable ne sera point ductile, & celle de la poudre de Terre le sera. La ductilité de la Terre lui vient donc d'une qualité plus intrinseque que la finesse de ses grains, qui n'appartiendroit qu'à des parties intégrantes, & par conséquent elle est propre à être un caractere spécifique qui distingue la Terre d'avec le Sable.

La ductilité de la Terre tient à ce qu'elle est spongieuse. Ses grains non seulement pénétrés & amollis par l'eau, mais gonflés & étendus, vont à la rencontre les uns des autres à cause de cette nouvelle extension, prennent aisément à cause de leur mollesse les figures nécessaires pour s'ajuster exactement ensemble, & sont en état par la même cause de perdre aisément ces figures pour en prendre d'autres. Quand la Terre, dont on avoit fait une pâte en l'abbreuvant d'eau, est desséchée, elle en est plus dure, & mieux liée, parce que les nouveaux engrénements de particules que l'eau y avoit produits subsistent même après l'évaporation. Il est clair que ce seroit le contraire de tout cela pour du Sable qu'on auroit traité comme la Terre.

La pénétrabilité de la Terre par l'eau, est ce qui rend la Terre la plus parfaite impénétrable à l'eau jusqu'à un certain

point. Cette Terre la plus parfaite eſt la Glaiſe, qui eſt moins mêlée de Sable, plus pure qu'aucune autre, & tout le monde ſçait que l'eau ne paſſe point au travers, ſi ce n'eſt à une très-petite épaiſſeur. C'eſt que l'eau qui en a pénétré une premiére couche, & l'a pénétrée d'autant mieux qu'elle n'y a trouvé qu'une pure Terre, en a tellement gonflé tous les grains, & ſi également, qu'ils ne lui permettent plus de paſſer juſqu'à une ſeconde couche. Quelques-uns ont crû que l'eau entraînoit de la premiére couche dans la ſeconde des grains, qui lui fermoient enſuite le paſſage, mais M. de Reaumur oppoſe à ce ſentiment entre autres raiſons, que la ſimple vapeur d'une eau chaude, qui ne peut être ſoupçonnée de déplacer des grains, fait le même effet ſur la Glaiſe.

On pourroit imaginer ſans choquer la vraiſemblance, que la ductilité de la Terre viendroit de la figure de ſes particules, qui ſeroient des lames bien polies, poſées les unes ſur les autres, unies par un attouchement immédiat, mais faciles à ſéparer faute d'engrénement. Cette diſpoſition ſi favorable ne peut pourtant ſuffire ici, elle ſeroit bientôt troublée quand on viendroit à pêtrir la pâte de Terre, & à changer ſa forme, & les lames prendroient elles-mêmes les arrangements les moins réguliers & les plus bizarres. De plus les Talcs & les Gypſes ſont certainement formés par lames, & on trouve qu'ils le ſont tant que leur diviſion peut aller, ce qui donne un juſte ſujet de croire que cette diſpoſition s'étend juſqu'à leurs petites particules. Cependant qu'on les réduiſe en poudre fort fine, & qu'on en faſſe des pâtes bien humectées d'eau, ces pâtes n'auront point de ductilité, c'eſt donc une qualité attachée, non à la figure préciſément, ou à la fineſſe, ou à l'arrangement, mais à la ſoupleſſe des parties.

Les Sels concrets, tels que l'Alun, le Vitriol, le Borax, la Soude, &c. quoique réduits en une poudre ſi fine qu'elle ſe ſoûtient dans l'eau, tandis que celle de la Terre ne s'y ſoûtient pas, ne font jamais, non plus que le Sable, ou les Gypſes, une pâte ductile.

M. de Reaumur fait déja appercevoir quelques uſages de

la Théorie. Elle entrera dans le Siſtême de la formation des Pierres qu'il a ébauché en 1721, ainſi que nous l'avons dit *. Les caracteres de la Terre, qui viennent d'être établis, font reconnoître que comme il y a certaines Pierres, telles que le Grès, qui ne ſont que du Sable pur, lié par la matiére criſtalline ou pierreuſe que M. de Reaumur a ſuppoſée, il y en a d'autres où cette même matiére a lié de la Terre pure, car elle ſe manifeſte, & ſe rend preſque viſible par les expériences faciles que l'on fait ſur ſa ductilité, & ſur ſon renflement quand elle eſt bien humectée, ou ſon raccourciſſement quand elle ſe deſſéche. Les Cailloux ſont, ſelon M. de Reaumur, des Pierres pétrifiées une ſeconde fois, ces Pierres, qui auront eu de la Terre, n'en ont plus étant Cailloux, du moins la Terre y a perdu les caracteres qui la rendoient reconnoiſſable. Cette eſpece de métamorphoſe eſt digne d'attention. Apparemment la matiére, en s'inſinuant ſimplement entre les grains d'une Terre, l'avoit rendüe Pierre, & enſuite elle la rend Caillou en pénétrant juſque dans l'intérieur des grains.

* p. 12. & ſuiv.

L'Art de la Poterie confirme la Théorie préſente. On ſçait combien les Vaſes faits d'une pâte de Terre ſont ſujets à ſe fendre & à ſe gercer, & combien il faut avoir d'attention à les faire ſécher peu à peu & par degrés pour prévenir cet accident. On le prévient auſſi en mêlant avec la Terre une certaine quantité de Sable qui n'empêche pas la ductilité néceſſaire. Il ſaute aux yeux que la raiſon de cette pratique eſt que le Sable ne ſe renfle ni ne ſe raccourcit comme la Terre. Ce qui rend raiſon des pratiques aveugles des Arts, ce qui les éclaire, doit auſſi en corriger de vicieuſes, ou en faire naître de plus parfaites.

Nous avons rapporté en 1726*, 1727* & 1728*, toutes les nouvelles vûës de M. Couplet ſur les Revêtements, ou les Murs, qui ont des Terres à ſoûtenir. Quoi-que la Géométrie ait dominé dans ces recherches, la Phiſique y eſt entrée autant, à ce qu'il ſemble, qu'elle le pouvoit, ſurtout par la ſeconde hypotheſe de M. Couplet, mais la Théorie de M. de Reaumur offre une conſidération nouvelle très-

* p. 58. & ſuiv.
* p. 132. & ſuiv.
* p. 103. & ſuiv.

importante, & qui a échappé à tous ceux par qui ce sujet a été traité.

Des Terres coupées à plomb s'éboulent si peu qu'à peine s'en détache-t-il quelques hottées en tout un an, & même cette petite quantité seroit encore plus petite, si les premiéres parcelles avoient été soûtenuës, & ne fussent pas tombées; car ce n'est ordinairement que leur chûte, qui a entraîné celle des secondes. Un Mur n'a donc pas beaucoup de peine à soûtenir ces Terres, si on n'y considére que l'effort qu'elles font pour s'ébouler, mais elles en ont un beaucoup plus grand, & très-violent, c'est celui qu'elles font pour s'étendre, lorsqu'elles sont bien imbibées d'eau, & c'est à quoi le Mur de revêtement doit s'opposer.

Il est vrai que cette tendance des Terres à s'étendre, doit agir en tout sens, verticalement aussi-bien qu'horisontalement, & que le Mur ne s'oppose qu'à l'action horisontale, mais il faut observer que la tendance verticale n'ayant pas la liberté d'agir, du moins dans toutes les couches inférieures de Terre pressées par le poids des supérieures, toute la tendance verticale se tourne en horisontale, tant que la difficulté de soulever les couches supérieures est plus grande que celle de forcer le Mur, & cela peut aller, & va effectivement fort loin. M. de Reaumur a fait une Expérience, d'où il résulte qu'une Terre qui a très-peu de hauteur, ne laisse pas de s'étendre beaucoup davantage dans le sens horisontal, & que la force qu'elle a pour s'étendre en ce sens-là est beaucoup plus grande que tout son poids, & par conséquent que la force dont elle auroit besoin pour s'étendre autant dans le sens vertical.

Plus les Terres auront de facilité à s'imbiber d'eau, plus elles auront de poussée contre un Mur de revêtement, des Sables n'en auroient aucune à cet égard, & par cette raison, M. de Reaumur propose pour remede à l'inconvénient dont il s'agit, de mêler exprès des Gravois dans les Terres qui ne seroient pas naturellement assés sablonneuses. Non seulement les Gravois ou les Sables ne s'imbiberont pas d'eau,

mais ils laisseront des interstices qui seront des especes de retraites ménagées à la Terre qui se renflera, moyennant quoi elle n'agira pas contre le Mur.

Pour un examen parfait de la nature de la Terre, les deux caracteres que nous avons exposés jusqu'ici, ne suffiroient pas quoiqu'ils puissent passer pour les principaux. M. de Reaumur en trouve plusieurs autres, qui distingueront les Terres entre elles, & dont il ne donne encore qu'une espece de dénombrement, se réservant à les considérer plus en détail.

Les Terres différent par les couleurs, soit celles qu'elles ont naturellement, soit celles qu'elles prennent au feu.

Les unes se vitrifient, les autres se calcinent, & cela en différents degrés.

Elles passent toutes pour être Alkalines, & les Acides agissent sur elles; mais fort différemment. Il y a des Terres qui reçoivent des plus foibles Acides une violente impression, tandis que d'autres en reçoivent à peine une sensible des Acides les plus forts. Elles sont encore à cet égard fort différentes des Métaux par le peu de temps qu'elles demeurent suspenduës dans leurs Dissolvants. Cette matiére peu examinée jusqu'à présent promet de la nouveauté.

Encore une qualité des Terres, à laquelle on n'a pas fait d'attention, c'est leur odeur. Celle des Pluyes d'Eté est fort connuë, elle vient de la Terre qui n'a presque d'odeur que quand elle est humectée, tout au contraire de quelques autres matiéres, comme les Cheveux, la Corne, &c. qui n'en ont que par le feu.

On sent assés ce qu'on peut attendre des recherches qui se feront sur toutes ces qualités des Terres, si exposées à tout le monde pour la plûpart, & si peu observées. Leurs combinaisons feront naître une distribution générale des Terres en Classes, Genres & Especes, pareille à celle qui a paru si nécessaire en Botanique, & dont on s'occupe depuis si longtemps. Ces sortes d'Ordres, ou d'Ordonnances, si l'on veut, ne sont, à la vérité, que des productions de l'Esprit humain, mais ils nous aident à embrasser mieux tout ce que la Nature

ne nous a donné que pêle-mêle & en confusion; quelquefois même ils donnent lieu de découvrir des causes générales, & de prévoir avec vrai-semblance des faits particuliers.

V. les M. p. 1.
NOus renvoyons entiérement aux Mémoires La Comparaison des Observations faites à Paris & à Aix.

V. les M. p. 57.
L'Ecrit de M. de Reaumur sur la Méchanique avec laquelle certains Insectes roulent des feüilles.

V. les M. p. 574.
Et les Observations Météorologiques de cette année 1730, par M. Maraldi.



ANATOMIE.

SUR LE CRISTALLIN.

M. PETIT le Médecin, qui, comme on l'a vû dans plusieurs des Volumes précédents, s'est attaché particuliérement à l'Oeil, est entré dans des détails beaucoup plus grands qu'il n'avoit encore fait sur le Cristallin, une des principales parties d'où dépend la perfection de la Vision, & qui de plus est le siége de la Cataracte. V. les M. p. 4. & 435.

Il ne s'est pas borné aux Cristallins humains de tous âges; il a étendu ses recherches jusqu'à ceux de tous les Quadrupedes, Oiseaux, Poissons, qu'il a pû recouvrer. Il en a consideré la différente consistence, la couleur, la figure, les dimensions, la pesanteur. Voici ce qui résulte de ses observations.

Dans les Serpents & les Poissons, le Cristallin est presque sphérique.

Dans tous les autres Animaux, j'entends ceux que M. Petit a vûs, il est Lenticulaire, comme on sçait, ou formé de deux Segments de Sphére posés l'un contre l'autre, & qui ont une circonférence circulaire commune. Les deux Sphéres, dont ces Segments sont portions, ne sont que très-rarement égales. La Sphére à laquelle appartient le Segment qui fait la surface antérieure du Cristallin est presque toûjours la plus grande des deux, & par conséquent la surface antérieure du Cristallin est moins convexe, ou moins courbe que la postérieure, & fait de moindres refractions. M. Petit a eu la patience de mesurer dans un grand nombre de Sujets de différentes especes ces deux convexités, le diametre de la circonférence commune, ou la largeur du Cristallin, la longueur de la ligne menée du sommet d'un Segment au sommet de l'autre, ce

qui est l'épaisseur ou l'axe du Cristallin. Ces petites mesures sont les plus difficiles à prendre, & les plus ennuyeuses par leur petitesse même. Pour ces dimensions & pour les pesanteurs des Cristallins, M. Petit a fait une Table de 26 Cristallins humains de différents âges, & une autre Table de 36 Cristallins de Boeufs, dont il est aisé d'avoir une assés grande quantité.

La pesanteur du Cristallin humain a été trouvée de 1 grain $\frac{1}{2}$ dans un Foetus de 7 mois, & passé 10 ans elle est communément de 4 grains ou 4 $\frac{1}{2}$, rarement va-t-elle à 5.

La pesanteur des Cristallins de Boeufs, que l'on peut supposer avoir été tous tués au même âge, varie depuis 38 grains jusqu'à 56.

Outre ces deux Tables, M. Petit donne un grand nombre d'observations pareilles sur des Cristallins d'Animaux de différentes especes.

En général, la pesanteur des Cristallins ne dépend pas seulement de leur grosseur, mais encore de leur fermeté.

Ils sont plus fermes dans les Animaux plus âgés. Ils ressemblent, dans les Enfants nouveaux-nés, à de la Boüillie refroidie. Cette grande mollesse diminüant toûjours, le Cristallin a dans toute sa substance vers l'âge de 15 ou 20 ans, une fermeté assés égale, ensuite elle augmente encore, mais inégalement, elle est plus grande vers le centre, que vers la circonférence, & quoiqu'elle continüe toûjours d'augmenter, elle conserve presque toûjours cette inégalité.

Le Cristallin de l'Homme est moins ferme que ceux des Oiseaux, des Quadrupedes, & des Poissons, & ils suivent à cet égard l'ordre où nous venons de les nommer. Dans les Poissons la partie centrale ou intérieure est presque dure comme de la Corne, & en récompense la partie extérieure est plus molle que dans les autres Animaux, & n'est qu'un mucilage.

Tout le monde sçait que le Cristallin humain perd de sa convexité avec le temps, mais une chose qui lui est particuliére, & que M. Petit n'a observée dans aucun autre, c'est

qu'il change de couleur. Il n'en a point, & est parfaitement transparent depuis la naissance jusqu'à 25 ans ou environ; après quoi il prend dans son centre une legére couleur de jaune, qui ensuite devient toûjours plus foncée, & s'étend toûjours vers la circonférence. M. Petit a vû les deux Cristallins d'un Homme de 81 an, qui ressembloient à deux morceaux d'un bel Ambre jaune.

Plus les Cristallins sont fermes, plus ils jaunissent.

Il n'est pas fort rare que les deux Cristallins d'un même Sujet différent en quelque chose.

Les Cristallins séchés à l'air pendant un temps suffisant, perdent beaucoup de leur poids, & par conséquent de leur matiére. Celle qui ne s'est point *évaporée*, & qui est la plus solide, est selon M. Petit la matiére transparente, mais qui ne l'est plus après l'évaporation de l'autre. On peut concevoir des petites lames assés fermes, qui pour se laisser pénétrer les unes après les autres par des rayons de lumiére non interrompus avoient besoin d'être tenuës dans de certaines positions exactes, dans un certain ordre, & l'étoient par une matiére plus molle, qui les soûtenoit & remplissoit leurs intervalles. Après l'évaporation de cette matiére, les lames se dérangent, tombent en confusion les unes sur les autres, & il n'y a plus de transparence, ainsi qu'il arrive à du Verre pilé.

Plus un Cristallin est ferme, moins il perd de son poids en séchant, & plus il a de matiére transparente.

Le Cristallin de l'Homme peut perdre jusqu'aux $\frac{3}{4}$ de son poids. Plusieurs Cristallins de jeunes Animaux en perdent autant.

La structure du Cristallin par couches ou enveloppes concentriques posées les unes sur les autres se confirme telle qu'on la conçoit ordinairement. M. Petit s'en est assûré tant par des coupes adroites du Scalpel, que par des expériences de Cristallins mis dans plusieurs liqueurs différentes, & principalement dans des Esprits acides, où ils se sont fendus, tantôt en Côtes de Melon, tantôt du centre à la

circonférence, ou de la circonférence au centre, mais toûjours d'une maniére à donner lieu de juger de la construction totale.

M. Petit s'est fort étendu sur la Capsule du Cristallin, à laquelle il a donné un Mémoire entier. C'est une Membrane qui enveloppe tout le Cristallin, mais une Membrane si déliée que d'habiles Anatomistes en ont nié l'existence, ou du moins en ont douté. Elle n'est effectivement guére moins fine dans l'Homme qu'une toile d'Araignée. Aussi quelques-uns l'appellent-ils *Arachnoïde*. Elle est une fois plus épaisse dans le Bœuf, que dans l'Homme, & encore plus dans le Cheval. Elle seroit par conséquent moins difficile à démontrer dans ces Animaux, & ce seroit une assés forte présomption qu'elle devroit se trouver dans l'Homme, mais on l'y démontre aussi, & même sans injection, quoique ce fût d'ailleurs une chose assés surprenante qu'une Membrane si fine pût être injectée. Elle peut l'être cependant. Elle reçoit quelquefois aussi une Injection naturelle, c'est-à-dire, qu'il s'y fait une inflammation, & que ses Vaisseaux plus remplis de Sang, ou de la liqueur qu'ils portent, deviennent visibles, & qu'on apperçoit leur distribution, & leurs ramifications.

Le Cristallin de l'Homme revêtu de sa Membrane ou Capsule paroît moins transparent à sa partie antérieure qu'à la postérieure, mais s'il est dépoüillé, sa transparence est égale des deux côtés.

Le ligament ciliaire se termine & s'attache à la partie antérieure de la Capsule par des fibres qu'il y jette, & par les Vaisseaux qu'il lui fournit. Ces vaisseaux ne sont que des Limphatiques. Quand il paroît du Sang dans cette Membrane, c'est par quelque accident particulier, comme lorsque dans un accouchement difficile la tête de l'Enfant a été violemment comprimée au passage, & que le Sang y a été obligé de s'insinuer dans des Canaux qui ne lui étoient pas destinés.

La Capsule se nourrit donc de cette Limphe, qui lui est apportée par les Vaisseaux qu'elle reçoit du Ligament Ciliaire.

On voit qu'il s'en épanche une partie dans la cavité de la Capsule, entre cette Membrane & le Cristallin.

M. Petit l'a toûjours trouvée transparente, tant dans l'Homme que dans les Animaux, même dans les Sujets qui avoient des Cataractes. La Cornée & la Membrane Hyaloïde trempées dans l'eau boüillante, dans les Esprits acides, &c. y perdent leur transparence, la Membrane Cristalline y conserve la sienne, elle ne la perd que dans l'Esprit de Nitre, encore s'y dissout-elle le plus souvent, plûtôt que de la perdre. Les Cristallins deviennent opaques dans des Solutions de plusieurs sortes de Sels, & leurs Capsules ne le deviennent pas.

Il seroit fort naturel que de la Capsule, il partît des Vaisseaux, qui entrassent dans le Cristallin, c'est ainsi que toutes les parties du Corps de l'Animal sont liées avec leurs voisines, mais M. Petit s'est fort assûré qu'il n'en étoit pas de même ici. Le Cristallin est la seule partie parfaitement isolée à l'égard de toute autre, & en effet sa transparence le demande; elle seroit au moins troublée & diminuée si des Vaisseaux venoient serpenter dans sa substance, & traverser de tous côtés ces lames ou ces couches qui le composent, & dont le tissu a besoin d'être si homogene.

Comment donc se nourrit le Cristallin, s'il n'a point de Vaisseaux ? il s'imbibe de cette Limphe épanchée dans la Capsule, & s'en nourrit comme font plusieurs autres Corps qui croissent sans *intus susception.* Peut-être même ne se laisse-t-il pénétrer que par la partie la plus séreuse de cette liqueur, tandis que l'autre partie plus visqueuse reste extérieure, & prenant peu à peu une certaine consistence, se moule entre la Capsule & le Cristallin dont elle devient la premiére & la plus grande couche pour un temps, car ensuite elle sera recouverte par une autre.

Si cette Limphe vient à manquer, le Cristallin devient dur & opaque, & peut aisément se réduire en poudre, ainsi que M. Petit l'a observé. La Capsule qui sera le Réservoir des Sucs nourriciers du Cristallin aura donc un usage assés

important, sans compter celui de l'arrêter & de le tenir en état dans le Chaton de l'Humeur Vitrée, où il est enchassé comme un Diamant dans le sien.

Cette liqueur est en si petite quantité dans l'Homme qu'elle s'est dérobée aux expériences que M. Petit en eût voulu faire. Il faudroit avoir 18 ou 20 Yeux à la fois, & tous bien pourvûs de la Limphe, car ils ne le sont pas tous, & il est bien visible que cela ne seroit pas aisé. Du moins il a fait quelques épreuves sur la Limphe Cristalline des Boeufs, qui est en plus grande quantité, & d'ailleurs plus visqueuse, & plus propre à se décomposer, mais il n'en a encore pû tirer de conséquences bien précises.

Il en tire une assés importante de ce qu'il a découvert sur la Capsule. On croit encore qu'il peut y avoir des Cataractes membraneuses, qui seront des Membranes épaissies, & devenües opaques, on en a vû*. Mais M. Petit juge qu'on a été trompé par une fausse apparence. Ces Cataractes sont la Capsule épaissie, à la vérité, mais non pas dans sa propre substance. Le Cristallin, faute de nourriture suffisante s'est desséché, & en se desséchant s'est collé à sa Capsule, dont il n'étoit plus séparé par la Limphe. L'épaisseur qu'on trouve de plus à la Capsule, & qui cause son opacité, lui vient de quelques particules étrangéres, qui appartenoient au Cristallin. Qu'on les enleve par le moyen d'un peu d'eau, la Capsule redevient transparente. Combien de choses à observer sur l'Oeil seul ! combien en avons-nous déja dit, dont de grands Oculistes, & qui ont eu de grands succès, n'ont eu peut-être guére de connoissance !

* V. l'Hist. de 1722. p. 15. & 16.

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

M. Du Vivier, Chirurgien Major de l'Hôpital de Thionville, envoya à M. Morand un Rein unique, tel qu'il l'avoit trouvé à l'ouverture du Corps d'un Suiſſe. On ne laiſſoit pas de conjecturer par une échancrure de la ſurface que ce Rein avoit été formé de la jonction des deux, mais comme M. du Vivier avoit trouvé le Foye du Sujet extrémement gros, il y avoit lieu de croire que des deux Reins c'étoit le droit qui ayant été fort preſſé & fort incommodé, s'étoit uni à l'autre, dont l'extenſion naturelle n'avoit point été gênée, & en effet ce Rein unique étoit beaucoup plus gros dans toute ſa partie gauche, & tous les Vaiſſeaux, qui euſſent appartenu aux deux Reins, & qu'il avoit, quoique dans une poſition un peu différente de l'ordinaire, étoient auſſi plus gros de ce même côté-là. M. Morand le diſſéqua en pleine Académie, & on le trouva effectivement unique en dedans, comme il le paroiſſoit en dehors. Il n'eſt point dit que le Suiſſe eût aucune incommodité qui ſe rapportât à cette conformation ſinguliére.

Elle ne l'eſt pas cependant à tel point, qu'il n'y en ait déja des exemples connus. M. Morand en cita un pris de la Centurie 11me Hiſt. 77. des *Hiſtoires Anatomiques* de Th. Bartholin. Lui-même en fit voir un pareil, & M. du Vivier en alleguoit auſſi un qu'il avoit vû autrefois. On peut aiſément juger qu'il y avoit des différences dans le nombre & dans la diſtribution des Vaiſſeaux.

II.

Un jeune Gentilhomme de Languedoc âgé de 13 à 14 ans qui après s'être fort échauffé, s'étoit mis les pieds dans de l'eau froide, en eut une fiévre ordinaire, dont la ſuite fut

très-fâcheuse. C'étoit une tumeur très-considérable, qui occupoit le milieu de la région Epigastrique, & presque les deux Hipochondres, au haut de laquelle on remarquoit le Cartilage Xiphoïde relevé & poussé en dehors de deux pouces, & qui étoit terminée dans le bas à un pouce au dessus de l'Ombilic. Comme les Cataplasmes, les Remedes émollients, spiritueux, &c. avoient été inutiles, & que le Malade attaqué d'une fiévre lente tomboit dans un desséchement & dans un dépérissement très-menaçant, on résolut à Montpellier d'ouvrir la tumeur, & ce fut M. Soullier, Ecuyer, Maître Chirurgien & Anatomiste Royal en l'Université de Médecine de cette Ville, qui fit l'opération. Il trouva le Foye considérablement abscédé dans sa partie antérieure & convexe, il s'y étoit fait un trou qui auroit pû recevoir la moitié d'un Oeuf de Poule, & il en sortoit dans les Pensements de la matiére sanguinolente très-épaisse, quelquefois jaunâtre, amere & inflammable, qui étoit de véritable Bile, & toûjours des floccons de la propre substance du Foye, où l'on pouvoit appercevoir de petits bouts de Vaisseaux, les uns Sanguins, les autres Biliaires.

La principale difficulté étoit de bien vuider la matiére de l'Abscès, d'en empêcher le séjour dans le Foye, & le reflux dans le Sang. Pour cela M. Soullier imagina une Cannule d'argent particuliére, émoussée par le bout qui entroit dans le Foye, de peur qu'elle ne le blessât, mais percée de plusieurs ouvertures latérales, qui recevoient la matiére nuisible. De-là il étoit aisé de la jetter en dehors, & on avoit eu même la précaution de faire qu'elle ne pût s'épancher que sur une plaque de plomb appliquée à la Playe, car autrement elle eût causé des excoriations à la Peau. Le tout réüssit si bien, que l'on vit la fiévre du Malade diminüer de jour en jour, & son embompoint naturel revenir peu à peu. Sa playe se cicatrisa en très-peu de temps.

M. Soullier a crû devoir prévenir une objection de Théorie qu'on pourroit faire. Presque tous les Anatomistes tiennent que la Bile contenüe dans les Vaisseaux du Foye est toûjours

toûjours insipide, & à peine colorée, & qu'il n'y a que celle de la Vésicule qui soit jaune & amere. Cependant on a vû ici de la Bile ainsi conditionnée qui ne sortoit pas de la Vésicule, mais il est fort naturel que les qualités qu'elle y auroit prises, elle les ait prises par son séjour dans la substance du Foye.

La Relation envoyée à l'Académie par M. Soullier a été signée de Mrs Chicoyneau & Bourraigne, fameux Médecins de Montpellier.

III.

Un homme de 28 ans employé à Brest dans les Fermes du Roy, s'étoit plaint pendant 10 mois d'une douleur de poitrine, qui lui ôtoit la faculté de respirer, d'un vomissement qui lui prenoit par paroxismes, & d'une pesanteur dans le bas ventre. Il mourut après avoir essuyé inutilement tous les remédes ordinaires, & il fut ouvert par M. Cadran Chirurgien des Vaisseaux du Roy à Brest, qui en a envoyé la Relation à M. du Fay. On lui trouva plus de causes de tous ses maux qu'il n'en falloit, les Poumons flétris & très-secs, la Pleure très-enflammée, les Intestins gangrenés, la Vessie raccornie & vuide, la Vésicule du Fiel pareillement toute vuide, mais on lui trouva aussi ce qu'on n'eût pas soupçonné, & ce qui n'avoit rapport à aucun des maux dont il se plaignoit. Il n'avoit jamais rendu de sable, jamais eu de douleurs Néphrétiques, ni de suppression d'urine, cependant son Rein droit, devenu extraordinairement gros, d'une substance cartilagineuse, & si dure qu'on eut de la peine à le couper, renfermoit une grosse Pierre du poids de 6 Onces $\frac{1}{2}$. Le corps de la Pierre, formé à l'ordinaire par couches, remplissoit la capacité du Bassin, & par son bout inférieur enfiloit la route de l'Uretere, mais il partoit de ce corps un grand nombre de branches d'une figure extrêmement irréguliére, dont les unes se distribuoient dans les Cellules des Vaisseaux Excrétoires, & les autres ne s'attachoient à rien; elles n'étoient toutes que des graviers entassés, & enveloppés d'une lame osseuse, tirant sur la couleur d'un Corail blanc.

Le Rein gauche étoit dénüé de toute sa substance, n'ayant ses Cellules remplies que d'une liqueur verdâtre. Il est presque inconcevable que de semblables Reins ne se soient pas fait sentir, aussi-bien que toutes ces autres parties qui n'étoient pas plus mal affectées.

IV.

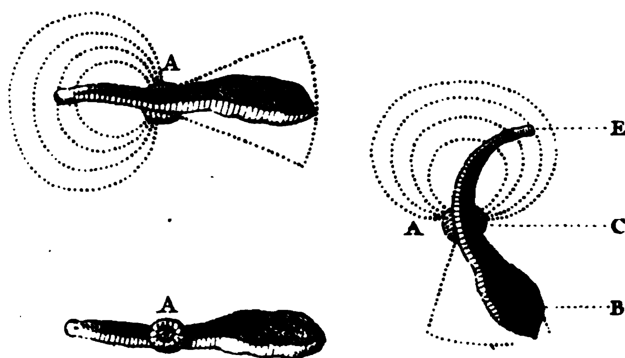
M. du Fay, Médecin du Port de l'Orient, a écrit à M. Geoffroy, que dans le cours de deux ans, il étoit sorti à un Charpentier de ce Port, âgé de 84 ans, 4 Dents, 2 Incisives, & 2 Canines.

V.

M. Boüillet, dont nous avons déja parlé plusieurs fois, Sécrétaire de l'Académie de Bésiers, & Correspondant de celle de Paris, a écrit à M. de Mairan que les Vers ronds & longs, qui sont toûjours assés communs dans le pays où il est, l'ont été beaucoup davantage en 1730. Des personnes de tout âge, de tout sexe, de tout tempérament, en ont été attaquées & en ont rendu même quelquefois par la bouche. Quelques-uns en sont morts malgré tous les secours de la Médecine. La femme d'un Artisan de Bésiers a été celle qui a eu la maladie la plus considérable & la plus opiniâtre. Elle a jetté dans l'espace de 25 jours 21 ou 22 Vers, dont 6 sont venus par la bouche, 5 vivants & 1 mort, & les autres par les selles, vivants la plûpart, mais qui mouroient peu de temps après. Ce n'étoit qu'à force de remédes les plus puissants redoublés qu'on les arrachoit de son corps, & le plus grand nombre n'en avoit pas été tué.

Cette femme avoit à la vérité usé de quelques mauvais aliments, mais ordinaires dans le pays, & aux gens de son état, & d'autres personnes, qui n'en avoient pas usé, & qui faisoient même des excès de vin, ne laissoient pas de tomber dans cette maladie. Cela a fait penser à M. Boüillet que la principale cause de cette abondante génération de Vers avoit été la grande douceur de l'hiver de 1730, qui avoit fait éclorre leurs Oeufs en plus grande quantité, & plus facilement, si cependant ces Vers sont Ovipares.

Histoire de l'Acade. 1730. pag. 43.



Hirudinella marina.

Car M. Boüillet lui-même rapporte que dans un Ver de cette espece, plus gros que les autres, on a vû clairement de petits Vers vivants monter & descendre. Ce fait, qui n'a été vû que de la Mere du Malade, dont le Ver étoit sorti, & qui fut dit aussi-tôt à un Maître Apoticaire de Bésiers, ne paroîtroit pas assés attesté, s'il n'y en avoit deux à peu près semblables, l'un dans une Lettre insérée dans les *Actes* de Th. Bartholin tom. 3. c. 58, l'autre dans la nouvelle Edition du Traité de la *Génération des Vers,* p. 39.

VI.

Le même M. Boüillet a vû un Foye de Coq pesant un peu plus d'une livre. Il n'avoit rien d'extraordinaire que sa grosseur monstrueuse. Le Coq avoit été tué par hazard d'un coup de pierre, & on ne lui avoit remarqué aucune sorte d'indisposition.

VII.

M. Garsin, Correspondant de l'Académie, & qui a été employé par la Compagnie Hollandoise des Indes Orientales en qualité de Chirurgien, a vû dans l'Estomac parfaitement vuide d'une Bonite que l'on prit dans la Mer au de-là de l'Equateur, un Ver qui y étoit assés fortement attaché, & dont on a joint ici la figure au naturel, pour tenir lieu d'une plus ample description. Le corps de ce petit Animal est divisé en deux parties peu inégales par une bulle assés grosse & bien marquée, placée comme sous le ventre, & qui peut s'enfler & se desenfler alternativement. Quand cette bulle s'enfle elle s'attache par un orifice qu'elle a, & qui se dilate, à quelque corps tel qu'étoit l'estomac de la Bonite, & alors ne contenant qu'un air très-rarefié, & pressée de toutes parts également par l'air plus dense qui l'environne, elle est, à la maniére d'une Ventouse, fortement appliquée à l'endroit qu'elle a saisi. C'est-là le point fixe sur lequel se font les deux mouvements de l'Animal. Par l'un sa bulle étant arrêtée à demeure il promene sur ce centre en tous sens la partie antérieure de son corps qui est fléxible, s'allonge & se raccourcit, & même se met en arc, & sa bouche ou trompe qui est

à l'extrémité de cette partie antérieure va ſucer ſucceſſivement tout ce qui ſe trouve dans l'eſpace aſſés grand que ce mouvement ſi varié peut parcourir. C'eſt à cauſe de cette ſuccion que M. Garſin a nommé ce Ver *Hirudinella marina*, petite Sangſuë de Mer. Par l'autre mouvement, qui eſt proprement le progreſſif, l'Inſecte ayant arreſté ſa bulle à un endroit, arrête ſa bouche à un autre le plus éloigné qu'il peut, & enſuite accourciſſant ſa partie antérieure, & deſenflant ſa bulle qui lâche ce qu'elle avoit ſaiſi, il avance vers le lieu où eſt ſa bouche, en trainant ſeulement ſa partie poſtérieure, qui ne paroît point contribuer par elle-même à la progreſſion.

Cet Inſecte tiré de l'Eſtomac de la Bonite ne vécut qu'environ deux heures. Expoſé à l'air il étoit languiſſant, & reprenoit de la vivacité dans de l'eau de Mer. Il diminua ſenſiblement de volume pendant qu'il vivoit encore.

M. Domaingo Sorhaïz, Chirurgien de Mrs les Ambaſſadeurs d'Eſpagne, a fait voir différents Bandages pour les Deſcentes Inguinales, pour celles de Matrice, pour les Exomphales, pour les incontinences d'Urine, pour la Chute de l'Anus, pour la compreſſion de l'Artére Crurale dans l'amputation de la Cuiſſe, & l'Académie y a trouvé pluſieurs choſes particuliéres à M. Sorhaïz, & qui marquent en lui bien du génie, ſoit pour inventer, ſoit pour perfectionner.

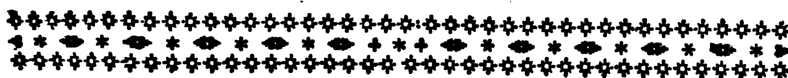
NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

V. les M. p. 328. L'Obſervation de M. Morand ſur une altération ſinguliére du Criſtallin, & de l'Humeur Vitrée.

V. les M. p. 345. L'Ecrit de M. Vinſlou ſur les Mouvements de la Tête, du Col, &c.

V. les M. p. 545. Celui de M. Hunaud ſur les Os du Crane de l'Homme.





CHIMIE.

SUR LES BOUILLONS DE VIANDE.

LEs Boüillons de Viande ſont la nourriture ordinaire des Malades, & quand il faut leur meſurer les aliments fort juſte, il eſt à propos de ſçavoir quelle quantité d'aliment ces Boüillons contiennent. On le ſçait peut-être en gros, & par une eſpece d'eſtime, & cela ſuffit pour les cas qui ne ſont pas de rigueur, mais dans ceux qui en ſont, il ſeroit bon de le ſçavoir avec préciſion, & en général ce ſera au moins une connoiſſance curieuſe. V. les M. p. 217.

On a fait anciennement dans l'Académie quantité d'Analiſes de différentes Viandes, mais ces Viandes étoient diſtillées crües au Bain-Marie, & en cet état, & par cette voye, il ne ſeroit pas étonnant qu'elles nous donnaſſent des principes différents ou en qualité, ou en quantité, de ceux qu'elles donnent à une eau où elles auront long-temps boüilli, & juſqu'à faire, ſi l'on veut, un Conſommé. C'eſt ce qu'on ne s'étoit point encore propoſé, & ce que M. Geoffroy ajoûte à ce qui s'étoit déja fait.

Son procédé général peut ſe diviſer en 4 parties, 1.° par la ſimple diſtillation au Bain-Marie, & ſans addition, il tire d'une certaine quantité, comme de 4 Onces d'une Viande crûë, tout ce qui s'en peut tirer. 2.° Il fait boüillir 4 autres Onces de la même Viande autant & dans autant d'eaux qu'il faut pour en faire un Conſommé, c'eſt-à-dire, pour n'en pouvoir plus rien tirer, après quoi il fait évaporer toutes les eaux où la Viande a boüilli, & il lui reſte un Extrait auſſi ſolide qu'il puiſſe l'être, qui contient tous les principes de la Viande, dégagés de flegme & d'humidité. 3.° Il analiſe

cet Extrait, & ſépare ces principes autant qu'il eſt poſſible. 4.° Après cette analiſe il lui reſte encore de l'Extrait une certaine quantité de fibres de la Viande très-deſſéchées, & il les analiſe auſſi.

La 1ere partie de l'opération eſt en quelque ſorte détachée des trois autres, parce qu'elle n'a pas pour ſujet la même portion de Viande, qui eſt le ſujet des trois derniéres. Elle eſt néceſſaire pour déterminer combien il y avoit de flegme dans la portion de Viande qu'on a priſe, ce que les autres parties de l'opération ne pourroient nullement déterminer.

Ce n'eſt pas cependant qu'on ait par-là tout le flegme, ni un flegme abſolument pur. Il y en a quelque partie que le Bain-Marie n'a pas la force d'enlever, parce qu'elle eſt trop intimement mêlée dans le Mixte, & ce qui s'enleve eſt accompagné de quelques Sels volatils, qui ſe découvrent par les épreuves Chimiques.

M. Geoffroy ayant pris 4 Onces de la meilleure chair de Bœuf, dont il avoit ôté la Graiſſe, les Os, les Cartilages, les Tendons & les Membranes, il en a tiré par la diſtillation au Bain-Marie 2 onces, 6 gros, 36 grains de flegme, ce qui marque que le flegme ſeul fait une partie conſidérable du tout, même ſans compter ce qui n'a pû s'élever. Enſuite 4 onces de la même chair, cuites dans un vaiſſeau bien fermé, avec 18 chopines d'eau verſées à différentes repriſes, ont donné après l'ébullition & l'évaporation 1 gros 56 grains d'Extrait, & il eſt reſté 6 gros 36 grains de fibres ſéchées.

Par l'analiſe de l'Extrait il eſt venu un Sel volatil en criſtaux plats, formés comme ceux du Sel volatil de l'Urine, & qui paroît armoniacal. M. Geoffroy croit que c'eſt celui qui ſe ſépare du Sang par les Urines après la nutrition, & qu'on peut le regarder comme le Sel eſſentiel de la Viande. Après le Sel volatil il eſt venu de l'Huile, & il eſt reſté une Tête-morte ou Charbon très-léger en très-petite quantité.

L'analiſe des fibres a donné à peu près les mêmes produits, dans le même ordre, & en doſes un peu différentes.

Ce que nous appellons ici l'Extrait contient toute la

ſubſtance nourriſſante de la Viande. Si 4 Onces de chair de Bœuf donnent 1 gros 56 grains de cet Extrait, une Livre de 16 Onces en donnera 7 gros 8 grains, & par conſéquent ſi on prend un Conſommé d'une Livre de Bœuf, on ſçait ce qu'on prend de nourriture ſolide. Mais comme les Boüillons ſe font de différentes Viandes, & le plus ſouvent mêlées, M. Geoffroy a auſſi travaillé ſur celles qu'on employe le plus ordinairement.

Dans 4 Onces de chair de Veau, il y a 18 grains de flegme de plus que dans le Bœuf, on en tire 46 grains d'Extrait de plus, & il reſte 46 grains de moins de fibres deſſéchées. On auroit pû prévoir avant l'opération la premiére de ces différences, & même les deux autres, car le Veau qui ſe nourrit & croît, a beſoin d'une plus grande quantité de Sucs que le Bœuf qui n'a qu'à ſe nourrir. Il eſt à préſumer que parmi les Sucs du Veau, il y en a un plus grand nombre de propres à former des Os ou des Cartilages, que parmi ceux du Bœuf, & de-là M. Geoffroy tire cette conjecture, que les Boüillons de Veau conviendront peut-être mieux aux Malades qui ſont encore en âge de croître, ou qui ſont tombés dans une grande maigreur. Si l'on ne va pas ordinairement juſqu'à ces ſortes de ſubtilités de pratique, ce n'eſt pas qu'elles ne fuſſent utiles, c'eſt qu'on ne ſe donne pas la peine de les rechercher.

La chair de Mouton a été traitée de la même maniére que les deux précédentes, & il en a réſulté qu'elle contient plus de Sucs nourriciers, & de principes volatils. La chair de Poulet, celles de Chapon, de Perdrix, &c. ont ſubi auſſi l'examen de M. Geoffroy, & il a fait des Tables des doſes exactes des produits de toutes ſes opérations. Par-là on eſt en état de ne plus faire au haſard des mélanges de différentes Viandes, & de ſçavoir préciſément ce qu'on y donne, ou ce qu'on y prend de nourriture.

Il faut obſerver que les doſes des Extraits marquées dans les Tables, ſont les doſes extrêmes, c'eſt-à-dire, qu'elles ſuppoſent qu'on a tiré de la Viande tout ce qui s'en pouvoit

tirer par l'ébullition, mais les Boüillons ordinaires ne vont pas jusque-là, & les Extraits qui en viendroient seroient moins forts. M. Geoffroy en les réduisant à ce pied ordinaire, trouve qu'on a encore beaucoup de tort de craindre, comme on fait communément, que les Boüillons ne nourrissent pas assés les Malades. La Médecine d'aujourd'hui tend assés à rétablir la Diéte austére des Anciens, mais elle a bien de la peine à obtenir sur ce point une grande soumission pour l'Antiquité.

SUR UN GRAND NOMBRE DE PHOSPHORES NOUVEAUX.

V. les M. p. 524.

LEs Phosphores sont une des nouveautés les plus récentes, & en même temps les plus curieuses de la Phisique moderne. D'un côté un Cordonnier de Boulogne en Italie, croyant tirer de l'Argent d'une Pierre qu'il avoit trouvée au bas du Mont Paterno, s'avisa de la calciner, & c'est-là le fameux Phosphore qu'on appelle la Pierre de Boulogne; d'un autre côté un Chimiste Allemand, qui espéroit trouver la Pierre Philosophale dans l'Urine humaine, n'y trouva qu'un second Phosphore, dont le secret eût péri avec lui, si M. Kunkel, Chimiste de M. l'Electeur de Saxe, ne se fût mis à le chercher, & ne l'eût retrouvé à force de travail.

Ces deux Phosphores ont une différence très-considérable. La Pierre de Boulogne, exposée simplement au jour, y prend de la lumiére, mais une lumiére foible, qui ne s'apperçoit que quand la Pierre est ensuite transportée dans un lieu obscur. Elle ne peut mettre le feu à rien. Le Phosphore urineux de Kunkel s'enflame par le seul attouchement de l'air froid ou chaud, de nuit comme de jour, & peut mettre le feu à des matiéres fort combustibles. Aussi ce Phosphore s'appelle-t-il *brûlant*.

Ce n'est pourtant pas que cette différence soit absolument essentielle, elle pourroit bien n'être que du plus au moins.

Il

Il y a toute apparence que dans la Pierre de Boulogne, aussi-bien que dans le Phosphore urineux, il se fait une véritable inflammation, mais une inflammation de parties si déliées, qu'il n'en résulte que de la lumiére sans aucune chaleur. Les rayons du Soleil répandus dans l'air, lors même que l'air est couvert de nuages, suffisent pour allumer les Soufres très-subtils de la Pierre de Boulogne, & n'auroient pas la force d'allumer des matiéres tant soit peu plus grossiéres, telles que les Soufres du Phosphore urineux; mais ces mêmes Soufres ont été mis par les opérations Chimiques dans une disposition si prochaine à s'enflammer, qu'il ne faut plus, pour ainsi dire, qu'un Soufflet qui excite la flamme, & ce Soufflet, c'est l'air, au mouvement duquel on les expose. On peut s'en tenir là, sans aller jusqu'au petit Sistême que faisoit M. Homberg *.

* V. l'Hist. de 1712. p. 40. & 41.

Malgré le fond de conformité qui est entre la Pierre de Boulogne & le Phosphore urineux, ce seront toûjours deux Phosphores différents, en ce que l'un ne fera que jetter de la lumiére dans l'obscurité, & que l'autre pourra mettre le feu à quelques matiéres; on en pourra faire deux especes différentes, de Phosphores lumineux, c'est-à-dire simplement lumineux, & de Phosphores brûlants, & on les mettra, si l'on veut, chacun à la tête de son espece, parce qu'ils y ont été découverts les premiers. Nous ne ferons point, du moins quant à présent, une troisiéme espece de Phosphores tels que ceux dont il a été parlé en 1724 *, qui ne sont point Phosphores pour avoir été simplement exposés au jour ou à l'air, mais parce qu'ils ont emporté de la calcination un feu actuel, ce qui les réduit presque à n'être que des Charbons ardents.

* p. 58. & suiv.

La 2de espece de Phosphores a été la plus traitée. L'Urine, dont étoit fait celui de Kunkel, n'a pas manqué d'avertir les Chimistes qu'ils pouvoient tourner leurs vûës & leurs recherches du côté des matiéres animales, ils l'ont fait avec succès, & enfin M. Homberg trouva dans la plus abjecte de toutes ces matiéres le plus beau des Phosphores brûlants *. Feu M. Lémery le cadet étendit les découvertes de M. Homberg

* V. l'Hist. de 1710. p. 54. & 55.

presque à toutes les matiéres, nonseulement animales, mais végétales *.

* V. l'Hist. de 1715. p. 18. & suiv.

La 1re espece de Phosphores, celle des Phosphores lumineux, qui ne prennent de la lumiére qu'au jour, a été la plus négligée, peut-être parce qu'on n'a pas crû tirer aisément d'une matiére minérale, comme la Pierre de Boulogne, des principes assés vifs & assés actifs pour la propriété singuliére dont il s'agissoit. Le Phosphore de Balduinus, fait avec de la Craye, étoit le seul que l'on connût de cette nature, car nous ne comptons point celui dont il a été parlé en 1728 *, fait à la vérité de matiéres minérales, & même métalliques, mais qui est brûlant, & non pas lumineux dans le sens que nous l'entendons.

* p. 36. & suiv.

Mais voici le nombre des Phosphores de la 1re espece, semblables à la Pierre de Boulogne, prodigieusement augmenté. M. du Fay, travaillant dans d'autres vûës sur les Pierres fines, s'apperçût que la Topaze commune, qui s'employe en Médecine, ayant été calcinée, devenoit, quant aux effets, une vraye Pierre de Boulogne. Il suivit la route où cet heureux hazard l'avoit mis, il trouva que la Bélemnite ou Pierre de Lynx réüssissoit encore mieux que la Topaze, & enfin de toutes ces sortes de Pierres, des Pierres à plâtre, ou Gypses, des Albâtres, des Pierres de taille & de Liais, de la Marne, des Bols, des Pierres à chaux, & des Marbres mêmes, il tira des Phosphores qui ayant été exposés au jour pendant une Minute, luisoient dans l'obscurité.

Ce n'a pas été la calcination seule qui a donné tous ces Phosphores, il a fallu dissoudre par des Acides celles d'entre ces différentes matiéres qui étoient les plus dures, & les plus compactes, & quand certaines matiéres l'ont été à certain point, comme les Cailloux, le Sable de Riviére, les Jaspes, les Agathes, le Cristal de Roche, &c. il n'est point venu de Phosphores. Cependant M. du Fay n'en desespere pas encore tout-à-fait, ni même des Métaux; d'autres opérations pourront réüssir. L'Histoire des Découvertes fournit quantité d'exemples qui encouragent.

On voit assés que ces Phosphores faits de différentes matiéres, & quelquefois par des procédés différents, doivent avoir entre eux un nombre proportionné de différences, & par conséquent très-grand. Leur lumiére est plus ou moins vive; elle dure plus ou moins à chaque fois qu'on les met dans l'obscurité, & comme cette propriété de luire s'use par l'exercice, parce qu'il se consume toûjours une certaine portion de leurs Soufres, ils la perdent à la fin en un temps total plus ou moins long, supposé que la propriété ait été également exercée. Quand ils l'ont perdüe, on la leur rend en recommençant sur eux l'opération qui la leur avoit donnée, car, & on le voit aisément, ce ne sont que les Soufres de la surface qui s'enflamment, & se consument, & une nouvelle opération fait une autre surface. Mais cela ne va pas à l'infini, & le nombre de fois qu'on peut renouveller différents Phosphores, doit être différent.

Ils ont bien des choses communes, bien entendu que c'est toûjours avec des variétés. Ils prennent de la lumiére au travers du Verre & de l'eau; ils n'en prennent presque point de la Lune, & encore moins des Chandelles. Ils perdent leur vertu, exposés trop long-temps de suite au jour. La plûpart la conservent assés de temps, quoique noyés dans l'eau.

Quelques-uns plongés subitement dans l'eau, après avoir été allumés au jour, brillent d'un plus grand éclat, à mesure qu'ils se dissolvent, & s'échauffent par la dissolution, mais cet éclat s'évanoüit presque entiérement un moment après. La pâte liquide, qui est restée dans le Vaisseau & dans l'eau, ne laisse pourtant pas de redevenir encore un peu lumineuse par le jour, mais cette vertu lui dure à peine 24 heures.

Outre l'eau commune, M. du Fay a essayé l'Esprit de vin, l'Huile, les dissolutions Acides ou Alkalines, pour voir lesquelles de ces liqueurs ôteroient aux Phosphores la propriété de luire, ou la diminuëroient, & de quelle maniére; mais nous ne nous engagerons point dans ce détail, que M. du Fay lui-même n'a presque fait qu'indiquer. Nous remarquerons seulement un phénoméne singulier du Phosphore de

la Bélemnite. Plongé dans l'Eau forte, il y fait un bruit semblable à celui d'un Fer rouge plongé dans l'eau, tant les Soufres de ce Phosphore, quoi-qu'assés subtils pour avoir été allumés par la lumiére seule du jour, sont cependant forts & vigoureux, ou empruntent de force des Acides de l'Eau forte.

Il s'ouvre ici une vaste carriére où les Physiciens pourront s'exercer. Presque tout est devenu Phosphore, & si tout absolument ne le devient pas dans la suite, on sera dans une surprise contraire à celle où l'on fut d'abord par la Pierre de Boulogne. On pourroit être étonné que la Pierre d'Aiman demeure toûjours aussi unique qu'elle l'est, car un très-petit nombre de Corps Electriques, & qui d'ailleurs lui ressemblent très-peu par les effets, ne méritent pas d'être comptés.

OBSERVATION CHIMIQUE.

M. LE FÉVRE, Médecin d'Uzès, dont nous avons déja parlé en d'autres occasions, a donné à l'Académie une nouvelle observation, qui est une suite de son Phosphore rapporté en 1728 *. Il s'apperçût que le Soufre commun, quoique très-fixe, se dissipe facilement, qu'il s'unit fort vîte avec le Fer, & qu'en les mêlant ensemble, le tout se change en un Colcothar, tout semblable à celui qu'on tire du Vitriol par une longue calcination. Il faut prendre de la Limaille de Fer & du Soufre dans les mêmes proportions que pour le Phosphore, & quand la dissolution du Fer sera exactement faite par l'Acide du Soufre, la matiére étant en pâte molle, on la tirera du Vaisseau, & on l'exposera à l'Air, où elle s'échauffera dans peu de temps, & rendra une odeur de Soufre brûlant; & au lieu que celle du Phosphore demeure toûjours noire, celle-ci deviendra rouge en quelques heures, & en poudre fine, stiptique au goût. C'est-là le Colcothar, que l'on a par une opération très-simple & très-facile, & ce n'est pas une simple curiosité, puisque le Colcothar est employé dans la Médecine & dans les Arts.

* p. 36. & suiv.

Si l'on met ce Colcothar dans de l'eau chaude, on trouvera après l'avoir remüée, filtrée & évaporée, qu'il reste au fond du Vaisseau un vrai Vitriol de Mars, provenu de l'Acide du Soufre, qui s'est attaché au Fer, l'a corrodé, & s'est uni avec lui pour composer un corps salin très-différent du Soufre commun, & du Fer. Voilà donc un changement assés nouveau du Soufre en Sel, merveille qui est cependant diminüée parce que le changement ne tombe que sur la partie saline du Soufre transportée ailleurs, & qu'on ne tient pas compte de la partie inflammable. M. le Févre laisse, dit-il, aux plus habiles le soin de chercher ce qu'elle est devenuë.

Il conçût en réfléchissant sur ces expériences que l'Eau de Chaux, qui dissout le Soufre commun, pourroit bien aussi le changer en Sel, parce que les Acides du Soufre, au lieu d'agir sur le Fer, agiroient sur les parties terrestres Alkalines que cette Eau contient, & cela se trouva en effet par les mêmes opérations, ou à très-peu près, qu'on vient de rapporter. Apparemment on réduiroit de même en Sel les Bitumes, les Résines, & toutes sortes d'Huiles & de Graisses.

Comme le Sel qui se tire du mêlange de l'Eau de Chaux & du Soufre, est un Alkali fort semblable par toutes ses qualités à celui que donnent des Eaux minérales de Languedoc, telles que celles d'Ieuzet, de S.t Jean, d'Alais, M. le Févre conjecture que le sécret de l'opération par laquelle la Nature rend minéral toutes ces Eaux, est découvert. Il se sera trouvé auprès d'une Source une terre ou chaux mêlée de Soufre commun, & l'eau ayant mis l'Acide du Soufre en état d'agir sur l'Alkali de la chaux, ou terre, il se sera formé les Sels dont il s'agit, qu'elle aura ensuite entraînés avec elle.

Quoique les Sels de toutes ces Eaux paroissent fort semblables, les terres sont très-différentes, & leur différence influë principalement sur la quantité du Sel. Cela ne doit s'entendre que des Eaux qu'on a nommées.

Il ne faut pas oublier une singularité remarquable de celles d'Ieuzet. Dès qu'elles ont été quelques moments sur le feu,

il se forme à leur surface de petites Aiguilles blanches, transparentes, égales en longueur & en grosseur, d'une régularité parfaite, & qui, selon l'Auteur, ressemblent au Sel Sédatif de M. Homberg.

M. le Févre, ne fût-ce que pour s'assûrer de la découverte qu'il avoit faite du mistére de la composition de ces Eaux, n'a pas dû manquer d'essayer d'en faire par art. Il y a réüssi assés facilement, & avec différentes terres. Ses Eaux artificielles ont la grande vertu des naturelles, qui est d'être fort rafraîchissantes, sans compter qu'elles sont purgatives & diuretiques.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires
V. les M. p. 33. L'Ecrit de M. Bourdelin sur le Sel léxiviel du Gayac.

V. les M. p. 357. Une Maniére plus simple de M. Boulduc, pour faire le Sublimé corrosif.



BOTANIQUE.

SUR LES GREFFES.

NOus avons dit en 1728 * que M. du Hamel dans le dessein de découvrir si l'Art de greffer pouvoit faire naître de nouvelles espéces de Fruits, s'étoit engagé dans une suite d'expériences sur cette matiére. Celles dont nous allons donner le précis ne regardent point encore la multiplication des espéces, elles n'ont pour objet que l'Art de greffer en lui-même. Il a été fort exaggéré par les Auteurs qui en ont écrit, & l'expérience, qu'ils n'avoient pas assés consultée, rabat beaucoup de leurs discours.

V. les M. p. 102.
* p. 46. & suiv.

Il est étonnant, quoique certain, & nous l'avons déja dit, que la Greffe fasse quelque bon effet, qu'elle rende les fruits meilleurs. Nous nous en tenons à la cause rapportée en 1728, qui cependant est assés peu particularisée, mais qui, du moins jusqu'à present, ne peut guére l'être davantage. Cela posé, on juge aisément qu'il faut un certain rapport entre le Sujet ou Arbre sur lequel on ente, & la Branche entée ou Greffe, que les diamétres, les orifices, les figures des tuyaux se conviennent de part & d'autre, & sur tout apparemment les Séves, c'est-à-dire, qu'il faut que la Séve qui montera du Sujet s'accorde avec celle que la Greffe apportoit d'abord avec elle, & soit propre ensuite à être son unique aliment. Or les Séves sont infiniment différentes entre elles, douces, acres, coulantes, visqueuses, aromatiques, fœtides, &c. Et l'on peut croire que de là vient en grande partie l'amélioration des fruits. Ni le Sujet, ni la Greffe n'avoient une Séve entiérement propre à produire un fruit d'une certaine qualité, il étoit nécessaire que la Séve du Sujet fût travaillée dans

d'autres organes que les siens, & on lui présente ceux de la Greffe, qui lui sont convenables, & n'auroient travaillé que sur une autre Séve moins bien conditionnée.

Ces rapports ne peuvent être que très-délicats, le raisonnement ne peut jamais deviner entre quels Arbres il se trouveront, & l'expérience seule peut enseigner où ils se trouvent. Quoique délicats ils ne sont pas uniques, un même Sujet peut presque toûjours porter également à peu près différentes Greffes, & une même Greffe être appliquée à différents Sujets.

Voici les principales observations de M. du Hamel sur cette matiére.

1.° La Greffe qu'il a reconnuë pour réüssir le mieux, est celle d'un Poirier sur un autre, ou d'un Cerisier sur un Merisier, & celle qui réüssit le plus mal est du Prunier sur l'Orme; le Prunier périt aussi-tôt. On voit bien qu'entre ces deux cas extrémes la variété de tous les autres est infinie. Des Greffes qui réüssiront les unes reprennent plus ou moins facilement que les autres, poussent du bois & des feüilles plus ou moins vîte, &c. C'est la même chose renversée pour celles qui ne réüssiront pas.

2.° Outre le rapport inconnu qui doit être entre les Vaisseaux & les Séves du Sujet & de la Greffe, il faut qu'il y en ait un, que l'on peut connoître à peu près, entre les temps où le Sujet & la Greffe ont les principaux simptomes de leur végétation, où ils poussent, où ils sont en Séve. Des Amandiers, greffés par M. du Hamel sur des Pruniers de petit Damas noir, donnerent pendant une année entiére les plus belles espérances du monde, & après cela tombérent tous en langueur, & la plûpart périrent assés promptement. Il n'en faut point chercher la cause dans la disproportion des Vaisseaux, ni des Séves, puisque la premiére année où cette disproportion auroit dû avoir son plus grand effet, fut si belle & si heureuse. D'ailleurs ce qui prouve beaucoup de conformité à cet égard entre le Prunier & l'Amandier, c'est qu'on greffe le Pescher sur l'un & sur l'autre avec le même succès.

ſuccès. Mais à l'égard des temps ou des Epoques remarquables de la végétation, il y a une grande différence entre le Prunier & l'Amandier, l'Amandier eſt toûjours de beaucoup plus avancé. De-là il arrive dans les Greffes dont il s'agit, que l'Amandier peut demander de la nourriture au Prunier dans des temps où celui-ci n'eſt pas en état de lui en fournir, ou de lui en fournir aſſés. La Greffe ayant été faite en Autonne, par ex. ils ſont tous deux en repos pendant l'Hiver, l'un n'inquiéte point l'autre, mais dès que l'Amandier a ſenti la premiére douceur du Printemps que le Prunier ne ſent pas encore, toute la Séve qu'il avoit apportée avec lui ſe met en mouvement, & il ſuce de plus celle du Prunier, qui peut ſuffire à cette dépenſe, parce que la branche de l'Amandier eſt encore très-jeune, & ſe nourrit à peu de frais. Mais dès qu'elle eſt devenuë plus groſſe au bout de l'année, elle demande trop de nourriture au Prunier, & la lui demande toûjours à contre-temps, lorſqu'il n'eſt pas encore en Séve. Le Sujet trop ſucé & affamé par la Greffe, la Greffe mal nourrie, ou qui ne l'a pas été à propos, périſſent tous deux, au moins d'une mort lente.

Si au contraire le Prunier a été greffé ſur l'Amandier, la même meſintelligence à l'égard des temps ſe retrouve, mais avec un effet oppoſé. L'Amandier dès le premier commencement du Printemps fournit une nourriture que le Prunier n'eſt pas encore diſpoſé à recevoir, parce que ſes Vaiſſeaux ne ſont pas aſſés ouverts par une foible chaleur, que le reſſort de ſes fibres n'eſt pas aſſés animé, &c. Le Prunier meurt de replétion & d'engorgement, au lieu que dans le cas précédent il mouroit d'inanition.

3.° Dans ces deux expériences oppoſées, il ſe forme à l'endroit de l'inſertion de la Greffe ſur le Sujet une eſpece de bourlet, ou bien il s'y amaſſe une Gomme. Quelque mouvement que la Séve ait dans les Plantes, ſoit celui de circulation, ſoit tout autre, il faut toûjours qu'elle ſe diſtribuë librement du Sujet à la Greffe, & en général qu'elle ne demeure pas dans les Vaiſſeaux ſans mouvement. Dans la

2de expérience il est bien aisé de comprendre que l'Amandier fournissant au Prunier une Séve qu'il ne peut recevoir, elle s'arrête & fait une obstruction à l'endroit où elle devroit entrer dans le Prunier, c'est-à-dire, à l'endroit de l'insertion. Mais dans la 1re expérience où le Prunier ne fournit pas assés à l'Amandier, & où l'Amandier tire trop, il ne paroît pas que ce soit la même chose, cependant cela revient au même. Dans le temps que l'Amandier tire trop, le Prunier se desséche & s'amaigrit, ses Vaisseaux perdent de leur capacité, & lorsqu'ensuite il est en Séve, il en a plus que ses Vaisseaux n'en peuvent contenir à l'aise, elle ne s'y meut pas avec facilité, & il s'en fait des amas vers l'insertion, parce que c'est-là que finissent les vaisseaux du Sujet.

4.° Ces bourlets, ces gommes, &c. sont tout au moins des maladies avec lesquelles les Arbres peuvent vivre, mais ce sont souvent des causes de mort, la Séve arrêtée se corrompt ordinairement, comme nôtre sang, & dans les deux exemples rapportés une assés prompte mort est presque infaillible.

5.° Que la Greffe meure de la mort du Sujet, il n'y a rien là de remarquable. D'où pourroit-elle tirer sa subsistance ? Mais si la Greffe ne peut pas survivre au Sujet, le Sujet peut survivre à la Greffe, ou se porter bien, tandis qu'elle est malade. Ses Sucs qui n'entrent plus ou n'entrent qu'avec peine dans des Vaisseaux étrangers se meuvent librement dans les siens propres, & font de nouveaux développements de parties, qui sont de nouveaux jets.

6.° La Greffe peut être utile au Sujet, & le faire vivre plus long-temps, ce qui est une espéce de paradoxe. Cela vient de ce qu'elle lui ôte des qualités vicieuses, ou en empêche l'effet. Le Pescher de noyau est fort délicat, & en même temps abondant en productions inutiles qui l'épuisent, il pousse beaucoup de bois qu'il faut retrancher, il est presque toûjours plein de bois mort, le tronc lui-même meurt aisément, & enfin l'Arbre dure peu d'années. M. du Hamel ayant fait enter sur des Peschers de cette espece des Pruniers

de la Reine Claude, il y a déja 18 ans que ces Arbres greffés durent, quoique languiſſants, & ils n'euſſent certainement pas joüi d'une ſi longue vie, ſi les Peſchers, qui abandonnés à eux-mêmes auroient eû une végétation exceſſive & indiſcrete, n'en eûſſent trouvé le reméde dans celle des Pruniers, qui la modéroit en ne tirant que les ſucs qui ſe pouvoient dépenſer utilement.

7.° Quelques Arbres vivent plus long-temps greffés ſur des Sujets foibles, & qui durent peu, que ſur des Sujets plus robuſtes, & plus vivaces. Le Prunier dure plus que le Peſcher de noyau, cependant le Peſcher nain dure plus long-temps ſur le Peſcher de noyau que ſur le Prunier. C'eſt-là un effet bien ſenſible d'une convenance que l'on eût pû conjecturer ſur les noms ſeuls de ces Plantes, mais il ſe trouve & il ſe trouvera encore à l'avenir une infinité de ces rapports, qui ſeront tout à fait imprévûs.

8.° En général quelque rapport qu'il puiſſe y avoir entre le Sujet & la Greffe, M. du Hamel conclut de ſes expériences que les Arbres greffés durent moins que s'ils ne l'avoient pas été. La Greffe raffine les ſucs, & rend les fruits meilleurs, mais d'un autre côté elle fait toûjours violence à la nature, en altérant la conſtitution organique de l'Arbre. Il n'eſt pas hors d'apparence que, toutes choſes d'ailleurs égales, les peuples ſauvages ne vivent plus, que ceux qui ſont civiliſés & polis.

SUR L'ANATOMIE DE LA POIRE.

Les Plantes étant bien ſûrement des corps organiſés, les fruits qui en ſont les parties les plus nobles, & celles pour leſquelles toutes les autres ſont faites, ne peuvent manquer non ſeulement d'être organiſés auſſi, mais de l'être plus finement, & avec plus d'art. La difficulté n'eſt que de découvrir cette organiſation. L'Anatomie des Animaux, dès qu'ils ſont un peu grands, eſt en quelque ſorte groſſiére &

V. les M. p. 299.

facile, une charpente d'Os bien liés ensemble, de gros Vaisseaux sanguins, &c. se présentent d'eux-mêmes aux yeux; mais il n'en va pas ainsi d'une Pêche, d'un Abricot, d'une Pomme; à l'exception des Noyaux, ou des Pépins, on n'y voit qu'une chair, un parenchime uniforme, qui n'a point de parties distinctes les unes des autres, & où la dissection ne paroît avoir aucune prise. Cependant quelques grands Observateurs ont entrepris de faire celle de la Poire, qu'ils ont peut-être préférée, parce que ce fruit, lorsqu'il est pierreux, a plus de diversité dans sa substance que beaucoup d'autres, & M. du Hamel a voulu marcher sur leurs pas.

Après qu'il a eu essayé différents moyens pour parvenir à disséquer des Poires, différentes liqueurs, qui par la macération rendissent leurs petits organes plus visibles, enfin il a trouvé que la liqueur la plus favorable étoit l'Eau commune. Mais pour donner une idée ou du travail, ou de la patience que demande l'opération, il nous suffira de dire que quelquefois il a fallu laisser macérer une Poire pendant deux ans, & que souvent quand on a commencé à en détacher bien adroitement avec un instrument très-fin un filet, qui est quelque Vaisseau, il faut pour achever de le détacher, remettre la Poire en macération encore quinze jours. La dissection a toûjours été faite sur des fruits qui nageoient dans l'eau, afin de profiter autant qu'il étoit possible de leur augmentation de volume, quoique petite, & de la disposition que les différentes parties pouvoient prendre à se séparer. On juge bien que les meilleurs Microscopes ont été mis en usage.

Il ne s'agit encore présentement que de la peau de la Poire, par où M. du Hamel a commencé, le reste viendra dans les années suivantes. Nous avons fait en 1702 * une description abrégée de la peau du Corps humain composée de trois Membranes, qui s'enveloppent les unes les autres; celle de la Poire l'est de quatre que M. du Hamel a eu l'art de distinguer. Il appelle la 1re enveloppe *Epiderme*, la 2de *Tissu muqueux*, à cause d'une certaine viscosité, la 3me *Tissu pierreux*, & la 4me *Tissu fibreux*.

* p. 30. & suiv. 2de Edit.

L'Epiderme de la Poire a assés d'analogie avec celui de l'Homme. C'est une membrane d'une consistance plus ferme que celle du fruit, & par là destinée à le défendre des injures du dehors, elle réduit la transpiration du fruit à être de la quantité nécessaire, & parce que son tissu serré en empêche l'excès, & parce que le grand nombre de pores, dont elle est percée, ouvrent assés de passages. Cet Epiderme tombe par petites écailles comme celui de l'Homme, & se régénere de même sans laisser de cicatrice. On ne sçait pas encore si notre Epiderme est produit par l'épaississement de quelque suc arrivé à la superficie extérieure du corps, ou par l'expansion des derniers filets très-déliés de quelques Vaisseaux, à plus forte raison cette détermination ne sera-t-elle pas aisée à faire pour la Poire. M. du Hamel inclineroit à penser que son Epiderme est la derniére superficie du Tissu muqueux condensée par l'air.

Ce Tissu, immédiatement posé sous l'Epiderme, & très-difficile à en détacher, est apparemment formé par un entrelacement de Vaisseaux très-déliés, & pleins d'une liqueur un peu visqueuse. Il est vert naturellement, mais quand la Poire a pris du rouge par le Soleil, quelquefois cette couleur ne passe pas l'Epiderme, quelquefois elle pénétre jusqu'au Tissu muqueux, & le pénétre même tout entier. Il est sujet à des accidents & à des maladies, les coups de Grêle le meurtrissent & le desséchent, la trop grande humidité le corrompt, quelques Chenilles s'en nourrissent après avoir détruit l'Epiderme, une très-petite Mitte, qui n'a point entamé l'Epiderme, va le manger. Quand il est détruit dans toute son épaisseur, il ne se régénere point, il se forme à sa place une espece de Galle gommeuse.

La troisiéme enveloppe ou partie de la peau totale de la Poire est le Tissu pierreux. On sçait assés ce que c'est que ce qu'on appelle *pierres* dans la Poire, ces grumeaux plus durs que le reste de sa substance, tantôt plus, tantôt moins gros, & quelquefois amoncelés en petits Rochers. On nomme les Poires *cassantes*, ou *fondantes*, selon qu'elles en ont ou n'en

ont pas, ou en ont moins. Ces pierres n'appartiennent pas ſeulement à cette enveloppe qui eſt le Tiſſu pierreux, elles ſe trouvent répandües dans tout le reſte du fruit, mais elles ſont arrangées dans ce Tiſſu plus réguliérement les unes à côté des autres, & enfin elles le ſont de maniére à former une enveloppe, ce qui ſuffit ici. Comme elles ſont de la même nature que les autres, il ſera à propos de les conſidérer toutes enſemble.

Elles commencent dès la queüe de la Poire, & s'étendent ſur toute ſa longueur, poſées entre les Téguments de cette queüe, & un faiſceau de Vaiſſeaux qui en occupent l'axe. Quand elles ſont entrées dans le fruit, il y en a une partie qui s'épanoüit, & va former le Tiſſu pierreux en tapiſſant toute la ſurface intérieure du Tiſſu muqueux, l'autre partie ſe tient ſerrée le long de la queüe prolongée, ou de l'axe de la Poire, & y forme comme un canal pierreux d'une certaine largeur. Ce canal arrivé à la région des Pépins ſe partage à droite & à gauche, prend plus de largeur de part & d'autre, & enſuite va ſe réünir au deſſus des Pépins, & reprend la forme de canal pour aller aboutir à l'Ombilic, ou à la Tête de la Poire. Il y trouve le Tiſſu pierreux auquel il s'unit, & tous deux enſemble forment un Rocher très-ſenſible.

Cela n'empêche pas qu'il n'y ait des pierres jettées çà & là moins réguliérement dans le reſte du corps de la Poire. Elles ſont liées par une ſubſtance plus molle, & plus douce. Il y en a, mais de beaucoup plus petites, juſque dans les Poires qu'on appelle *fondantes*.

La difficulté eſt de ſçavoir quelles parties organiques ſont ces Pierres, & quel eſt leur uſage. M. du Hamel croit le pouvoir conjecturer ſur les obſervations ſuivantes, faites avec grand ſoin dans l'eſpérance de quelque éclairciſſement. Les pierres ne ſont pas ſenſibles dans les fruits nouvellement noüés, ce ne ſont que de petits grains blancs ſans ſolidité, mais ils durciſſent enſuite & groſſiſſent à tel point que les fruits encore fort petits ne ſont preſque que des pierres, moins dures cependant qu'au temps de la maturité, mais en

plus grand nombre par rapport au volume du fruit, car à mesure que le fruit croît depuis un certain point, les pierres ou croissent moins, ou ne croissent plus, & même il en disparoît. Quand elles sont dans leur parfaite grosseur, on peut voir quantité de filets, ou qui y entrent, ou qui en sortent. Leur substance n'est point formée par lames ou par couches, mais par grains.

Sur tout cela M. du Hamel conjecture que les Pierres sont des Glandes végétales analogues aux Animales, & qui font des sécrétions de sucs. On fera aisément l'application de cette idée à ce qui vient d'être dit, seulement sera-t-il peut-être à propos d'expliquer comment les Pierres cessent de grossir tandis que le fruit grossit encore. C'est que des sucs tartareux, & pierreux s'amassent facilement dans des conduits très-étroits, & n'y peuvent plus couler. La Glande ou Pierre ne croîtra donc plus, & même elle diminüera soit par une transpiration qui ne sera point réparée, soit par un reflux de sucs dans le reste du fruit; il continüera de croître en l'un & en l'autre cas.

M. du Hamel observe que le temps où le fuit noue, & un peu après, étant précisément le temps où l'Arbre travaille le plus à la production des Pépins, partie si importante, les Glandes végétales sont alors & en plus grand nombre & plus molles, pour fournir mieux les sucs nécessaires. Quand elles se sont obstruées, & qu'elles ont acquis leur derniére dureté, qui ne leur permet plus la fonction de filtrer, elles ne deviennent pas pour cela inutiles, elle prennent la fonction d'Os, & servent d'appui aux autres parties du fruit, qui ont moins de consistance.

Une chose qui convient encore fort heureusement à l'idée de Glandes appliquée aux Pierres, c'est cette Roche qu'on voit a l'Ombilic de la Poire, cet amas de pierres plus grand qu'en aucun autre endroit. C'étoit-là justement au temps de la fleur que les Etamines, & les Pétales prenoient naissance, c'étoit-là que se faisoient les plus importantes filtrations de sucs, & que des Glandes étoient le plus nécessaires.

Il reste la quatriéme enveloppe qui fait partie de la Peau de la Poire, & qui est posée sous le Tissu pierreux. M. du Hamel l'appelle *Tissu fibreux*, parce que, comme la peau proprement dite des Animaux, il est formé d'un entrelacement perpétuel de Vaisseaux anastomosés les uns avec les autres. Ce n'a pas été sans beaucoup d'art que ce dernier Tégument de la Poire a pû être démêlé d'avec les trois supérieurs ou plus extérieurs, mais il faudroit encore plus de sagacité d'esprit, & presque de la divination pour démêler précisément les usages particuliers de chacun des quatre. M. du Hamel ne s'est pas engagé dans un détail qui ne seroit pas assés fondé sur l'expérience, il est plus sage d'éviter les raisonnements où l'on n'est pas conduit par les faits.

OBSERVATIONS BOTANIQUES.

I.

M. Benoît Stéhélin, de Bâle, Correspondant de l'Académie, a écrit à M. Danty d'Isnard qu'il avoit découvert dans la *Filicula Saxatilis, corniculata. Inst. R. H. 542,* que l'Anneau qui entoure l'Ovaire des Plantes Capillaires en doit être la partie spermatique, c'est-à-dire, celle où est renfermée cette poussiére, qui féconde l'Ovaire. Car dans cette espéce l'Anneau est entouré de Zones transversales élastiques, qui en se rompant laissent échapper la matiére qu'il contient, & cette matiére a la couleur jaune des Spermes ou poussiéres des autres Plantes. Quand elle est sortie, on voit les Anneaux vuides, transparents, non colorés, plissés d'une infinité de plis presque imperceptibles; quelques-uns de ces Anneaux ont conservé leur premiére figure, & d'autres ont crevé. On ne peut observer la matiére spermatique que dans le temps où les sillons des feüilles de la Plante, qui contiennent l'Anneau & l'Ovaire, sont encore fermés.

II.

Le même M. Stéhélin a vû un nouveau phénoméne dans l'*Equisetum,*

l'*Equiſetum,* la Preſle. Sa pouſſiére, entourée de lames élaſtiques, eſt d'un vert foncé, & elle eſt d'un gris-pâle de cendre, quand ces lames ſe ſont débandées. Qu'on la mette ſur quelque choſe d'humecté, elle redevient en un moment de ſon premier vert. Ainſi il paroît que c'eſt l'humidité des lames qui lui donne la verdeur, & quand ces lames ſe deſſéchent, elle doit la perdre, ou même en avoir plus ou moins, ſelon que les lames humides la ſerreront & s'y appliqueront plus ou moins par un mouvement de contraction & de débandement.

III.

M. Sarrazin, Médecin de Quebec, Correſpondant de l'Académie, a trouvé dans l'Amérique Septentrionale quatre eſpéces d'Erable, qu'il a envoyées au Jardin Royal, après leur avoir impoſé des noms. La 4me qu'il appelle *Acer Canadenſe Sacchariferum, fructu minori, D. Sarrazin,* eſt un Arbre qui s'éléve de 60 ou 80 pieds, dont la Séve, qui monte depuis les premiers jours d'Avril juſqu'à la moitié de Mai, eſt aſſés ſouvent ſucrée, ainſi que l'ont aiſément reconnu les Sauvages & les François. On fait à l'Arbre une ouverture, d'où elle ſort dans un Vaſe qui la reçoit, & en la laiſſant évaporer, on a environ la 20me partie de ſon poids, qui eſt de véritable Sucre, propre à être employé en Confitures, en Sirops, &c. Un de ces Arbres qui aura 3 ou 4 pieds de circonférence, donnera dans un Printemps, ſans rien perdre de ſa vigueur, 60 ou 80 livres de Séve. Si on en vouloit tirer davantage, comme on le pourroit, il eſt bien clair qu'on affoibliroit l'Arbre, & qu'on avanceroit ſa vieilleſſe.

Cette Séve pour être ſucrée demande des circonſtances ſinguliéres, qu'on ne devineroit pas, & que M. Sarrazin a remarquées par ſes expériences. 1.° Il faut que dans le temps qu'on la tire, le pied de l'Arbre ſoit couvert de Neige, & il y en faudroit apporter, s'il n'y en avoit pas. 2.° Il faut qu'enſuite cette Neige ſoit fondüe par le Soleil, & non par un air doux. 3.° Il faut qu'il ait gelé la nuit précédente. Cette eſpece de manipulation, dont la Nature ſe ſert pour faire le

Sucre d'Erable, ressemble assés à quelques opérations délicates de Chimie, où l'on fait des choses qui paroissent opposées, & où celles qui paroissent les plus semblables, ne sont pas équivalentes pour l'effet.

Encore une remarque curieuse de M. Sarrazin, c'est que la Séve de tel Erable qui ne sera point bonne à faire du Sucre, le deviendra une demi-heure, ou tout au plus une heure après que de la Neige, dont on aura couvert le pied de l'Arbre, aura commencé à fondre. Cette Neige s'est donc portée dans les tuyaux de l'Erable, & y a operé avec une grande vîtesse.

M. Sarrazin dit aussi que l'*Apocynum majus, Syriacum; rectum, Com. 90.* fournit un Suc dont on fait du Sucre en Canada. On ramasse la Rosée qui se trouve dans le fond des fleurs.

M. Marchant a lû la Description de la *Gentiana Alpina, magno flore.* I. B. Tom. 3, p. 523, Gentiane.

Et du *Doronicum radice Scorpii.* C. B. p. 184. Doronic.

M. Garsin, dont nous avons déja parlé ci-dessus, a rapporté de son voyage des Indes Orientales, & a donné à l'Académie la description de deux Plantes de ce Pays-là, peu connuës, & mal décrites par les Auteurs qui en ont parlé.

La premiére est le Mangoustan, Arbre pomifere des Isles Moluques, mais qu'on a transporté dans celle de Java, & dont on cultive aussi quelques pieds à Malaca, à Siam, & aux Manilles. Il a la touffe si belle, si réguliére, si égale, qu'on le regarde aujourd'hui à Batavia comme le plus propre à orner un Jardin ; il y a bien de l'apparence que s'il peut vivre en nos Climats, il ne tardera pas beaucoup à y paroître, & en ce cas il déthrôneroit les Maronniers d'Inde. Ce qui aideroit beaucoup à son grand succès, c'est que son fruit est excellent, rafraîchissant, & très-sain. Son écorce,

qui a les mêmes vertus que celle de la Grenade, est un remede pour les Dissenteries, que l'on débite à Batavia, en cachant ce que c'est. Pour le bois, il n'est bon qu'à brûler.

La seconde Plante, nommée par les Malabares, *Todda Vaddi,* est un Héliotrope, & une Sensitive ou *Mimose,* comme disent les Botanistes, c'est-à-dire, *imitatrice* des mouvements animaux. Toutes ses feüilles disposées ordinairement sur un même plan, qui forme une *Ombelle,* ou Parasol, se tournent du côté du Soleil levant ou couchant, & se penchent vers lui, & à midi tout le plan est parallele à l'horison. Cette Plante est aussi sensible au toucher que les Sensitives ou Mimoses qui le sont le plus, mais au lieu que toutes les autres ferment leurs feüilles en dessus, c'est-à-dire, en élevant les deux moitiés de chaque feüille pour les appliquer l'une contre l'autre, celle-ci les ferme en dessous; si lorsqu'elles sont dans leur position ordinaire, on les releve un peu avec les doigts pour les regarder de ce côté-là, elles se ferment aussi-tôt malgré qu'on en ait, & cachent ce qu'on vouloit voir. Elles en font autant au coucher du Soleil, & il semble qu'elles se préparent à dormir. Aussi cette Plante est-elle appellée tantôt *Chaste,* tantôt *Dormeuse,* mais outre ces noms, qui lui conviennent assés, on lui a donné quantité de vertus imaginaires, & il n'étoit guére possible que des Peuples ignorants s'en dispensassent.

Cette Plante aime les lieux chauds & humides, sur-tout les bois peu touffus, où se trouve une alternative assés égale de Soleil & d'ombre. M. Garsin en a reconnu deux especes.

Il a traité tout ce Sujet selon la méthode la plus exacte des Botanistes, au lieu que nous n'en avons pris que ce qu'il y a de plus intéressant pour la curiosité ordinaire.



GEOMETRIE.

SUR UNE THEORIE GENERALE DES LIGNES DU QUATRIEME ORDRE.

V. les M. p. 158. & 363.

NOUS avons déja entamé cette matiére en 1729 *, quoique légérement, tant à l'occasion d'un Ecrit de M. Nicole sur les Lignes du 3me ordre, que d'un autre de M. de Maupertuis sur une affection singuliére de quelques-unes du 4me. Mais une Théorie générale de ces derniéres Lignes, entreprise par M. l'Abbé de Bragelongne, nous ouvre un champ, sans comparaison plus vaste, & nous pourrions dire, en changeant un seul mot dans un beau vers de Virgile,

* p. 37. & 44.

Magnus ab integro Curvarum *nascitur ordo.*

car au pied de la lettre cet ordre contient un très-grand nombre de Courbes, & M. de Maupertuis, le seul qui y ait touché, jusqu'à present, n'a touché qu'à une de leurs propriétés.

Elles sont les unes finies, ou rentrantes en elles-mêmes, comme le Cercle & l'Ellipse, les autres infinies comme la Parabole, & l'Hiperbole, les autres *mixtes* de ces deux especes. Les finies, qui ne doivent pas être si simples que le Cercle, se noüent & se renoüent plusieurs fois en forme de rubans, les infinies, ou n'ont pas des Asimptotes droites, non plus que la Parabole, mais en ce cas elles en ont de courbes, ou elles peuvent être *inscrites* ou *circonscrites* à leurs Asimptotes droites, ou *ambigénes*, ainsi que nous l'avons expliqué en 1729. Les Courbes mixtes après s'être renfermées dans un espace déterminé se noüent, & portent leurs branches dans l'Infini. Quelquefois ces branches infinies ne partent pas de

cet espace déterminé & circonscrit, elles le rencontrent en leur chemin, & le traversent comme une branche d'Hiperbole traverseroit par une espece de hasard un Cercle ou une Ellipse. Cependant ces espaces, ou plûtôt ces Contours fermés, qu'on peut appeller en général des *Ovales*, appartiennent essentiellement à la Courbe, & en sont partie. Ils en sont même encore une partie essentielle, lorsqu'ils en sont entiérement détachés, & comme isolés. On les appelle alors *Ovales conjuguées*, parce qu'elles se rapportent à la Courbe, quoique sans liaison sensible; si elles y étoient attachées de quelque façon que ce fût, comme lorsqu'elles seroient traversées par une branche de la Courbe, on les appelleroit *adhérentes*. Il y a plus, des points mathématiques, qui ne se trouvent dans aucun des contours de la Courbe, ne laissent pas de s'y rapporter, non pas comme des centres ou des foyers, mais comme des points qui seroient dans quelque contour de la Courbe, & cependant ils n'y sont pas, ils ont des Abscisses & des Ordonnées qui leur répondent, aussi-bien qu'à tous les autres points du cours de la Courbe, ils en sont des parties qui ne peuvent être apperçûës par les yeux, mais seulement par une recherche subtile de l'esprit. Enfin si les Lignes du 3me ordre peuvent avoir des Infléxions & des Rebroussements, à plus forte raison celles du 4me, susceptibles par leur nature d'une plus grande complication, & qui à l'égard de ces deux affections la portent si loin, qu'elles peuvent quelquefois, ainsi qu'il a été dit, les avoir d'une maniére invisible. On seroit frappé des variétés, & des bisarreries des Lignes du 4me ordre, si on en voyoit les plus singuliéres & les plus dissemblables tracées sur le plan.

Il faut cependant que l'Algebre attrape & démêle par ses fines opérations toutes ces variétés, & ces bisarreries. Elle ne le peut qu'en développant avec industrie l'Equation, où toute la Courbe avec tout ce qui lui appartient est contenüe, &, pour ainsi dire, roulée à peu près comme une Plante dans son germe. Là sont renfermées toutes les droites qui ont rapport à la Courbe, & la déterminent, Abscisses, Ordonnées,

Tangentes, Sécances, &c. Les Abſciſſes & les Ordonnées, & toutes les autres qui en dépendent, ſont repréſentées par les Racines de l'Equation, égales ou inégales, poſitives, ou négatives, ou imaginaires, & ces imaginaires mêmes ſont d'une grande utilité. Il s'agit donc de tirer d'une Equation toutes ſes Racines, de les combiner enſemble, & de voir tout le jeu géométrique qu'elles peuvent produire.

En général une Ligne quelconque ne peut jamais être coupée par une ligne droite, qu'en autant de points que le plus haut Expoſant de ſon Equation a d'unités. Ainſi une ligne droite pouvant avoir, auſſi-bien qu'une Courbe des Abſciſſes & des Ordonnées, dont l'Equation ne peut avoir pour Expoſant que 1, une ligne droite ne peut être coupée par une autre droite qu'en 1 point, les 4 Sections Coniques, qui ſont les premiéres Courbes, ne peuvent être coupées par une droite qu'en 2 points, parce que leur Equation n'eſt que du 2^{d} degré, les lignes du 3me ordre en 3 points, &c. En effet il eſt évident qu'une droite, qui a une fois coupé ou rencontré une autre droite, ne peut plus à cauſe de la rectitude de ſon cours la rencontrer une 2de fois; ſi l'on vouloit qu'elle la rencontrât encore, il faudroit que cette droite coupante changeât de nature, perdît ſa rectitude, & alors en ſe détournant de ſon premier cours elle pourroit revenir trouver une 2de fois la droite déja coupée. Si l'on vouloit qu'elle y revînt une 3me fois, il faudroit altérer davantage ſa rectitude, & toûjours ainſi de ſuite, d'où l'on voit que les Courbes ſont, ſelon cette idée, d'autant plus courbes qu'une droite les peut couper en plus de points, & que leurs différents ordres, en y comprenant même les lignes droites, ont été légitimement établis ſur ce fondement.

Toute droite n'eſt pas obligée à couper une Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'Expoſant de ſon Equation, ou, ce qui eſt le même, de ſon ordre, il ſuffit qu'il y ait quelque droite qui le faſſe, & celle qui l'a une fois fait ne peut plus rencontrer la Courbe en aucun autre point.

L'interſection ſe fait par un ſeul point commun aux deux lignes quelconques, mais l'attouchement, qui ne peut être qu'entre une droite & une Courbe, ou entre deux Courbes, ſe fait par deux points communs aux deux lignes, & comme deux points déterminent la poſition d'une droite, de-là vient que la Tangente & la Courbe touchée ont la même poſition en ligne droite à l'endroit de l'attouchement, ou, ce qui revient au même, qu'une droite infiniment petite, qui eſt un côté de la Courbe, lui eſt commune avec la Tangente. Un attouchement, qu'on ne laiſſe pas d'appeller un point, vaut donc deux points d'interſection, & les Courbes, telles que les Sections Coniques, qui ne peuvent être coupées par une droite qu'en deux points, ne peuvent plus être ni coupées, ni abſolument rencontrées par cette droite, dès qu'elle a été leur Tangente. Dans l'ordre ſuivant, qui eſt le 3[me], une Tangente pourroit bien être encore enſuite Sécante de la Courbe, mais non pas Tangente une 2[de] fois, car deux attouchements vaudroient 4 points d'interſection, qui ſont impoſſibles dans cet ordre.

Puiſque dans une Infléxion deux côtés de la Courbe ſont exactement poſés bout à bout en ligne droite, la Tangente au point d'infléxion a donc ces deux côtés de la Courbe communs avec elle, & ſi le ſimple attouchement fait par un ſeul côté valoit deux points d'interſection, celui-ci fait par deux côtés doit valoir 3 points d'interſection, ce qui ſe voit encore en ce qu'à 1 côté répondent 2 Ordonnées, 3 à 2 côtés, &c. & que chaque Ordonnée ne répond naturellement qu'à un point de la Courbe. De ce que l'attouchement au point d'infléxion vaut 3 points d'interſection, il ſuit, & qu'on ne doit commencer à trouver des infléxions que dans le 3[me] ordre, & que dans cet ordre une Tangente au point d'infléxion ne peut plus rencontrer la Courbe.

Si, comme nous l'avons expliqué en 1729 *, deux infléxions s'uniſſent & ſe confondent, il y aura 3 côtés mis exactement bout à bout en ligne droite, & par conſéquent l'attouchement en ce point vaudra 4 points d'interſection; * p. 44.

cette affection ne peut donc se trouver que dans le 4me ordre, & les supérieurs, & la Tangente qui aura rencontré une ligne du 4me en un point de cette espece, ne la rencontrera plus en aucun autre point.

On peut pousser aussi loin qu'on voudra l'idée de ces infléxions qui se confondent, de sorte qu'une infléxion sera simple, double, triple, quadruple, &c. & il est clair qu'à mesure que l'infléxion se compliquera, la Courbe sera d'un ordre plus élevé.

Il faut seulement remarquer que l'infléxion qui étoit invisible dans le cas de 1729, où elle n'étoit que double, ne sera pas invisible de même dans tous les autres cas, mais ne le sera qu'alternativement. Lorsqu'elle n'étoit que double, on imaginoit un arc concave, un convexe & un concave qui se suivoient, & l'arc convexe étant supprimé, les deux concaves s'unissoient, & par-là étoit effacée toute apparence d'infléxion. Si l'infléxion étoit triple, il faudroit imaginer un arc concave, un convexe, un concave & un convexe, & les deux du milieu étant supprimés, car il ne doit jamais rester que les deux extrêmes, un arc concave & un convexe s'uniront, ce qui est la forme naturelle de l'infléxion. Il est évident après cela que si l'infléxion est quadruple, elle redevient invisible, & toûjours ainsi de suite, tant qu'elle aura une dénomination paire, au lieu qu'elle sera visible dans toutes les impaires.

Nous avons dit en 1729 que dans le cas de l'infléxion double, la plus simple des compliquées, l'arc supprimé de la Courbe devoit être conçû, non comme anéanti absolument, mais comme ayant tous ses côtés infiniment petits du 1er ordre réduits à n'être plus que du 2d. Quand l'infléxion est triple, ou quadruple, &c. Il n'est nullement besoin de concevoir que les côtés des arcs supprimés soient réduits à une plus grande petitesse que celle du 2d ordre, car une plus grande ou une moindre étendüe supprimée ne fait rien à la chose, & on peut remarquer en passant que selon le Sistême de la Courbure établi dans la *Géométrie de l'Infini*, la courbure

courbure sera toûjours infinie dans les infléxions dont nous traitons ici, & peut-être tout autre Sistême géométrique auroit-il eu de la peine à en rendre raison.

A mesure que les Courbes en s'élevant d'ordre deviennent plus compliquées, les droites qui s'y rapportent le deviennent aussi davantage, toutes droites qu'elles sont, c'est-à-dire, que les fonctions qu'elles ont par rapport aux Courbes se compliquent. Ainsi la fonction la plus générale & la plus simple des droites par rapport aux Lignes d'ordres quelconques étant de les rencontrer, une droite ne peut rencontrer une Ligne du 1er ordre ou une autre droite qu'en un seul point, où elle sera sa Sécante ; dans le 2^d^ ordre la droite peut être ou la Sécante d'une Section Conique en deux points différents, ou sa Tangente par deux points infiniment proches; & elle ne peut être l'un & l'autre ; dans le 3me ordre une droite peut être ou Sécante d'une Courbe en trois points différents, ou Tangente en deux infiniment proches, & Sécante en un autre différent, ou Tangente en trois infiniment proches, auquel cas ces trois points sont une infléxion simple. En voilà assés pour faire voir comment la fonction de *rencontrer* qui appartenoit à une droite par rapport aux Lignes d'ordres quelconques, se complique toûjours selon que les ordres sont plus élevés, car il sera très-aisé de suivre cette idée si loin qu'on voudra.

Quand la fonction de la droite se complique, elle devient équivalente à plusieurs différentes droites selon le nombre de ses complications. Une Tangente est équivalente à deux droites sécantes, & parce que les deux points où elle rencontre la Courbe sont infiniment proches, elle ne peut être équivalente qu'à 2 lignes égales. Si elle est la Tangente d'une infléxion simple, elle sera équivalente à 3 lignes égales, à 4, si elle est Tangente d'une infléxion double, à 5, si elle l'est d'une infléxion triple, &c. Si outre qu'elle est simple Tangente, ou Tangente d'une infléxion quelconque, elle est encore Sécante en 1, en 2, &c. autres points, elle sera équivalente à autant de droites égales que le simple attouchement

ou que l'infléxion en demandera, & de plus à autant de droites inégales qu'il y aura de points d'interfection. Dans le 4me ordre, que nous traitons ici, une droite pouvant être ou Sécante en 4 points, ou fimple Tangente, & enfuite Sécante en 2 points, ou fimple Tangente, & enfuite encore fimple Tangente, ou Tangente d'une infléxion fimple, & enfuite Sécante en 1 point, ou Tangente d'une infléxion double, cette droite pourra être équivalente ou à 4 droites inégales, ou à 2 égales, & encore à 2 autres égales différentes des 1res, ou à 3 égales, & à 1 inégale, ou à 4 égales.

C'eft-là ce que l'Algebre fent, pour ainfi dire, avec une extrême fineffe. Si on a, par exemple, l'expreffion algébrique d'une droite qui doive rencontrer une Ligne du 4me ordre ou Courbe du 3me, cette expreffion fera une Equation du 4me degré, qui par conféquent aura quatre Racines. Ces Racines feront autant de valeurs de la droite, dont il s'agit, & cette droite fera par-là équivalente à quatre grandeurs. Il arrivera précifément felon les différents cas, que nous venons de marquer, que ces quatre grandeurs ou racines feront, ou toutes quatre inégales, ou qu'il y en aura deux égales, & deux autres différentes, égales entre elles, ou trois égales & une inégale, ou quatre égales. L'Algébre repréfentera exactement le caractere de chaque cas particulier.

Tout ce que nous avons dit fur les Infléxions s'applique fans peine aux Rebrouffements, il n'y a qu'à concevoir des arcs directs & rebrouffants, au lieu d'arcs concaves & convexes. On verra comment la fuppreffion de certaines portions de la Courbe qui a produit des infléxions multiples, & les a renduës alternativement vifibles & invifibles, fera les mêmes effets fur les rebrouffements. Puifque le Rebrouffement fimple, ainfi qu'il a été prouvé dans la *Géométrie de l'Infini*, eft formé par deux côtés infiniment petits exactement pofés l'un fur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, la Tangente en cet endroit fera équivalente à trois droites égales, ou aura trois racines égales, quatre fi le rebrouffement eft double, parce qu'il y aura trois côtés, & toûjours ainfi de

suite. La Tangente pourra encore être ou Tangente, ou Sécante en un autre endroit selon l'ordre de la Courbe, & l'égalité ou l'inégalité de ses valeurs ou racines. Il faut concevoir aussi que la suppression de quelque portion de la Courbe, qui a causé le rebroussement multiple, n'a été que la réduction de ses côtés au 2[d] ordre d'infiniment petit.

Nous n'avons employé jusqu'ici que les Tangentes pour faire entendre plus nettement de quelle maniére une droite devient équivalente à plusieurs par la multiplication de sa fonction, car comme cette équivalence détermine les principales affections des Courbes, & qu'elle se découvre par l'Algebre, c'est-là que toutes les recherches doivent tendre. Mais ce ne sont pas les Tangentes que les Equations Algébriques des Courbes expriment directement, ce ne sont que les Abscisses & les Ordonnées, dont le rapport perpétuel constitüe la nature de la Courbe, & il faut voir comment ces droites-là peuvent être multiples. Nous ne prendrons plus ce mot de multiples que dans un sens plus étroit, & nous ne le donnerons qu'aux lignes, soit Abscisses, soit Ordonnées, qui ayant plusieurs valeurs, les auront toutes égales.

Il est certain déja qu'une Ordonnée ou Abscisse pouvant être Tangentes de la Courbe, elles seront multiples de la même multiplicité dont une Tangente pourra l'être selon le cas. Mais il faut approfondir un peu plus cette matiére.

Une Ordonnée ou Abscisse est multiple, quand sa fonction naturelle d'Ordonnée ou d'Abscisse est muliplïée, ou, ce qui est à peu près le même, quand elle fait seule ce que faisoient en d'autres cas plusieurs différentes lignes de la même espece.

Que l'on conçoive un demi-Cercle rapporté à une droite extérieure, qui en sera à quelque distance, & vers laquelle il tournera sa convéxité, de cette droite comme Axe partiront des Ordonnées terminées à tous les points du demi-Cercle. La fonction naturelle d'une Ordonnée étant de se terminer à un point de la Courbe, toutes ces Ordonnées seront simples, horsmis celles des deux extrémités du demi-

Cercle, car ces deux-là seront Tangentes, & se termineront chacune à deux points du demi-Cercle infiniment proches, tandis que toutes les autres ne se termineront qu'à un seul. Ces deux seront donc des Ordonnées doubles.

La fonction des Abscisses est de porter à leur extrémité une Ordonnée, & ici afin que deux Abscisses portent deux Ordonnées égales, il faut qu'elles soient inégales. Mais si l'on conçoit que cette inégalité ou différence des deux Abscisses diminüe toûjours, & devienne enfin nulle, il y aura par conséquent un point où une seule Abscisse fera la fonction de deux. Ce point est celui qui répond au milieu du demi-Cercle. L'Abscisse de ce point sera donc double, toutes les autres étant simples. Et en effet si le demi-Cercle venoit se poser sur l'axe, cette Abscisse seroit sa seule Tangente.

Pour s'assûrer encore plus que la duplicité de l'une de ces deux lignes, Abscisse ou Ordonnée, n'emporte point nécessairement celle de l'autre, on peut remarquer que dans le 1er cas, qui est celui de l'Ordonnée double, toutes les Abscisses étoient constamment simples, tant celles des deux Ordonnées Tangentes que de toutes les autres, & qu'il n'est arrivé aucun changement à ces Abscisses, parce qu'on a considéré en quoi quelques Ordonnées différoient des autres. De même dans le 2^d^ cas, où l'on a trouvé une Abscisse double, l'Ordonnée qui y répondoit étoit constamment simple, & n'a reçû nul changement par la considération qu'on a faite de ce que son Abscisse avoit de particulier.

Ce qu'on a dit ici de la duplicité suffit pour donner une idée générale de la multiplicité.

Il y a encore une maniére dont la fonction de l'Ordonnée peut être multipliée, c'est lorsque l'Ordonnée se termine à un point où se coupent deux ou plusieurs branches de la Courbe, car alors chaque branche ayant sa suite d'Ordonnées qui lui appartient, distincte d'une autre suite, l'Ordonnée qui se trouve au point d'intersection des branches, appartient en même temps à ces différentes Suites, & fait autant de

fois selon leur nombre la fonction d'Ordonnée, elle a autant de racines égales. S'il arrive qu'elle soit en même temps Tangente d'une branche, elle aura une racine égale de plus. Si l'attouchement se fait à une infléxion ou rebroussement simple ou multiple de la branche touchée, on verra sans peine par la simplicité ou multiplicité de l'infléxion ou du rebroussement, combien le nombre des racines égales doit augmenter.

Tout cela suppose que les racines d'une Ordonnée soient affectées du même Signe plus ou moins, car si elles sont affectées de différents Signes, elles ne sont plus la même Ordonnée, fussent-elles égales; celles qui ont plus ou les positives étant au dessus de l'Axe, celles qui ont moins ou les négatives sont au dessous.

L'Abscisse est autant de fois multiple, que sa fonction de porter une Ordonnée est multipliée. Elle est donc multiple dans le cas qui vient d'être exposé, non pas autant de fois que le seroit son Ordonnée par être Tangente simple ou multiple de quelque branche, cela est absolument étranger à l'Abscisse, mais autant de fois seulement que l'Ordonnée sera multiple par être au point d'intersection de plusieurs branches, car l'Abscisse sera autant de fois Abscisse, qu'il y aura d'Ordonnées différentes, quoiqu'égales, qui viendront se placer sur le même point de l'Axe.

Par cette même raison, l'Abscisse qui répond à un point de Rebroussement simple est deux fois Abscisse, car elle porte deux Ordonnées, dont l'une appartient à la suite des Ordonnées du cours direct, & l'autre à la suite des Ordonnées du cours rebroussant. Il est évident que cette idée ne s'appliqueroit pas aux Infléxions, quoique d'ailleurs les Infléxions & les Rebroussements ayent coûtume d'aller ensemble, & de suivre les mêmes loix dans les Théories qui les regardent. Les Ordonnées de l'arc concave, & celles de l'arc convexe ne sont que la même suite d'Ordonnées, & par conséquent l'Abscisse d'un point d'Infléxion n'est qu'une Abscisse simple. Celle d'un point de Rebroussement double seroit triple, &c.

On sous-entend assés que les Abscisses doubles, triples, &c. ou qui auront 2, 3, &c. valeurs égales, auront aussi-bien que les Ordonnées le même signe, sans cela toutes les Abscisses, quoiqu'égales, ne seroient pas la même, puisqu'elles ne seroient pas toutes posées de même côté par rapport à l'Origine de l'Axe.

L'Abscisse auroit pû être Ordonnée, & l'Ordonnée Abscisse, aussi les Géometres appellent-ils *Coordonnées* ces deux lignes prises ensemble, & il est arbitraire de donner à l'une ou à l'autre l'une des deux dénominations. Par conséquent une Abscisse, qui comme on l'a vû, ne sera pas multiple parce qu'elle portera une Ordonnée multiple, le sera dans le cas où elle eût été multiple, si on l'eût prise pour Ordonnée, car elle n'a rien perdu de sa nature pour avoir reçû un autre nom. Ainsi lorsqu'une Abscisse est telle qu'étant prise pour Ordonnée elle eût été Tangente simple ou multiple de la Courbe, elle est Abscisse ou 2 fois ou un plus grand nombre de fois quelconque. Or on prend une Abscisse pour Ordonnée, lorsque par le point de la Courbe où se termine l'Ordonnée supposée on tire une droite parallele à l'axe, car cette parallele, qui a la même position que l'Abscisse, en a les propriétés, & représente parfaitement l'Abscisse.

Non seulement une droite est susceptible de l'idée de multiplicité selon les sens que nous avons expliqués, mais un point en est susceptible aussi, non pas un point qui seroit un Elément de Courbe, car ce seroit une vraye droite, quoiqu'infiniment petite, mais un point mathématique, & absolu. Une Courbe étant décrite sur un plan, autant de fois qu'elle passe par un même point mathématique de ce plan, autant de fois ce point est multiple. Le point d'intersection de 2 branches, de 3 branches, &c. est un point double, triple, &c.

Un point d'attouchement, un point d'infléxion quelconques, ne sont point des points multiples, puisque la Courbe ne passe point plusieurs fois par un même point du plan, & qu'au contraire elle s'étend toûjours d'un point à un autre

contigu. Mais par la même raiſon un point de rebrouſſement ſimple eſt un point double, car on conçoit naturellement que la Courbe arrivée au dernier point de ſon cours direct repart de ce même point pour commencer ſon cours rebrouſſant. Il eſt vrai que ſelon l'idée que nous avons priſe des Rebrouſſements, & de toute la formation des Courbes, ce point n'eſt pas mathématique, ce ſont deux droites infiniment petites exactement poſées l'une ſur l'autre, & c'eſt par une étendüe infiniment petite du plan que la Courbe paſſe deux fois. Mais pourvû, ce qu'il faut bien obſerver, que l'on n'ait point d'égard à la poſition de cette petite étendüe par rapport à quelque autre droite, elle ne ſera plus qu'un point mathématique.

Il y a une autre eſpece de points beaucop plus ſinguliére. Ces Ovales conjuguées, dont nous avons parlé, deviennent quelquefois infiniment petites, l'Equation de la Courbe permet qu'on égale à Zéro, ou qu'on anéantiſſe les grandeurs dont elles dépendent, elles ſont alors des points qui ne tiennent à aucune des parties de la Courbe, des points abſolument inviſibles aux yeux, ſi ce n'eſt aux yeux Géometres; mais quelle ſorte de points ſeront elles? Si je veux concevoir un Cercle infiniment petit, je conçois ſon diametre infiniment petit du 1er ordre, ſa circonférence de ce même ordre, & un peu plus que triple, il n'y a point là de point multiple, ni rien qui y reſſemble.

Mais je puis concevoir la choſe tout autrement. L'Ovale conjugée ou le Cercle, car cela revient au même, n'avoit que ſa place déterminée ſur le plan de la Courbe, mais non aucune poſition par rapport à un Axe, ce Cercle n'étoit ni parallele, ni perpendiculaire, ni oblique à un Axe, mais tout cela à la fois dans ſes différentes parties, & parce qu'il avoit toutes les poſitions, il n'en avoit aucune. Je ne dois donc le concevoir réduit à aucune grandeur infiniment petite d'aucun ordre, mais au ſeul point mathématique, qui étoit ſon centre. D'un autre côté il faut que ce Cercle ſi réduit conſerve quelque trace de ce qu'il étoit, mais la moindre qu'il

On sous-entend assés que les ... une moindre qu'en
&c. ou qui auront 2, 3, &c. ... qui se coupoient à
bien que les Ordonnées se m ... squ'à n'avoir plus
Abscisses, quoiqu'égales, ne ... s deux diametres
ne seroient pas toutes po ... Cercle, & com-
l'Origine de l'Axe. ... de deux lignes
L'Abscisse auroit p ... vident que
cisse, aussi les Géom ... fermée q
lignes prises ensemb
à l'autre l'une des ... ne ser
Abscisse, qui c ... p
qu'elle porter ... c
où elle eût
car elle n'
nom. A ... ont au
Ordon ... ales, mais parce
Cour ... cessairement un point
bre ... & par conséquent le point
O ... Bragelongne est le premier qui
... ces sortes de points.

... devenües infiniment petites les premié-
... points qui sont sur le plan de la Courbe, mais
... tenir à aucune de ses branches, sans faire partie
... un de ses contours; les secondes sont des points qui font partie de quelqu'un de ses contours, de quelqu'une de ses branches, mais sans paroître en faire autrement partie que tous leurs autres points. Des premiéres proviennent des points multiples absolument invisibles aux yeux, & des secondes des points multiples dont la multiplicité n'est qu'en partie invisible.

Les points multiples de la 1re espece, qui n'appartiennent à aucune partie de la Courbe, lui appartiennent pourtant réellement, & de telle sorte qu'ils ont leurs Abscisses & leurs Ordonnées, à plus forte raison ceux de la 2de espece. De plus une droite tirée par quelqu'un de ces points est censée avoir rencontré la Courbe dans le nombre de points désigné par la

la multiplicité du point mu[illegible] ont des points mul-
contrer que dans le nombr[illegible] recherche, qui ne
de la Courbe, ce qui marq[illegible] Calcul.
tiellement partie. Cela se[illegible] est de la con-
s points multiples d'Int[illegible] ent jeu de
[illegible]ra de le faire voir [illegible]

[illegible] nément
[illegible]oite qui a pa[illegible] née à
s'agit en [illegible]
[illegible]udra. [illegible]
[illegible]eut [illegible]

[illegible]es, ils n[illegible]
, où il est clair qu'il ne p[illegible]
[illegible]ovenu d'une Ovale conjuguée. La droite [illegible]
par ce point ne peut être que Sécante en un autre.

Dans le 4me ordre il ne peut y avoir de point plus que triple, car il doit rester à la droite qui y auroit passé encore un point de la Courbe où elle seroit Sécante. Puisque nous ne parlons ici que de points multiples provenus d'Ovales, celui-ci viendra d'une Ovale adhérente. Sans doute il peut y avoir dans cet ordre des points doubles. La droite qui passera par un de ces points, peut encore être Sécante de la Courbe en 2 points, ou Tangente en 1, elle peut même passer encore par un autre point double, après quoi elle ne pourra plus du tout rencontrer la Courbe. Il peut donc y avoir au moins deux points doubles dans une Courbe de cet ordre, car ce que nous venons de dire ne prouve pas qu'il ne puisse y en avoir trois, qui ne pourroient être tous trois sur une même droite.

La multiplicité des points provenus d'Ovales peut augmenter par leur complication avec d'autres points multiples, qui seront provenus d'Interfections ou de Rebroussements. Un point double provenu d'une Ovale conjuguée ne peut

se puisse, & je ne puis lui en imaginer une moindre qu'en concevant que deux de ces diametres, qui se coupoient à angles droits, si l'on veut, ont décrû jusqu'à n'avoir plus que le point central où ils se coupoient. Ces deux diametres conservent au Cercle l'idée de ce qu'il a été Cercle, & comme ils ne sont plus que le point d'intersection de deux lignes, c'est un point mathématique double. Il est évident que ce sera la même chose pour une Ovale, ou Courbe fermée quelconque.

En effet, si ce point là n'étoit pas double, il ne seroit pas triple, car pourquoi triple plûtôt que quadruple? pourquoi quadruple plûtôt que quintuple, &c.? Il seroit donc multiple d'une multiplicité infinie, ce qui est absurde.

Les Ovales adhérentes peuvent aussi-bien que les conjuguées devenir infiniment petites. Alors elles sont aussi des points doubles, parce qu'elles étoient Ovales, mais parce qu'elles étoient adhérentes il reste nécessairement un point de la Courbe pour l'adhérence, & par conséquent le point total est triple. M. l'Abbé de Bragelongne est le premier qui ait découvert & examiné ces sortes de points.

Ainsi des Ovales devenües infiniment petites les premiéres sont des points qui sont sur le plan de la Courbe, mais sans appartenir à aucune de ses branches, sans faire partie d'aucun de ses contours; les secondes sont des points qui font partie de quelqu'un de ses contours, de quelqu'une de ses branches, mais sans paroître en faire autrement partie que tous leurs autres points. Des premiéres proviennent des points multiples absolument invisibles aux yeux, & des secondes des points multiples dont la multiplicité n'est qu'en partie invisible.

Les points multiples de la 1re espece, qui n'appartiennent à aucune partie de la Courbe, lui appartiennent pourtant réellement, & de telle sorte qu'ils ont leurs Abscisses & leurs Ordonnées, à plus forte raison ceux de la 2de espece. De plus une droite tirée par quelqu'un de ces points est censée avoir rencontré la Courbe dans le nombre de points désigné par

la

la multiplicité du point multiple, & elle ne peut plus la rencontrer que dans le nombre de points permis par l'Equation de la Courbe, ce qui marque bien combien ils en font essentiellement partie. Cela sera vrai encore à plus forte raison des points multiples d'Interſection ou de Rebrouſſement, & il ſuffira de le faire voir des points multiples provenus des Ovales.

Une droite qui a paſſé par un point mathématique, car ceux dont il s'agit en ſont, peut encore paſſer par tel autre point qu'on voudra. Ainſi celle qui a paſſé par un point double inviſible peut encore couper la Courbe au moins en un point ſimple, ce qui en fait trois, & par conſéquent une Section Conique ne pouvant être rencontrée par une droite qu'en 2 points, il ne peut y avoir de points doubles dans ce 2^{d} ordre des Lignes, ils ne peuvent commencer à paroître que dans le 3me, où il eſt clair qu'il ne peut y avoir que celui qui ſera provenu d'une Ovale conjuguée. La droite qui aura paſſé par ce point ne peut être que Sécante en un autre.

Dans le 4me ordre il ne peut y avoir de point plus que triple, car il doit reſter à la droite qui y auroit paſſé encore un point de la Courbe où elle ſeroit Sécante. Puiſque nous ne parlons ici que de points multiples provenus d'Ovales, celui-ci viendra d'une Ovale adhérente. Sans doute il peut y avoir dans cet ordre des points doubles. La droite qui paſſera par un de ces points, peut encore être Sécante de la Courbe en 2 points, ou Tangente en 1, elle peut même paſſer encore par un autre point double, après quoi elle ne pourra plus du tout rencontrer la Courbe. Il peut donc y avoir au moins deux points doubles dans une Courbe de cet ordre; car ce que nous venons de dire ne prouve pas qu'il ne puiſſe y en avoir trois, qui ne pourroient être tous trois ſur une même droite.

La multiplicité des points provenus d'Ovales peut augmenter par leur complication avec d'autres points multiples, qui ſeront provenus d'Interſections ou de Rebrouſſements. Un point double provenu d'une Ovale conjuguée ne peut

par ce moyen devenir plus multiple, parce que l'Ovale génératrice, pour ainsi dire, ayant été détachée de tout le reste de la Courbe, rien de tout ce qui forme cette Courbe ne passera par ce point.

Mais un point triple provenu d'une Ovale adhérente peut devenir plus que triple dans un ordre supérieur au 4me, parce que l'Ovale adhérente l'aura été à plus d'une branche de la Courbe, &, si l'on veut, à un point de Rebroussement, même multiple.

Les points multiples provenus d'Ovales ont une place déterminée sur le plan de la Courbe, & par conséquent une Abscisse & une Ordonnée, qui font chacune leur fonction autant de fois que le point est multiple, 2 fois si le point est provenu d'une Ovale conjuguée, 3 fois s'il l'est d'une Ovale adhérente, ce qui n'empêche pas que dans ce 2^{d} cas le point ne puisse encore être multiple d'ailleurs, comme il vient d'être dit.

Mais il faut se souvenir que ces points, précisément en tant que provenus d'Ovales, sont des points mathématiques, qui n'ont aucune position, & par conséquent on ne peut dire que l'Ordonnée d'un point double lui soit parallele, ou perpendiculaire, ni pareillement son Abscisse, ou la parallele à l'axe. Elles ne peuvent toutes les deux être traitées que de Sécantes en ces points, & jamais de Tangentes. Si le point est triple, l'Ordonnée ou l'Abscisse y pourront être Tangentes seulement parce qu'elles le seront à la branche qui passe par ce point, & le rend triple ; on jugera assés par là des points qui seroient plus que triples.

Il est évident que puisque ces points sont multiples, leurs Abscisses & leurs Ordonnées le sont aussi, & de la même multiplicité.

Toutes ces idées fondamentales, & en quelque sorte Métaphisiques, étant établies, il faut voir maintenant comment le Calcul géometrique s'y prend à démêler dans les Courbes du 4me ordre, dont il s'agit ici, les affections, qui peuvent naître de ces principes. Comme M. l'Abbé de Bragelongne ne traite

encore entre ces Courbes que celles qui ont des points multiples, c'est là que doit tendre toute nôtre recherche, qui ne sera elle-même qu'une espece de Théorie du Calcul.

L'Equation de la Courbe étant donnée, c'est de la combinaison des Abscisses & des Ordonnées, du différent jeu de cette combinaison, que l'on doit tout tirer.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée est communément simple, alors l'Ordonnée & la paralléle à l'axe terminée à cette Ordonnée sont Sécantes de la Courbe.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée peut être multiple, ou avoir plusieurs valeurs. Si toutes ces valeurs sont inégales, elle sera Sécante de la Courbe en autant de points; si elles sont égales, elle sera ou simple Tangente, ce qui la rendra double, ou Tangente à un point d'infléxion quelconque, ce qui la rendra multiple selon la multiplicité de ce point, triple pour une infléxion simple & visible, quadruple pour l'infléxion invisible, &c. S'il y a des valeurs inégales, & d'autres égales, il est aisé de voir ce qui en arrivera.

L'Abscisse multiple ne peut avoir que des valeurs égales; car ce n'est jamais qu'une même Abscisse que l'on considere, prise sur une certaine étenduë de l'axe.

L'Ordonnée étant simple, l'Abscisse peut être multiple, & alors l'Ordonnée n'est Sécante de la Courbe qu'en un point, & la paralléle à l'axe en est une Tangente autant de fois multiple que l'Abscisse a de valeurs, c'est-à-dire, simple Tangente, ou Tangente à un point d'infléxion quelconque, car il ne peut pas y avoir là un point de rebroussement, qui empêcheroit l'Ordonnée d'être simple selon la supposition.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée sont doubles, l'Ordonnée se termine à un point double, qui sera ou un point d'intersection de deux branches, ou un point de rebroussement; ou un point provenu d'une Ovale conjuguée. L'Abscisse est double dans ces cas, & ne l'est avec l'Ordonnée qu'en ces cas.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée sont triples, l'Ordonnée se terminera à un point triple qui sera ou un point d'intersection

de trois branches, ou un point de double rebrouſſement; ou un point provenu d'une Ovale adhérente.

En général l'égalité de multiplicité de l'Abſciſſe & de l'Ordonnée ſignifiera toûjours ces trois cas indéterminément, c'eſt-à-dire, qu'il y aura un point multiple de l'une des trois eſpeces.

Si l'Abſciſſe & l'Ordonnée toutes deux multiples ne le ſont pas également, le cas des trois points multiples indéterminément marqués, qui étoit *pur*, & ne ſignifioit rien de plus, devient *mixte*, & ſignifie qu'outre un point multiple, il y a là un attouchement ſimple ou multiple. Cet attouchement appartient à celle des deux grandeurs, Abſciſſe, ou Ordonnée, dont la multiplicité excede l'autre. Ainſi ſi l'Abſciſſe eſt double, & l'Ordonnée triple, il y a là un point double, parce que l'Abſciſſe & l'Ordonnée ſont doubles toutes deux, mais parce que l'Ordonnée a un degré de multiplicité de plus, il faut qu'en ſe terminant à ce même point double, elle ſoit Tangente d'une branche de la Courbe. Si c'étoit l'Abſciſſe qui eût cet excès de multiplicité, ce ſeroit la parallele à l'axe qui ſeroit Tangente. Si l'excès de multiplicité eſt de 2 degrés, la Tangente le ſera à un point d'infléxion, &c.

Dans le 4me ordre des Lignes où un point multiple ne peut être plus que triple, & l'Abſciſſe ou l'Ordonnée plus que quadruple, il eſt facile de voir ce qui réſultera des différentes combinaiſons de l'une & de l'autre. Le cas le plus compliqué ſera celui de l'Abſciſſe triple, & de l'Ordonnée quadruple. Il y aura là un point triple, & l'Ordonnée qui s'y terminera ſera Tangente d'une branche. On pourroit prendre pour un cas auſſi compliqué celui de l'Abſciſſe double, & de l'Ordonnée quadruple, parce que le point double ſera accompagné d'une infléxion ordinaire & viſible.

Les points multiples, que nous trouvons dans toute cette recherche, demeurent encore indéterminés entre trois eſpeces, & il faut enſuite déterminer à laquelle ils appartiennent. Juſqu'ici le Calcul de l'Algebre commune a opéré, & a ſuffi.

L'Equation de la Courbe contenoit le rapport général & invariable des Abſciſſes & des Ordonnées exprimées par des grandeurs indéterminées & variables, on a déterminé une Abſciſſe arbitrairement, quoique le plus ſouvent il vaille mieux y apporter un certain choix, & en mettant cette grandeur connüe dans l'Equation de la Courbe à la place de l'Indéterminée ou Inconnüe qui repréſentoit les Abſciſſes, on a une nouvelle Equation, où il ne reſte que l'Indéterminée ou Inconnüe des Ordonnées, qui répondent à l'Abſciſſe ſuppoſée. Ces deux Equations ont chacune autant de racines, ou valeurs, ſoit réelles, ſoit imaginaires, qu'il y a d'unités dans leur plus haut Expoſant, & c'eſt là ce qui donne la multiplicité des Abſciſſes & des Ordonnées, que l'on n'a plus qu'à comparer, & dont nous avons fait voir les conſéquences. Quand on eſt arrivé par-là à reconnoître qu'il y a des points multiples de l'une des trois eſpeces, le Calcul Algébrique ordinaire qui a donné les valeurs égales, tant de l'Abſciſſe que de l'Ordonnée, ne va pas plus loin, mais parce que malgré cette égalité, qui juſque-là confond les trois eſpeces, les Tangentes ou Soutangentes des différents points multiples ſont différentes, il faut, pour lever l'indétermination, prendre le Calcul des Tangentes, qui eſt différentiel, & tranſcendant.

Quand le point multiple eſt formé par l'interſection de pluſieurs branches, autant qu'il y a de branches, autant il y a de Tangentes à la Courbe en ce même point qui ſont inégales, ou s'il y en a d'égales, affectées de différents Signes.

Quand le point eſt un point de rebrouſſement, toutes les Tangentes ſont égales.

Quand le point eſt provenu d'une Ovale conjuguée, il a deux Tangentes égales, mais imaginaires, égales parce qu'il eſt double, imaginaires parce que c'eſt un point mathématique, qui n'a point de poſition, & par conſéquent point de Tangente, qui détermine toûjours une poſition. Si le point eſt provenu d'une Ovale adhérente, il a deux Tangentes imaginaires, & une réelle à cauſe de la branche à

laquelle il eſt adhérent. C'eſt proprement la Tangente de cette branche. On voit combien cela s'accorde avec un principe d'Algebre, que les racines imaginaires vont toûjours deux à deux.

Voilà donc les trois eſpeces de points multiples bien diſtinguées pour le Calcul. Comme la Soutangente d'un point ſimple d'une Courbe ſe trouve par une 1re Différentiation de l'Abſciſſe & de l'Ordonnée, ou, ce qui eſt le même, par le rapport de l'Infiniment petit de l'Abſciſſe à celui de l'Ordonnée, la Soutangente d'un point double ſe trouvera par une 2de Différentiation, celle d'un point triple par une 3me, &c. & l'Equation qui vient de la Différentiation convenable à la multiplicité de chaque point, renferme toutes les valeurs réelles ou imaginaires des Soutangentes, qui détermineront l'eſpece de chacun.

M. l'Abbé de Bragelongne applique toute ſa Théorie des points doubles à un grand nombre de Lignes du 4me ordre, qui ont été preſque toutes inconnües juſqu'à preſent. Il finit par un Théoreme curieux. Une ligne du 3me ordre ne peut avoir qu'un point double, une ligne du 4me n'en peut avoir qu'un triple, & en ce cas elle n'en aura point de double, mais une autre ligne du même ordre, qui n'aura point de point triple, pourra en avoir un ou pluſieurs doubles. Si une ligne du 5me ordre, qui pourroit avoir un point quadruple, ne l'a pas, elle en pourra avoir de doubles, & en plus grand nombre, que ſi elle n'étoit que du 4me ordre, & ainſi de ſuite. Il s'agit de ſçavoir ſeulement pour les points doubles, qui ſe trouveront dans tous les ordres, combien il s'en trouvera au plus dans chacun. M. l'Abbé de Bragelongne démontre que le nombre des points doubles étant 1 pour le 3me ordre, il ſera 3 pour le 4me, 6 pour le 5me, 10 pour le 6me, 15 pour le 7me, & toûjours ainſi ſelon la ſuite des Nombres Triangulaires. Le fait eſt bien prouvé, mais quel rapport ces Nombres Triangulaires ont-ils, plûtôt qu'une infinité d'autres, aux points doubles des différents ordres de Courbes? on trouve aſſés ſouvent en Géométrie de ces ſortes

de marches reglées, sans qu'on apperçoive la nécessité précise de leur regle particuliére. Cela vient en général de ce qu'on en a toûjours mis quelqu'une dans le sujet que l'on considere, on la connoît puisqu'on l'a établie soi-même, mais celle-là en produit d'autres imprévûës, qui y étoient renfermées sans que nous le sçussions, & sans que nous sçachions même comment elles y étoient, après les en avoir vû sortir.

SUR LES COURBES TAUTOCRONES.

LA Cycloïde est fort fameuse chés les Géometres, principalement par son isocronisme. On sçait que cette Courbe étant posée verticalement & renversée de sorte que ce qui étoit son sommet soit son point le plus bas, un Corps qui tombera le long de sa concavité jusqu'à ce sommet, tombera toûjours en des temps égaux, soit qu'il ait commencé à tomber d'un point plus ou moins élevé. Cette propriété suppose que le corps tombe dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne lui fasse aucune résistance, & comme l'Air n'en fait qu'une insensible, du moins dans des chûtes de peu de hauteur, on n'a point eu besoin pour la pratique de chercher d'autres Courbes qui rendissent égaux les temps des chûtes inégales. V. les M. p. 78.

Mais ce qui ne seroit pas nécessaire pour la pratique l'est pour la Théorie, sur-tout pour celle qui cherche des difficultés à vaincre, & M. Bernoulli en a trouvé une occasion heureuse dans l'entreprise d'étendre l'isocronisme, ou pour nous servir comme lui d'une expression équivalente, le *tautocronisme* de la Cycloïde à d'autres Courbes parcouruës dans des Milieux résistants. Il ne les suppose résistants que selon les quarrés de la vitesse du Corps tombant, hipothése la plus vrai-semblable, la plus communément reçûë, & peut-être la seule, qui rende possible la solution du Probleme, tant il est difficile. Il ne tiendra qu'aux Géometres d'éprouver combien

il l'eſt encore dans cette hipotheſe-là même, & il faudra être habile pour le bien ſentir. Cette raiſon nous empêche abſolument de pouvoir donner aucune idée des fineſſes & des ſubtilités du Calcul de M. Bernoulli, & nous ſommes obligés de nous contenter de quelques vûës générales, & plus communes.

Un axe vertical, qui ſe termine au point le plus bas, ou ſommet de la Cycloïde renverſée étant poſé, & diviſé en une infinité de parties infiniment petites égales, d'où partent les Ordonnées de la Cycloïde, j'appelle *inſtants* les temps infiniment petits pendant leſquels ſont parcourus chacun des petits côtés de la Courbe, correſpondants à une diviſion de l'axe. A la fin de chaque inſtant le Corps tombant a une certaine vîteſſe, toûjours plus grande d'inſtant en inſtant, & la même que s'il fût tombé juſque-là le long de la ligne droite verticale, car il ne tire l'accélération de ſa vîteſſe que de ce qu'il y a de vertical dans ſon mouvement, & nullement de ce qu'il y a d'horiſontal. Quoique la vîteſſe par laquelle il parcourt pendant chaque inſtant un petit côté de la Cycloïde ſoit la même que celle par laquelle il eût parcouru la partie droite verticale correſpondante, cela n'empêche pas que l'inſtant par la Cycloïde ne ſoit plus long, parce que tous les petits côtés de la Cycloïde étant inclinés à l'Horiſon, excepté le premier & plus élevé, ils ſont plus grands que les petites droites verticales correſpondantes, & ne peuvent être parcourus qu'en plus de temps. Si dans une 1re chûte le corps eſt tombé du point le plus élevé de la Cycloïde, & que dans une 2de chûte il ne ſoit tombé que de ſon point du milieu, j'entends par-là celui qui répond au point du milieu de l'axe vertical, il eſt viſible que la ſomme des inſtants de la 1re chûte eſt deux fois plus forte par le nombre que celle des inſtants de la 2de, & que de ce chef les temps totaux des deux chûtes ſont bien éloignés de l'égalité; mais les inſtants de la 2de chûte ont été plus longs par deux raiſons, 1° parce que cette chûte n'ayant pas commencé de ſi haut, la vîteſſe n'y a jamais été ſi grande que dans la 1re, 2° parce que les côtés de

de la Courbe ont été plus inclinés dans sa 2[de] moitié. Il est donc possible que les deux sommes d'instants malgré leur premiére inégalité se retrouvent égales, & ces deux chûtes seront tautocrones. Mais afin que la Courbe porte ce nom, il faut qu'elles le soient toutes de quelque point qu'elles commencent pour aller se terminer au point le plus bas.

Alors comme il y a toûjours un certain nombre de côtés de la Courbe communs à une chûte quelconque & à une plus basse, il faut que ces côtés communs, les seuls qui seront parcourus par la chûte basse, soient de telle grandeur qu'ils allongent les instants de la quantité nécessaire, & que quand dans la chûte élevée ils seront parcourus après des côtés supérieurs, & par conséquent avec plus de vîtesse, ils n'allongent plus les instants qu'autant qu'il faudra. Or leur grandeur dépend de leur position par rapport à l'Horison, & le tout ensemble de leur position mutuelle ou respective, qui est ce qui fait la nature ou l'essence de la Courbe. Voilà d'où naît la Cycloïde dans un milieu non résistant, seule Courbe tautocrone connüe jusqu'ici.

Mais si l'on considére la résistance du Milieu, uniforme en elle-même, parce que le Milieu sera également dense en toutes ses parties, & cependant croissante parce que la vîtesse du Corps, qui pénétre le Milieu, croît toûjours, & croissante selon les quarrés de cette vîtesse, alors il faut faire de nouvelles considérations pour trouver une Courbe tautocrone. La résistance allonge le temps total de la chûte, & tous les instants qui le composent, puisqu'elle retranche toûjours quelque portion de la vîtesse que produisoit ce qu'il y avoit de vertical dans la chûte de quelque instant. Ce ne sont point les quarrés de la vîtesse primitive, produite par le vertical de la chûte, ce sont les quarrés de la vîtesse diminuée de chaque instant, ausquels la résistance se proportionne. Or cette vîtesse diminuée l'est d'autant plus que la force absolüe de la résistance est plus grande, & au contraire; & par conséquent les instants sont allongés selon une certaine raison, dans laquelle doit entrer, outre le quarré de

chaque vitesse, la force absoluë de la résistance du Milieu. Cette force étant différente pour chaque Milieu, le temps total de la chûte & les instants seront donc aussi différemment allongés, & comme les côtés d'une Tautocrone doivent être, & chacun en particulier & tous par rapport les uns aux autres, posés de la maniére que demande la durée des instants, il y aura dans la seule hipothése de la résistance du Milieu proportionnée aux quarrés de la vitesse croissante, autant de différentes Tautocrones que de différentes résistances absoluës possibles pour différents Milieux, c'est-à-dire, qu'il y aura une infinité de Tautocrones, au lieu que la Cycloïde étoit unique pour le Vuide.

M. Bernoulli comprend toutes les Tautocrones de son hipothese dans une Equation générale, où entrent l'infiniment petit d'un Arc quelconque, celui de l'Abscisse correspondante, & deux Indéterminées constantes, dont l'une est la résistance absoluë du Milieu, & l'autre a rapport au temps total de la chûte, le tout combiné avec l'Arc quelconque, & l'Abscisse.

Si dans cette Equation on suppose la résistance du Milieu nulle, on voit renaître aussi-tôt la Cycloïde. On ne peut pas supposer cette résistance infinie, il n'y auroit point de chûte.

* p. 58. & suiv.
Si on suppose le temps total infini, car on ne peut pas le supposer nul, la Tautocrone devient la Tractrice, dont nous avons parlé assés au long en 1711 *. Cette Courbe a une Asimptote, & par conséquent un cours infini, & son point le plus élevé est infiniment éloigné du plus bas. Qu'un Corps, en suivant la concavité de la Tractrice, tombe ou de ce point le plus élevé, ou de celui qui sera, par ex. à la moitié de l'étendüe de la Courbe, ou au tiers, &c. jusqu'au point le plus bas, il tombera toûjours dans le même temps infini, parce qu'à proportion qu'il tombera d'un point moins élevé, & acquerra par conséquent moins de vitesse, la résistance du Milieu diminüera moins aussi son mouvement. Que si le Corps ne tomboit que d'un point de la Courbe finiment éloigné du point le plus bas, sa chûte demanderoit encore

le même temps infini, ce qui est nécessaire pour le Tautocronisme, & paroît cependant un violent paradoxe. Mais on l'expliquera aisément, en prenant les idées exposées dans la *Géométrie de l'Infini* sur les Courbes qui ont des Asimptotes. La portion finie de la Tractrice que le Corps auroit à parcourir dans le cas présent, seroit nécessairement selon ces idées presque absolument parallele à l'Horison, & telle que la pesanteur du Corps ne pourroit lui en faire parcourir une partie infiniment petite qu'en un temps fini, & par conséquent le tout en un temps infini, que la position particuliére des petits côtés de la Courbe rendroit égal aux autres temps infinis déja trouvés.

Il est bon de remarquer que comme la Cycloïde est la seule Tautocrone du Vuide, la Tractrice est la seule Tautocrone du temps infini, & la seule par conséquent d'une étendüe infinie.

Quand un Corps tombe dans un Milieu résistant, il reçoit des accroissements continuels de vîtesse par la continuation de sa chûte selon ce qu'elle a de vertical, & en même temps des décroissements continuels à cette même vîtesse par la résistance du Milieu. Les accroissements sont toûjours égaux à chaque instant selon le sistême de la Pesanteur, & les décroissements au contraire toûjours plus grands, à cause que la résistance croît dans la raison des quarrés des vîtesses. Les accroissements plus grands d'abord que les décroissements, parce que les quarrés de la vîtesse sont fort petits, ne sont donc plus grands que de moins en moins, ce qui amene nécessairement les uns & les autres à l'égalité, après quoi les décroissements sont les plus grands. Il y aura dans la Courbe parcouruë un point de la plus grande vîtesse du Corps.

Qu'après ce point le Corps continuë de tomber jusqu'au point le plus bas de cette Courbe, cela n'a rien qui la doive empêcher d'être tautocrone; ce point de la plus grande vîtesse baissera toûjours à mesure que le Corps tombera d'une moindre hauteur jusqu'au point le plus bas qui est fixe, & la vîtesse,

plus diminüée par la résistance du Milieu qu'augmentée par l'action continuelle de la pesanteur, sera dans le même cas que si elle n'étoit diminüée que par la position des côtés de la Courbe, ce qui non seulement n'est pas contraire au tautocronisme, mais y est nécessaire.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'une partie du Probleme résolu par M. Bernoulli, les descentes tautocrones d'un Corps; il faut de plus pour le parfait Tautocronisme que ce Corps arrivé au point le plus bas remonte en vertu de sa vîtesse jusqu'à une certaine hauteur par une seconde branche de la Courbe, & cela en un temps égal à celui d'une descente quelconque. L'Equation générale de M. Bernoulli renferme ces deux conditions ensemble au moyen d'un simple changement du Signe de quelques termes.

Dans la Cycloïde le Corps arrivé au point le plus bas avec une vîtesse entiére, & qui n'a essuyé aucune résistance, remonte à la même hauteur d'où il étoit descendu, en un temps égal, & par une seconde branche de la Courbe égale & semblable à la premiére, ce qu'on voit évidemment qui doit être à cause de la parfaite égalité de tout de part & d'autre. Mais il n'en est pas de même dans une Tautocrone, où se trouve un point de la plus grande vîtesse, qui n'est pas, comme dans la Cycloïde, son point le plus bas. Ce Corps ne peut remonter qu'avec cette vîtesse diminüée qu'il a au dernier point ou instant de sa descente, par conséquent il ne peut remonter à une aussi grande hauteur que celle d'où il est descendu, & comme il faut qu'il remonte en un temps égal à celui de la descente, il faut que l'Arc remonté ait par rapport à l'Horison l'obliquité nécessaire pour employer tout ce temps-là, d'où il suit que les deux branches de la Courbe, l'une descendüe, l'autre remontée, ne seront ni égales, ni semblables ; seulement la branche descendüe, prise depuis l'origine de la chûte jusqu'au point de la plus grande vîtesse, sera égale, mais non semblable, à la branche remontée, ainsi que M. Bernoulli le démontre.

Nous avons dit d'après feu M. Varignon en 1708 * & 1709 * qu'un Corps qui tomberoit en ligne droite dans un Milieu dont la résistance suivroit, ou la raison simple des vîtesses, ou celle de leurs quarrés n'acquerroit dans l'un & l'autre cas au bout d'un temps infini qu'une vîtesse finie, mais beaucoup moindre dans le second cas. Si l'on applique cette proposition à la Tractrice qui est la Tautocrone d'un temps infini dans un Milieu résistant selon la raison des quarrés, le Corps qui parcourt la Tractrice aura une vîtesse finie au bout d'un temps & d'un cours infini. Il arrivera en un temps fini au point de sa plus grande vîtesse, car il faudroit que la résistance du Milieu fût infiniment petite ou foible pour ne pouvoir qu'au bout d'un temps infini diminüer plus la vîtesse que la pesanteur ne l'augmente continuellement. Du point de la plus grande vîtesse au point le plus bas, il y aura donc une distance infinie. La Courbe aura une seconde branche égale à la portion de la premiére déterminée par la plus grande vîtesse, & par conséquent finie, & presque entiérement horisontale pour ne pouvoir être parcouruë, ainsi qu'il a été dit, qu'en un temps infini.

* p. 126.
* p. 99.

La Cycloïde & la Tractrice sont les deux Tautocrones extrêmes & les plus opposées. Elles le sont parfaitement sur la position du point de la plus grande vîtesse dans la premiere branche; il est dans la Cycloïde à l'extrémité de cette branche, puisqu'il est le même que le point le plus bas, & dans la Tractrice il est infiniment éloigné du point le plus bas, d'où il suit par analogie que dans toutes les Tautocrones moyennes le point de la plus grande vîtesse ne se confondra jamais avec le point le plus bas, & en sera toûjours à une distance finie.

Il suit encore que puisque la Cycloïde a ses deux branches égales & semblables, & que la Tractrice les a infiniment inégales & dissemblables, les Tautocrones moyennes les auront d'autant moins inégales & dissemblables qu'elles approcheront plus de la Cycloïde, & au contraire. Or elles approcheront d'autant plus de la Cycloïde que les Milieux

seront moins résistants, & d'autant plus de la Tractrice qu'elles auront besoin pour être Tautocrones d'être parcouruës en un temps plus long.

Nous ne disons rien des différents Problemes résolus par M. Bernoulli sur la détermination du point de la plus grande vitesse, sur la comparaison des différents Arcs de la Courbe, sur les constructions, &c. Non-content des difficultés naturelles du sujet, quoique très-embarrassantes, il y en a même fait entrer d'étrangeres. On reconnoîtra par-tout une extrême adresse, soit à éviter des labirinthes de Calcul, soit à se démêler de ceux qui étoient inévitables.

SUR LA COURBE aux approches égales.

V. les M. p. 233.

LEs Courbes Tautocrones sont telles parce que le Corps tombe toûjours en un temps égal, soit qu'il tombe d'un point plus ou moins élevé, & il est visible qu'en ce temps égal il ne s'est pas également approché du point le plus bas de la Courbe, ou, ce qui est le même, de l'Horison, car certainement il s'en est d'autant plus approché qu'il est tombé de plus haut. M. Leibnits imagina de chercher une Courbe telle que le Corps qui la parcourroit, s'approchât toûjours également de l'Horison en un temps égal, par exemple, en une seconde. Il l'appella la Courbe *accessus æquabilis, aux approches égales*. Puisque dans une chûte faite selon une droite verticale, la vîtesse augmenteroit toûjours, & feroit que dans un temps égal le Corps décriroit toûjours une plus grande portion de cette verticale, & par conséquent s'approcheroit davantage de l'Horison, il est nécessaire que la Courbe modere cette augmentation de vîtesse, & se dispose de façon que ce que la chûte aura de vertical soit plus court, & ce qu'elle aura d'horisontal plus long, à mesure qu'elle avancera davantage vers son terme; & cela selon une certaine raison précise, quoique changeante à chaque instant. Mrs Leibnits, Bernoulli

& Varignon, comme nous l'avons dit en 1699*, ont trouvé que cette Courbe étoit une 2de Parabole cubique, posée de manière que son point de rebroussement fût le plus élevé. * p. 68. & suiv.

Mais quoique M. Varignon eût porté selon sa coûtume ce Probleme à une grande universalité, en y mettant de nouvelles conditions, les *approches*, par exemple, inégales en telle raison qu'on voudroit, il étoit demeuré renfermé à un autre égard dans des bornes très-étroites; les chûtes se faisoient toûjours dans le Vuide, ou dans un Milieu non résistant, ou, ce qui revient au même, dans un Milieu dont la résistance fût toûjours uniforme, & indépendante de la vîtesse du Corps.

M. de Maupertuis a elevé ce Probleme à l'universalité qui lui manquoit, on trouvera toûjours une Courbe aux approches égales, selon quelque puissance des vîtesses que les Milieux puissent résister. S'ils ne résistent point, c'est la 2de Parabole cubique déja trouvée, & c'est encore elle s'ils résistent selon la raison simple des vîtesses, mais renversée, c'est-à-dire, s'ils résistent moins en même raison que la vîtesse devient plus grande. Cette hipothese ne paroît guére conforme à la Nature, mais enfin cela est analogue à ce que la Cycloïde, qui est la Tautocrone du Vuide, ou du Milieu non résistant, l'est aussi du Milieu qui ne résisteroit que selon la raison simple directe des vîtesses. Toutes les autres hipotheses de résistance des Milieux donnent des Courbes d'approches égales fort différentes de la Parabole cubique. L'hipothese de la résistance proportionnelle aux quarrés des vîtesses suffiroit seule pour donner à M. de Maupertuis tout le plaisir qu'il a recherché dans des difficultés de Calcul, soit differentiel, soit intégral. Non-seulement il y a de ces Courbes que l'on ne construit, ou dont on ne peut avoir les Abscisses & les Ordonnées que par des quadratures d'autres Courbes, mais encore ces autres Courbes se trouvent être des Exponentielles, c'est-à-dire, transcendantes par rapport à celles qu'on a nommées d'abord transcendantes par rapport aux Courbes algébriques.

CEtte année, M. de Cury, dont nous avons déja parlé en 1728*, a lû à l'Académie un Mémoire qu'elle a approuvé, sur la Courbure des Courbes. *Les Elements de la Géométrie de l'Infini* ont donné pour la détermination de cette Courbure, une méthode géométrique, différente de la méthode ordinaire, qui procede par les Rayons des Developpées, Courbes étrangeres à celles que l'on examine. La nouvelle méthode prend la Courbure des Courbes en elles-mêmes, & la détermine par les Sinus des Angles de Contingence. Mais elle a le défaut d'être bornée aux Courbes dont les Ordonnées sont paralleles, les plus communes de toutes, à la vérité, & de beaucoup les plus communes, mais non pas les seules; il restoit celles dont les Ordonnées sont concourantes en un point. M. de Cury a trouvé le moyen de rendre la méthode de la *Géométrie de l'Infini* absolument générale, & telle que sur les mêmes principes on y trouve la courbure des deux especes de Courbes; elle est pour les Courbes à Ordonnées concourantes, & par un léger changement elle est pour les Courbes à Ordonnées paralleles. Il a donné des exemples de la 1re espece de Courbes, car il y en avoit assés de la 2de dans l'Ouvrage cité, sur la Spirale ordinaire de tous les degrés, & sur la Spirale Parabolique.

* p. 52.

M. Clairaut, frere cadet de celui dont nous avons parlé en 1726* a lû aussi à l'Académie une Méthode qu'il a trouvée pour former tant de Triangles qu'on voudra, avec cette condition, que la somme des quarrés de deux côtés soit double, triple, quadruple, &c. du quarré de la base; & comme ce qui est dit des quarrés convient à toutes les figures semblables, il prend, au lieu de quarrés, des Segments de Cercles semblables, & découvre par-là les quadratures de quelques especes de Lunules. Il rend plus étendüe & plus générale la Méthode de M. de l'Hôpital, pour quarrer quelque

* p. 45.

quelque portion de la Lunule d'Hippocrate de Chio *, & il quarre encore quelques autres portions de la Lunule, par une méthode différente de celles de Mrs Wallis, & Tſchirnhaus. Il a 14 ans, & ce ſeroit bien aſſés qu'il entendît les découvertes de ces grands Géometres, ſans y rien ajoûter, & ſans renchérir ſur eux; mais on a déja vû que la Géométrie eſt extrêmement précoce dans cette Famille.

* V. l'Hiſt. de 1701. p. 79. & ſuiv. 2de Edit.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

Deux Ecrits de M. Nicole ſur quelques Queſtions qui regardent les Jeux. V. les M. p. 45. & 331.

L'Ecrit de M. Mahieu ſur de nouvelles propriétés de l'Hiperbole. V. les M. p. 508.





ASTRONOMIE.

SUR LA COMETE DE M. DCCXXIX ET DE M. DCCXXX.

V. les M. p. 284.
* p. 68. & suiv.

LA Comete dont nous avons parlé en 1729 *, qui n'a fait aucun bruit dans le monde, & n'a été connüe que des Obſervateurs de profeſſion, & apparemment même d'un petit nombre d'entre eux, eſt cependant une des plus remarquables & des plus ſinguliéres dont on ait mémoire, & ſur-tout des mieux conditionnées par rapport à l'établiſſement d'un ſyſtême général de ces grands Phénomenes.

Elle avoit commencé à paroître, ou du moins à être apperçûë le 31 Juillet 1729, nous en avons rendu compte juſqu'au 10 Nov. de la même année, & on l'a vûë juſqu'au 21 Jan. 1730, encore ne la perdit-on qu'à cauſe du mauvais temps, & du clair de Lune, deſorte qu'elle a été viſible près de 6 mois, & auroit pû l'être davantage. Il y a plus de 100 ans qu'il n'a paru de Comete d'une ſi longue durée.

Elle a toûjours été d'Orient en Occident, ou contre la ſuite des Signes depuis ſa premiére apparition juſqu'au 19 ou 20 Oct. après quoi elle a été d'Occident en Orient, c'eſt-à-dire, qu'elle a été rétrograde & puis directe à la maniére des Planetes; & comme ſelon le calcul de M. Caſſini elle avoit dû être en oppoſition avec le Soleil le 8 Août, temps où elle n'étoit pas encore obſervée à Paris, on a dû voir ici ſon mouvement rétrograde diminuer toûjours, ainſi qu'auroit fait celui d'une Planete qui a paſſé l'oppoſition, & c'eſt en effet ce qu'on a vû. Il eſt naturel de ſuppoſer que le temps de ſa premiére rétrogradation, c'eſt-à-dire, de celle qui a précédé l'oppoſition, ait été égal à celui de la ſeconde, & ſur

ce pied-là elle auroit commencé à être rétrogade dans les derniers jours de Mai 1729, & l'auroit été en tout près de 5 mois. C'étoit-là un temps bien suffisant pour son apparition totale, & s'il n'avoit pas été plus long, on auroit jugé qu'elle n'avoit qu'un mouvement d'Orient en Occident, qu'elle alloit donc contre la direction du Tourbillon Cartésien, & que cela étant impossible à la longue, ce Tourbillon n'éxistoit point. Il ne faut donc pas se presser de croire que les Tourbillons soient détruits par les mouvements des Cometes, qui y sont opposés, & il y a au contraire une forte présomption, qu'ils se rétabliront parfaitement par l'explication de M. Cassini, que la Comete de cette année favorise à souhait.

En vertu de la rétrogradation & de la direction, qui a suivi, cette Comete a été vûë dans le même lieu du Ciel en deux temps différents, ce qui est un avantage rare & considérable pour les déterminaisons astronomiques, mais nous ne pouvons que le faire entrevoir.

L'Orbe de la Terre autour du Soleil, quoiqu'il ait un diametre de 66 millions de Lieües, est si petit par rapport à la distance des Fixes, qu'il peut n'être compté que pour un point, & que la Terre, qui lorsqu'elle est à l'extrémité d'un diametre, voit, par exemple, une Fixe au Zénit, l'y verra encore lorsqu'elle sera à l'autre extrémité; s'il y a une différence ou parallaxe, il sera bien difficile de l'appercevoir. Ainsi toutes les lignes, qui de la Terre placée en différents points de son Orbe iront à une même Etoile fixe, seront censées paralleles à cause de la distance presque infinie, & les arcs de l'Orbe compris entre deux paralleles consécutives, ou plûtôt les cordes de ces arcs, seront les distances de ces paralleles entre elles, & les bases de triangles infiniment aigus, dont le sommet seroit infiniment éloigné. Si outre l'Etoile supposée au Zénit la Terre en regarde une autre de différents points de son Orbre, elle la verra encore par des lignes toutes paralleles entre elles, mais inclinées aux premiéres, plus ou moins selon la position des deux Etoiles.

Si un autre Astre qu'une Fixe est vû au même point du Ciel par la Terre placée en deux différents points de son Orbe, ou, ce qui est le même, en deux différents temps, il est à cet égard dans le même cas qu'une Fixe, & il est vû par deux paralleles, mais si cet Astre se meut, comme fait certainement une Comete, il est impossible qu'il soit vû dans les deux temps par les deux paralleles, à moins qu'il ne se soit mû selon la même direction que la Terre, qu'il aura suivie pour se retrouver à son égard dans la même position que s'il eût été fixe. Il n'importe quelle ligne il ait décrite entre les deux paralleles, courbe ou droite, perpendiculaire ou inclinée à ces paralleles, mais enfin pour passer de la premiére à la seconde, il faut puisqu'il s'est mû, qu'il se soit mû du même sens que la Terre, il n'y a que cette condition qui puisse faire l'effet de l'immobilité d'une Fixe. La Comete s'est donc mûe réellement d'Occident en Orient pendant tout l'intervalle compris entre les deux temps, où elle a été vûë au même lieu du Ciel, c'est-à-dire, aussi-bien pendant la rétrogradation que pendant la direction, & par-là M. Cassini amene à la certitude géometrique ce qui n'étoit auparavant que très-probable. C'est la Comete vûë deux fois dans le même lieu du Ciel qui a fondé la démonstration.

Ces deux paralleles, par lesquelles la Comete a été vûë au même lieu en deux observations différentes, ne peuvent déterminer ni quelle route la Comete a tenüe entre elles, ce qui est clair, ni quelle est sa distance à la Terre, car puisqu'elles sont paralleles elles ne font point d'angles, & à quelque distance très-grande qu'on suppose la Comete, ce sera toûjours la même chose. Mais si on prend une 3me observation, où la Comete aura été vûë dans un autre lieu du Ciel, & que du point de l'Orbe de la Terre d'où cette observation aura été faite on tire une ligne à la Comete, cette ligne sera nécessairement inclinée aux deux paralleles, puisque la Comete est vûë dans un autre lieu, & l'inclinaison sera d'autant plus grande, ou l'angle de la nouvelle ligne avec les deux premiéres d'autant plus petit, que la dis-

tance de la Comete à la Terre sera plus grande. Voilà le principe fondamental de la détermination de cette distance, qui demande pourtant encore assés de Géometrie & de calcul. Il faut se servir des distances connües de la Terre au Soleil dans les trois observations, prendre entre les lignes tirées de la Terre à la Comete d'autres lignes proportionnelles aux arcs décrits par la Terre sur son Orbe d'une observation à l'autre, ou aux temps écoulés, &c. Enfin tout cela fait, M. Cassini trouve la Comete entre Mars & Jupiter, comme il l'avoit déja avancé en 1729. Il seroit inutile d'avertir que si nous n'avons supposé ici que trois observations, ce n'a été qu'afin de réduire tout au plus simple, un Astronome qui en a un plus grand nombre ne manque certainement pas de les employer, sur-tout dans des déterminations très-délicates & très-épineuses. M. Cassini croit qu'en posant la distance moyenne de sa Comete au Soleil un peu plus de quatre fois plus grande dans les six mois qu'on l'a apperçûë, que celle de la Terre, il approche presque autant du vrai que l'on ait fait pour la distance d'aucune Planete. On n'a peut-être pas vû jusqu'à présent de Comete dont la distance soit aussi exactement trouvée.

La même méthode, qui fournit la distance par le moyen des trois observations supposées, fournit aussi l'inclinaison, & par conséquent la longueur de la route de la Comete entre les deux paralleles & la 3me ligne inclinée, pourvû que cette route soit une ligne droite, & cette ligne qui se trouve nécessairement divisée en deux parties donne par le rapport de ces parties celui du mouvement de la Comete entre les observations, pourvû que ce mouvement soit uniforme. Mais ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne se trouve dans la réalité; on peut cependant les supposer légitimement toutes deux, & dans une fort petite portion de l'Orbe de la Comete, & dans un temps fort court par rapport à celui de sa révolution entiére. Or on est toûjours, ou bien on peut aisément se mettre dans l'un & l'autre de ces deux cas.

Cette méthode n'est donc bonne que pour trouver le

mouvement de la Comete, qui a répondu à trois obſervations, par ex. peu éloignées. Si l'on en prenoit trois autres peu éloignées entre elles, mais éloignées des premiéres, on trouveroit une autre quantité de mouvement, de même qu'en prenant la Comete dans des points de ſon cours éloignés, on lui trouvera différentes diſtances au Soleil & à la Terre.

Les diſtances de la Comete au Soleil & plus précifément à la Terre, font varier l'apparence de ſon mouvement, une plus grande proximité la rend plus grande, & au contraire, mais les diſtances au Soleil doivent faire varier le mouvement réel comme celui des Planetes, ſi les Cometes ſont des Planetes Solaires, & il ſe trouve dans la Comete dont il s'agit, que la différence de ſon mouvement, vû en deux points éloignés de ſon cours, a été double de la différence de ſa diſtance au Soleil dans ces mêmes points, ainſi qu'on le trouve précifément dans les Planetes les mieux connües. Une moitié de cette différence du mouvement obſervé n'étoit qu'apparente, & dûë à une diſtance, moindre, ſi l'on veut, l'autre moitié étoit réelle, & véritablement cauſée par cette diſtance, parce qu'elle étoit moindre.

Si la Comete dans le temps qu'elle a été viſible a été 4 fois plus éloignée du Soleil que la Terre, & ſi l'on ſuppoſe que dans la Région du Ciel, ou dans la couche du Tourbillon Solaire où elle ſe trouvoit elle ait pris la vîteſſe qui ſelon la Régle de Képler conviendroit à une Planete placée au même lieu, on verra ſans peine que ſa vîteſſe réelle devoit être 2 fois moindre que celle de la Terre, car ces vîteſſes réelles des Planetes ſont en raiſon renverſée des racines quarrées de leurs diſtances au Soleil, or ici la diſtance de la Terre étant 1, celle de la Comete eſt 4, dont la racine eſt 2. Si la Terre qui fait ſur ſon Orbre un degré en 24 heures avoit 2 fois moins de vîteſſe, elle ne feroit que 30', donc la Comete avec cette même vîteſſe employée à parcourir un Orbe 4 fois plus grand que celui de la Terre ne doit faire en 24 heures que le quart de 30', ou 7' 30".

Cependant M. Caſſini par ſes calculs trouve ce même

mouvement de 9′ 40″, ce qui eſt trop différent pour la précision dont l'Aſtronomie eſt aujourd'hui, mais ce qui rectifie & corrige cette différence, c'eſt qu'en ſuppoſant que la Comete parcouroit une Ellipſe, ainſi qu'il eſt néceſſaire, ſi c'étoit une Planete, il ſuit de cette figure qu'au temps de ſa premiére apparition elle avoit un peu paſſé ſon Périhélie & alloit à une de ſes moyennes diſtances, où par conſéquent ſon mouvement, qui eſt alors véritablement le moyen, & réel, eût été moindre que 9′ 40″. En ſuivant l'idée de l'Ellipſe M. Caſſini détermine le mouvement dans l'Aphélie d'un peu moins de 4′, & de tout cela réſulte pour tout l'Orbe le véritable mouvement moyen de 6′.

M. Caſſini n'oſe déterminer abſolument l'eſpece de l'Ellipſe que décrit la Comete, parce qu'il ne juge pas que dans les différentes obſervations ſes diſtances au Soleil, qui ſeroient un fondement néceſſaire, ayent pû être connuës avec une aſſés grande préciſion. Il ne laiſſe pas néantmoins de croire qu'on repréſentera aſſés exactement ſon cours en ſuppoſant que ſa moyenne diſtance au Soleil eſt à celle de la Terre comme 24 à 5. Il ſuit de-là que ſa révolution entiére eſt d'environ 10 années ſelon la Régle de Képler, à laquelle cette Comete ſe trouve merveilleuſement conforme, ce qui eſt & une nouvelle gloire pour la Regle qui ne s'étendoit pas encore juſque-là, & une forte preuve que quelques Cometes tout au moins ſont des Planetes Solaires.

L'inclinaiſon de l'Orbe de cette Comete ſur le plan de l'Ecliptique eſt, ſelon les calculs de M. Caſſini, de plus de 76 degrés, ce qui excéde de beaucoup la plus grande inclinaiſon de toutes les Planetes connües, celle de Mercure, qui n'eſt que de 7, mais il ne ſera pas étonnant qu'une Comete, qui quoique Planete Solaire ſeroit toûjours d'une condition différente des autres, s'en écarte beaucoup à quelques égards, qui ne changeroient rien à leur nature générale. Le Nœud de ſon Orbite avec l'Ecliptique a été entre le 10 & le 11me degré d'Aquarius.

Selon son mouvement & le temps de sa révolution déterminés par M. Cassini, elle a dû se retrouver en opposition avec le Soleil au mois de Sept. 1730, temps le plus favorable pour l'observer, si elle a pû l'être, mais elle ne l'a pû, apparemment parce qu'elle étoit alors trop éloignée de la Terre. Il ne faut pas s'attendre que tout s'accorde si promptement à donner un systême général des Cometes, ni même celui d'aucune Comete en particulier. Des Philosophes trop impatients auroient à revenir sur leurs pas.

SUR UNE OBSERVATION de l'Eclipse de Lune du 8 Août 1729, faite à la Nouvelle Orléans dans la Loüisiane.

L'ECLIPSE totale de Lune du 8 Aoust 1729, dont les observations faites à Paris ont été rapportées dans les Mémoires de cette même année *, fut aussi observée à la Nouvelle Orléans dans la Loüisiane par M. Baron, envoyé dans ce Pays-là par le Roy pour des recherches d'Histoire Naturelle & des observations Astronomiques. Nous rendons particuliérement compte de celle-ci, parce qu'elle servit à décider une difficulté qui s'étoit élevée dans l'Académie.

* p. 344. & 346.

Le P. Laval, dans son voyage de la Loüisiane en 1720, avoit donné par ses observations la différence de Longitude entre Paris & l'Isle Dauphine, située à l'embouchûre de la Riviére de la Mobile, plus petite de 11 degrés que celle de la Carte d'Amérique de M. Delisle, publiée en 1722. Le P. Laval se tenoit sûr de l'exactitude de son observation, & son habileté n'étoit pas contestée, celle de M. Delisle ne l'étoit pas non plus, & il étoit armé d'un grand nombre de raisons très-fortes, qu'il exposa à l'Académie, & ils différoient tous deux à tel point qu'on ne pouvoit les concilier en supposant que l'un ou l'autre seroit tombé dans quelque légere erreur.

Enfin

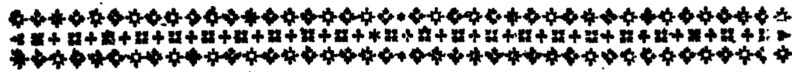
Enfin le doute fut levé par l'Eclipse dont il s'agit. Elle fut vûë à Paris pendant toute sa durée, & à la Nouvelle Orléans vers sa fin seulement, & M. Cassini ayant comparé les temps des Phases observées par lui & par M. Baron, ou s'étant servi de quelques autres observations faites en France, a trouvé qu'il en résultoit entre les deux Lieux une différence de Méridiens assés conforme à celle que M. Delisle avoit posée.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

L'Ecrit de M. Godin sur la solution d'un Probleme, d'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes. V. les M. p. 26.

L'Observation de M. Cassini de l'Eclipse Solaire du 15 Juillet. V. les M. p. 450.





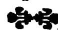
GEOGRAPHIE.

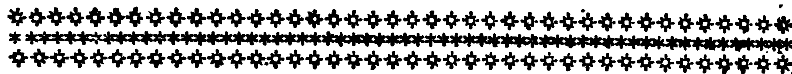
M. BUACHE, employé à travailler au Dépôt des Cartes de la Marine établi en 1721, ayant profité pour l'avancement de la Géographie de tout ce qu'il avoit sous les yeux, apporta à l'Académie une Carte qu'il avoit dressée du Golphe de Méxique & des Isles de l'Amérique. Cette partie du Nouveau Monde est la plus fréquentée par les Navigateurs François, & les erreurs des Cartes en deviennent d'autant plus dangéreuses. Celle de Pieter Goos, dont les Pilotes se servent ordinairement, se trouva par les recherches de M. Buache assés éloigné du vrai. Il rendoit sensible à l'œil par des contours d'une couleur différente combien elle différoit de la nouvelle Carte. Celle-ci différoit même assés considérablement de la Carte du Méxique de feu M. Delisle, mais beaucoup moins de la derniére Edition en une feüille de l'Amérique du même Auteur. M. Buache faisoit gloire d'être Disciple de M. Delisle, mais il avoit eu l'avantage de travailler sur quantité de Mémoires que le Maître n'avoit pas connus. Plus on en a devant soi, plus on peut approcher de la vérité dans les déterminations, mais aussi le travail se multiplie à proportion par le grand nombre d'attentions, de réfléxions, & de combinaisons nécessaires.

V. les M. p. 562.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

Les Remarques de M. de Mairan sur la comparaison de Paris & de Londres.





MÉCHANIQUE.

SUR LES VOÛTES.

M. COUPLET continuë la Théorie des Voûtes, qu'il n'avoit donnée en 1729 *, que dans l'hipothese purement géométrique & réellement fausse, que les Voussoirs fussent parfaitement polis. Ici il reprend la réalité, les Voussoirs s'engrénent par leurs surfaces les uns dans les autres, & il y faut même ajoûter ce qui n'est pas tout-à-fait réel, qu'ils s'engrénent de façon à ne pouvoir céder à aucune force, dont l'effet ne seroit que de faire glisser une surface sur une autre ; car la Géométrie ne peut jamais s'allier à la Méchanique, qu'en y supposant quelque chose de plus absolu & de plus précis que le vrai.

V. les M. p. 117.
* V. l'Hist. de 1729. p. 75. & suiv.

Une Voûte étant construite, dont je suppose pour plus de facilité que l'intrados & l'extrados sont deux demi-Cercles concentriques, si l'on conçoit une ligne tirée du milieu de la Clef sur un pied-droit, & qui représentera l'action ou l'effort de la Voûte sur ce pied-droit, cette ligne en cas qu'elle passe toute entiére dans l'épaisseur de la Voûte fera deux effets différents, selon l'hipothese des Voussoirs polis, ou non polis. Dans l'une & l'autre hipothese, elle est nécessairement inclinée au pied-droit, mais dans la premiére, elle fera glisser le dernier Voussoir par ce qu'elle a d'horisontal dans son effort, & le Voussoir auroit besoin d'une pesanteur infinie pour lui résister, mais dans la 2de hipothese, elle ne peut le faire glisser, & à cet égard la Voûte seroit inébranlable. Que si la ligne n'étoit pas toute entiére dans l'épaisseur de la Voûte, & qu'elle coupât le Quart de Cercle de l'intrados, il est visible que l'action de la Voûte manquant d'appui dans une

partie de ſon étenduë, & tombant, pour ainſi dire, à vuide, la Voûte ſe démentiroit aiſément.

Dans cette 2de hipotheſe où le dernier Vouſſoir ne peut gliſſer ſur le pied-droit, il ne laiſſe pas pour cela de pouvoir être renverſé du dedans de la Voûte en dehors, & c'eſt ce qu'il y a ici de plus important à expliquer.

M. Couplet partage en quatre Vouſſoirs égaux la Voûte demi-circulaire, que nous avons ſuppoſée. Il ſuffit d'en conſidérer une moitié, qui n'a donc que deux Vouſſoirs. Le 1er Vouſſoir ou le ſupérieur tend à tomber par une ligne verticale tirée de ſon centre de gravité. Cette verticale eſt la diagonale d'un parallelogramme, dont deux côtés ſont horiſontaux, & les deux autres inclinés à l'horiſon. Des deux horiſontaux, le ſupérieur ne fait que pouſſer ſelon ſa direction le 1er Vouſſoir de l'autre moitié de la Voûte, qui lui réſiſte avec un effort égal, l'horiſontal inférieur pouſſe le 2^{d} Vouſſoir ſur lequel le 1er eſt poſé, & le pouſſe de façon qu'il tend à le renverſer du dedans de la Voûte en dehors. Les deux côtés inclinés du parallelogramme n'agiſſent que par ce qu'ils ont de vertical, & par-là ne tendent qu'à affermir le 2^{d} Vouſſoir ſur le pied-droit, & par conſéquent le 1er Vouſſoir ne tend à renverſer le 2^{d} qu'autant qu'il a un effort horiſontal plus grand que le vertical. D'un autre côté le 2^{d} Vouſſoir tend à tomber en dedans de la Voûte ſelon une verticale tirée de ſon centre de gravité, & cet effort eſt contraire à celui que le 1er Vouſſoir fait contre lui. Il faut pour l'équilibre, que ces deux efforts oppoſés, ou plûtôt ces deux énergies ſoient égales, je dis *énergies*, parce que tout effort ſe rapportant à un point fixe auquel il ſe dirige, il faut conſidérer la diſtance de la direction de chaque effort à ce point fixe, ou, ce qui eſt le même, ſon bras de levier, toûjours, comme l'on ſçait, d'autant plus avantageux qu'il eſt plus long.

Une Voûte, telle qu'on l'a ſuppoſée, demande donc pour être bien conſtruite, & auſſi durable qu'elle peut l'être, que cet équilibre ſe trouve entre les deux Vouſſoirs de chacune de ſes moitiés. Il ne peut s'y trouver, ſans mettre une certaine

proportion entre les parties de la Voûte ; si elle est d'une certaine ouverture, ou pour parler plus précisément, si le diametre du demi-Cercle de son intrados est d'une certaine grandeur, il faudra qu'elle ait une certaine épaisseur, ou que son intrados & son extrados soient à une certaine distance l'un de l'autre, & comme ce sont ici deux demi-Cercles concentriques, cette distance sera par-tout égale. Il est visible qu'elle sera en même temps la moindre qu'il se puisse, & que la Voûte n'aura que l'épaisseur absolument nécessaire, puisque tout dépendra de l'équilibre des Voussoirs, qui consiste en un point indivisible. M. Couplet cherche par l'Algebre quelle sera cette épaisseur de la Voûte, tout le reste étant connu, & il ne parvient à cette détermination que par des calculs qui, sans tomber dans les grandes difficultés de l'Art, sont cependant fort longs & fort pénibles. Si le diametre de l'intrados est de 28 pieds, l'épaisseur uniforme de la Voûte sera de 1 pied & environ $\frac{1}{2}$.

Mais si on suppose que la Voûte, au lieu d'être formée de deux demi-Cercles concentriques, ou de deux arcs de 180 degrés, le soit de deux arcs de 120 seulement, & que son ouverture ou la corde de l'intrados soit encore de 28 pieds, on trouvera que l'épaisseur uniforme sera beaucoup moindre, & la raison en est que les leviers par lesquels agiront les efforts des Voussoirs inférieurs seront plus longs, & que par conséquent les poids absolus n'auront pas besoin d'être si grands, ce qui emporte une moindre épaisseur de la Voûte.

En effet, si l'on conçoit une Voûte formée de quatre Voussoirs, comme celles que nous considérons ici, mais infiniment platte, de sorte que l'étendüe, tant de l'intrados, que de l'extrados, soit égale à la corde de l'intrados, à 28 pieds, si l'on veut, & si l'on conçoit encore dans les Voussoirs les mêmes efforts que dans les précédents, on verra sans peine que ces efforts rapportés à leurs points fixes, agiront par des bras de levier plus longs qu'en toute autre supposition, & que si on vient à courber l'intrados & l'extrados en augmentant leur longueur, mais en conservant l'ouverture ou corde

de 28 pieds, les bras de leviers s'accourciront toûjours, à mesure que la courbure sera plus grande. De deux Voûtes, qui, sur une même ouverture ou corde de l'intrados, ont l'une 120 degrés, l'autre 180, la premiére est certainement la plus platte, ou la moins courbe, donc c'est celle où les efforts agiront par les plus longs bras de leviers, & où la pesanteur absolüe des Voussoirs devra être la moindre.

Une Voûte peu épaisse en paroîtra plus hardie, & pourra faire plus d'honneur à l'Architecte; cependant M. Couplet avertit que ce n'est pas là une gloire dont il faille trop se picquer. Quand une Voûte est mince, les efforts des Voussoirs agissent trop près de sa surface extérieure, où ils ont nécessairement leurs points d'appui, ils tendent à écraser les arrêtes des Voussoirs, & les écrasent à la fin, d'où s'ensuit la ruine de la Voûte, du moins en partie. Ainsi par rapport à cet inconvénient, & pour éloigner de la surface extérieure les appuis des efforts, & les mettre en lieu de sûreté, il faut une plus grande épaisseur de Voûte que celle que demandoit précisément l'équilibre, & M. Couplet va jusqu'à la tripler.

Avec la Théorie qu'il a en main, il résout quelques autres Problemes, il détermine, par exemple, quelle est dans l'hipothése presente de l'engrénement, la poussée horisontale d'une Voûte, comment on peut diriger vers un point donné de la base du pied-droit l'effort total résultant de tous les efforts particuliers, &c. On voit assés comment tout cela se lie, soit avec ce qui a été dit ici, soit avec les Théories précédentes de M. Couplet, qui paroît s'être mis particuliérement en possession de ces sortes de sujets.

SUR LE MOUVEMENT DES EAUX.

V. les M. p. 536.

CEux qui ont quelque idée de la Méchanique, qui regarde les Eaux, ne seront pas étonnés qu'après ce que nous en avons dit en 1725*, en 1727*, & en 1729* pour exposer les vûës de M. Pitot, nous y revenions encore sur les pas du même Auteur, il y aura toûjours lieu à de

* p. 80. & suiv.
* p. 137. & suiv.
* p. 81. & suiv.

nouveaux éclairciſſements ſur cette matiére, à meſure qu'on s'y appliquera davantage, & on s'y eſt appliqué plus que jamais dans ces derniers temps à cauſe de l'utilité que quelques Méchaniciens en ont attendüe.

On ſçait par expérience qu'un Corps peſant qu'on laiſſe tomber librement dans l'air y parcourt 14 pieds dans la 1.re Seconde de ſa chûte, les eſpaces des Secondes ſuivantes ſe trouveront aiſément par le ſyſtême de Galilée. Tout le monde ſçait que ſelon le même ſyſtême, ſi ce Corps qui par un mouvement accéléré eſt tombé de 14 pieds en une Seconde vient enſuite à ſe mouvoir d'un mouvement uniforme avec cette vîteſſe acquiſe à la fin de ſa chûte, il parcourra en chaque Seconde le double du premier eſpace, c'eſt-à-dire, 28 pieds. On ſçait encore que la vîteſſe acquiſe à la fin d'une chûte eſt proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur d'où le Corps eſt tombé, ou, ce qui eſt le même, s'exprime par cette racine. Donc la racine de 14 exprime la vîteſſe acquiſe à la fin de la 1re Seconde par le Corps dont le mouvement s'eſt toûjours accéléré, & 28 exprime la vîteſſe qu'il auroit pendant chaque Seconde, s'il prenoit un mouvement uniforme dont la vîteſſe fût égale à celle du dernier inſtant de ſa chûte.

Ce rapport de la racine de 14 & de 28 n'eſt pas ſeulement pour une chûte faite en une Seconde, il ſe retrouvera encore dans toutes les autres. Que le Corps ſoit tombé pendant 2 Secondes, il aura parcouru 4 fois 14 pieds, & la racine de cette nouvelle hauteur d'où il ſera tombé eſt 2 fois la racine de 14. D'un autre côté ſa vîteſſe acquiſe à la fin de la nouvelle chûte ſera double de la vîteſſe de la premiére, donc la vîteſſe uniforme, qu'on ſuppoſe toûjours qu'il prendra, ſera 2 fois 28. Or 2 racines de 14, & 2 fois 28 ont le même rapport que la racine de 14 & 28. Il en ira de même ſi le Corps tombe pendant 3 Secondes, pendant 4, &c. Donc la Regle de M. Pitot eſt vraye, que la vîteſſe acquiſe par une chûte faite d'une hauteur quelconque, ou, ce qui eſt le même, la racine de cette hauteur eſt à la vîteſſe

uniforme que le Corps prendroit ensuite, comme la racine de 14 à 28.

De-là il suit évidemment que si une Eau qui est tombée d'une hauteur quelconque vient ensuite à couler horisontalement ou à peu près, & par conséquent d'un mouvement uniforme, le quarré de sa vîtesse uniforme est égal à 56 fois la hauteur d'où elle est tombée. On voit assés tout ce qui se peut tirer de cette formule générale.

On conçoit toûjours que la quantité de l'Eau qui sort, ou plus précisément, tombe d'un Réservoir ou d'un Tuyau, est plus grande en même raison que sa vîtesse, qui dépend de la hauteur d'où elle tombe, est plus grande, & de-là vient que si on oppose à cette eau tombante une surface perpendiculaire à la direction de sa chûte, elle fait sur cette surface une impression; qui est selon le quarré de sa vîtesse. Mais, ce qu'on n'auroit peut-être pas crû, cette proposition reçûë de tous les Méchaniciens n'est vraye qu'avec une modification, tant ces matiéres là sont délicates, & tant en général toutes celles qui sont éxaminées de près le deviennent. Si on prend l'eau à sa sortie du Réservoir ou du Tuyau, & qu'on lui oppose une surface, la proposition sera exactement vraye, & la quantité d'eau d'autant plus grande que sa vîtesse à sa sortie sera plus grande. Si on ne lui oppose la surface que plus loin de l'ouverture par où elle sort, sa vîtesse sera certainement plus grande puisqu'elle se sera toûjours accélérée hors du tuyau, & d'autant plus que l'espace parcouru dans l'air aura été plus grand, cependant il est certain aussi que la quantité d'eau ne sera pas plus grande dans ce 2^d^ cas que dans le 1er, & ce qui le prouve bien évidemment, c'est que si après une certaine quantité d'eau écoulée, on fermoit l'ouverture du tuyau, cette eau qui en seroit sortie accéléreroit toûjours sa vîtesse dans l'air, & n'en seroit pas en plus grande quantité. Que si on supposoit le tuyau prolongé jusqu'au point où se terminoit la chûte de l'eau dans l'air, alors la quantité d'eau redeviendra proportionnelle à sa derniére vîtesse. Quelle est cette bisarrerie apparente? Quelle est, comme

comme dit M. Pitot, la vertu des parois du tuyau pour rendre la quantité d'eau plus grande! Voici le dénoüement qu'on peut donner à cette difficulté.

La quantité d'eau n'est plus grande à raison de la vîtesse que quand l'eau se meut d'un mouvement uniforme, & non quand elle se meut d'un mouvement accéléré, car il est visible que pour lui faire parcourir plus vîte un certain espace dans un certain temps, le mouvement accéléré ne touche point à sa quantité, & la laisse telle qu'elle étoit, au lieu que pour le même effet il est impossible que le mouvement uniforme ne fasse augmenter sa quantité. Or tant que l'eau se meut dans le tuyau, elle a un mouvement uniforme, & tombe comme un cilindre d'eau continu dont les parties supérieures & inférieures n'ont que la même vîtesse, ainsi que nous l'avons dit plus au long en 1703*. Mais quand elle est sortie du tuyau elle a un mouvement accéléré. La conséquence s'offre d'elle-même. Nous pouvons remarquer ici en passant que quoique l'eau ne se meuve dans le tuyau que d'un mouvement uniforme, sa vîtesse à la sortie est la même que si elle y avoit eu un mouvement accéléré, & que celui qu'elle a ensuite en tombant dans l'air est le même que s'il étoit la continuation d'un mouvement accéléré précédent dans le tuyau.

* p. 125. & 126. 2de Edit.

Sur ce fondement M. Pitot ne manque pas d'avertir que quand il sera question de calculer la force d'une eau qui étant sortie d'un réservoir aura parcouru quelque espace dans l'air avant que de choquer une surface, on se trompera, si, comme il pourroit arriver fort naturellement, on suppose sa quantité proportionnelle à la derniére vîtesse acquise par sa chûte, on trouvera la force plus grande qu'elle ne l'est effectivement, & afin que ce calcul soit bon il faut prendre l'eau à sa sortie du réservoir, ou si proche que la différence puisse être négligée.

Après tout cela, M. Pitot applique sa Théorie aux Riviéres. Pour les considérer géométriquement, il faut supposer d'abord des choses qui ne se trouvent pas dans la réalité, que leurs lits

sont formés de trois plans droits & uniformes, l'un inférieur incliné à l'Horiſon, les deux autres verticaux, que l'inclinaiſon de l'inférieur eſt par tout la même, & qu'enfin une Riviére n'en reçoit point d'autre. Voici ce qui s'enſuivroit de ces hipothéſes.

1.° Il ſeroit très-aiſé de trouver quelle ſeroit la derniére vîteſſe de la Riviére, celle avec laquelle elle ſe préſenteroit pour entrer dans la Mer, pourvû que l'on connût la pente ou l'inclinaiſon de ſon lit. Cette vîteſſe ſeroit exprimée par la racine de la hauteur qu'auroit la ſource de la Riviére à l'égard du niveau de la Mer.

2.° Comme la vîteſſe des Riviéres s'accéléreroit toûjours, elles ne demanderoient toûjours qu'un lit moins large, parce que la même quantité d'eau mûe plus vîte peut paſſer dans un temps égal par un eſpace plus étroit, & comme elles ſe font leurs lits elles-mêmes, elles n'en auroient donc que d'ainſi conditionnés.

Ceci n'eſt point contraire à ce qui a été dit ci-deſſus, que le mouvement accéléré n'augmentoit point la quantité d'eau. Il s'agiſſoit d'un mouvement vertical, ici c'eſt un mouvement incliné, dans la compoſition duquel entre l'horiſontal uniforme auſſi-bien que le vertical accéléré. Comme ils ſont liés enſemble, l'horiſontal devient plus grand avec le vertical.

3.° Ce qu'on a dit de la largeur des lits, il faut le dire de la profondeur, elle diminuëroit toûjours.

4.° Les Riviéres ſeroient toûjours plus étroites, moins profondes, & plus rapides à meſure qu'elles avanceroient dans leur cours.

Heureuſement pour nous, c'eſt le contraire dans la nature. Les Riviéres ſeroient très-peu navigables, ſoit à cauſe de leur trop grande rapidité, ſoit à cauſe du peu de profondeur. Les inégalités tant de leurs bords que de leur fond, les frottements qu'elles y ſouffrent, rallentiſſent beaucoup la vîteſſe qu'elles auroient naturellement, & dans l'état, pour ainſi dire, géométrique. Nous avons expliqué dans un aſſés grand détail en 1710* comment elles élargiſſent néceſſairement leur

* p. 159. & ſuiv.

lit, & en même temps le creusent de manière à en rendre le fond presque horisontal.

M. Pitot ajoûte une nouvelle considération, c'est l'entrée des Riviéres dans la Mer. En supposant une surface plane mise entre deux fluides qui la poussent avec des directions contraires, & des vîtesses inégales, il est certain qu'elle entrera avec une certaine vîtesse dans le fluide dont la vîtesse est la moindre, il trouve l'expression algébrique de la vîtesse de la surface; c'est la même que celle d'un fleuve plus rapide qui entreroit dans un plus lent, dont le cours seroit directement opposé. Mais comme la Mer n'a point de cours, il faut supposer nulle la vîtesse moindre du second fleuve, & alors la formule donne précisément pour la vîtesse du fleuve qui entre dans la Mer, la moitié de celle qu'il avoit quand il a rencontré la Mer.

Quand un fleuve est arrivé de sa source au quart de son cours, il a, selon le sistême de Galilée, la moitié de la derniére vîtesse qu'il aura à son embouchûre. Donc, suivant ce qui vient d'être dit, il a la même vîtesse, & au quart de son cours, & à l'extrémité, donc il ne peut pas y avoir grande variation dans tout l'entre-deux, le cours devient assés horisontal, & le mouvement assés uniforme. La Mer est un obstacle qui attend toûjours le fleuve, arrête & suspend ses eaux jusqu'à un certain point, & a une espece d'effet rétroactif qu'il n'est pas difficile de comprendre.

MACHINES OU INVENTIONS APPROUVÉES PAR L'ACADÉMIE EN M. DCCXXX.

I.

UNE espece de Martinet de Forge présenté par M. Compagnot, pesant 300 livres, que deux Hommes élévent assés facilement, par la disposition des pieces de la

Machine, & qui retombe enſuite par ſon propre poids. On a trouvé aſſés ingénieuſe la maniére dont la force des Hommes eſt appliquée, auſſi-bien que celle dont agiſſent deux Etriers de fer, qui engagent & laiſſent échapper alternativement le Martinet. Le reſte a paru conforme à la plûpart des Machines où l'on employe le ſecours des Hommes. On a crû que cette Machine pourroit être utile dans les endroits où il eſt abſolument impoſſible de ſe ſervir du cours des Riviéres, mais non pas pour élever des Eaux, ou faire mouvoir différents Moulins.

II.

Une Machine Arithmétique de M. de Boiſſendeau, qui a aſſûré qu'il ne connoiſſoit point celle de M. Paſcal, & qui étoit effectivement aſſés jeune pour n'en avoir pas encore entendu parler. On a trouvé beaucoup de génie & d'induſtrie dans l'invention & dans l'execution. Les mouvements ſont ſimples & doux. Les opérations arithmétiques ſe font ſans qu'il ſoit beſoin de rien écrire, on pourroit même opérer ſur toutes ſortes de fractions au moyen d'un changement de Roüe aiſé à faire ſur le champ.

III.

Un Flambeau ou Chandelier préſenté par M[elle] du Château, dont la Bobéche eſt garnie d'un fond mobile, qui ſe hauſſe ou ſe baiſſe, en faiſant tourner la tige briſée, qui y eſt adaptée, le tout pour pouſſer à volonté la Chandelle que l'on y enfonce, ſoit pour l'en ôter aiſément, ſoit pour la faire brûler juſqu'au bout. Quoique l'on ait déja appliqué la même Méchanique à des Caniſs, & autres Outils pour un ſemblable uſage, ce Chandelier a paru ſimple, & utile.



E'LOGE
DE M. DE VALINCOURT.

JEAN-BAPTISTE HENRY DU TROUSSET DE VALINCOURT, nâquit le 1 Mars 1653, de Henry du Trousset, & de Marie du Pré, la famille étoit noble & honorable, originaire de S[t] Quentin en Picardie. Ayant perdu son Pere à l'âge de 6 ou 7 ans, il demeura entre les mains d'une Mere propre à remplir seule tous les devoirs de l'éducation de ses Enfants.

Il ne brilla point dans ses Classes, ce Latin & ce Grec qu'on y apprend n'étoient pour lui que des sons étrangers, dont il chargeoit sa mémoire, puisqu'il le falloit; mais ses humanités finies, s'étant trouvé un jour seul à la Campagne avec un Térence pour tout amusement, il le lût d'abord avec assés d'indifférence, & ensuite avec un goût, qui lui fit bien sentir ce que c'étoit que les belles Lettres. Il n'avoit point été picqué de cette vanité si naturelle de surpasser ses compagnons d'étude, sans sçavoir à quoi il étoit bon de les surpasser, mais il fut touché de la valeur réelle & solide, jusque là inconnüe, de ce qu'on avoit proposé à leur émulation. Déja sa raison seule avoit droit de le remüer.

Il répara avec ardeur la nonchalance du temps passé, il se mit à se nourrir avidement de la lecture des bons Auteurs anciens & modernes. Il lui échappa quelques petits ouvrages en Vers, fruits assés ordinaires de la jeunesse de l'Esprit, qui est alors en sa fleur, s'il en doit avoir une. M. de Valincourt ne regardoit pas ses Vers assés sérieusement, pour en faire parade, ni même pour les desavoüer. Il a conservé jusqu'à la fin l'habitude de cette langue, qu'il ne parloit qu'à l'oreille de quelques Amis, & en badinant.

La fameuse Princesse de Cleves ayant paru, ouvrage d'une

espece qui ne peut naître qu'en France, & ne peut même y naître que rarement, M. de Valincourt en donna une Critique en 1678, non pour s'oppoſer à la juſte admiration du Public, mais pour lui apprendre à ne pas admirer juſqu'aux défauts, & pour ſe donner le plaiſir d'entrer dans des diſcuſſions fines & délicates. Ce deſſein intéreſſoit le Cenſeur à faire valoir lui-même, comme il a fait, les beautés, au travers deſquelles il avoit ſçû démêler les imperfections. Au lieu de la bile ordinaire, il répand dans ſon diſcours une gayeté agréable, & peut-être ſeulement pourroit-on croire qu'il va quelquefois juſqu'au ton de l'Ironie, qui, quoique léger, eſt moins reſpectueux pour un Livre d'un ſi rare mérite, que le ton d'une Critique ſérieuſe, & bien placée.

On répondit avec autant d'aigreur & d'amertume, que ſi on avoit eu à défendre une mauvaiſe cauſe. M. de Valincourt ne repliqua point. Les honnêtes gens n'aiment point à s'engager dans ces ſortes de combats, trop deſavantageux pour ceux qui ont les mains liées par de bonnes mœurs, & par les bienſéances, & le Public lui-même, malgré ſa malignité, ſe laſſe bien-tôt de ce ſpectacle. Après avoir vû une ou deux Joûtes, il laiſſe les deux Champions ſe battre ſur l'Aréne ſans témoins.

Un homme de mérite n'eſt pas deſtiné à n'être qu'un Critique, même excellent, c'eſt-à-dire, habile ſeulement à relever des défauts dans les productions d'autrui, impuiſſant à produire de lui-même. Auſſi M. de Valincourt ſe tourna-t-il bien vîte d'un autre côté plus convenable à ſes talents, & à ſon caractere. Il donna en 1681, la *Vie de François de Lorraine Duc de Guiſe*, petit morceau d'Hiſtoire, qui remplit tout ce qu'on demande à un bon Hiſtorien, des recherches qui, quoique faites avec beaucoup de ſoin, & priſes quelquefois dans des ſources éloignées, ne paſſent point les bornes d'une raiſonnable curioſité, une narration bien ſuivie, & animée, qui conduit naturellement le Lecteur, & l'intéreſſe toûjours, un ſtile noble & ſimple, qui tire ſes ornements du fond des choſes, ou les tire d'ailleurs bien ſixement,

nulle partialité pour le Héros, qui pouvoit cependant inspirer de la passion à son Ecrivain.

Un Avertissement de l'Imprimeur à la tête de ce petit Livre annonce d'autres ouvrages du même genre, & sans doute de la même main, mais M. de Valincourt n'eut pas le loisir de les finir, l'illustre Evêque de Meaux, qui ordinairement fournissoit aux Princes les gens de mérite dans les Lettres, dont ils avoient besoin, le fit entrer en 1685 chés M. le Comte de Toulouse, Amiral de France. Ce ne fut encore qu'en qualité de Gentilhomme attaché à sa suite, mais quelque temps après le Sécrétariat général de la Marine étant venu à vaquer, il fut donné à M. de Valincourt. Le Prince le fit aussi Sécrétaire de ses Commandements, & quand S. A. S. eut le Gouvernement de Bretagne, ce fut encore un nouveau fond de travail pour le Sécrétaire, dont les occupations se multiplioient à proportion des dignités de son Maître. Ses anciennes études l'avoient préparé, sans qu'il y pensât, à des fonctions si importantes, les nouvelles connoissances dont il eut besoin entrérent plus aisément, & se placérent mieux dans un esprit, où elles en trouvoient déja d'autres, qu'elles n'eussent fait dans un esprit entiérement vuide.

Lorsqu'en 1704, M. l'Amiral gagna la Bataille de Malaga contre les Flottes Angloise & Hollandoise jointes ensemble, M. de Valincourt, qui n'étoit point Officier de Marine, & ne prétendoit nullement aux récompenses militaires, fut toûjours à ses côtés, jusqu'à ce qu'il eut reçû une blessure à la jambe de l'éclat d'un coup de Canon, qui tua un Page. Cet attachement si fidelle, porté jusqu'aux occasions où il étoit si périlleux, & en même temps tout-à-fait inutile, avoit pour objet un Maître, qui sçavoit se faire aimer, & dont la justice & la droiture feroient un mérite & un nom à un homme du commun. Aussi M. de Valincourt a-t-il été honoré de la même confiance & des mêmes bontés sans interruption; sans trouble, sans essuyer aucun orage de Cour, sans en craindre, & cela pendant 45 ans. Cependant il n'étoit

point flateur, un Prince du même Sang lui rend hautement ce témoignage. Il eſt vrai qu'il avoit un art de dire la vérité, mais enfin il oſoit la dire, & l'adreſſe ne ſervoit qu'à rendre le courage utile. Peu à peu la néceſſité d'employer cette adreſſe diminüe, & les droits de l'homme de bien ſe fortifient toûjours.

Tout le temps, que les emplois de M. de Valincourt lui laiſſoient libre, étoit donné à des études de ſon goût, & principalement à celles qui avoient rapport à ſes emplois, car ſon devoir déterminoit aſſés ſon goût. La Marine tient à la Phiſique, & encore plus eſſentiellement aux Mathématiques, & il ne manqua pas d'ajoûter aux belles Lettres, qui avoient été ſa premiére paſſion, ces Sciences plus élevées & plus abſtraites. Ainſi il ſe trouva en état de remplir dignement une place d'Honoraire, à laquelle l'Académie le nomma en 1721. Il étoit de l'Académie Françoiſe dès 1699. Je l'ai vû dans l'une & dans l'autre, j'ai été témoin de ſa conduite, & de ſes ſentiments. Il ne croyoit pas que ce fût aſſés de voir ſon nom écrit dans les deux Liſtes, qu'il en retireroit toûjours, ſans y rien mettre du ſien, l'honneur qui lui en pouvoit revenir, que tout le reſte lui devoit être indifférent, & que des titres, qui par eux-mêmes laiſſent une grande liberté, laiſſoient juſqu'à celle de ne prendre part à rien. Il avoit pour ces Compagnies une affection ſincere, une vivacité peu commune pour leurs intérêts, & en effet une Académie eſt une eſpece de Patrie nouvelle, que l'on eſt d'autant plus obligé d'aimer qu'on l'a choiſie, mais il faut convenir que ces obligations délicates ne ſont pas pour tout le monde.

Il avoit travaillé toute ſa vie à ſe faire dans une Maiſon de campagne qu'il avoit à S[t] Cloud, & où il ſe retiroit ſouvent, une Bibliotheque choiſie. Elle montoit à 6 ou 7000 Volumes, lorſqu'elle fut entiérement conſumée, il y a près de 5 ans, par le feu qui prit à la Maiſon, ſes Recüeils, fruits de toutes ſes lectures, des Mémoires importants ſur la Marine, des Ouvrages, ou ébauchés ou finis, tout périt en même temps, & il en fut le ſpectateur. La Philoſophie, qui auroit été

été plus rigide sur une perte de biens, lui permettoit d'être sensiblement affligé de celle d'un Trésor amassé par elle-même, & où elle se complaisoit, mais son courage ne se démentit point, *je n'aurois guére profité de mes Livres,* disoit-il, *si je ne sçavois pas les perdre.* Il étoit encore soûtenu par une Philosophie bien supérieure, par la Religion, dont il fut toûjours vivement pénétré.

Vers la fin de sa vie il fut de temps en temps attaqué de diverses maladies, qui le mirent encore à de plus grandes épreuves. Enfin il mourut le 4 Janv. 1730, âgé de 77 ans.

On s'appercevoit aisément dans son commerce ordinaire qu'il étoit plein de bonnes lectures. Il en ornoit volontiers sa conversation & ses lettres, mais à propos, avec nouveauté, avec grace, conditions nécessaires, & peu observées. Un certain sel qu'il avoit dans l'esprit l'eût rendu fort propre à la raillerie, mais il s'est toûjours défendu courageusement l'usage d'un talent dangereux pour qui le possede, injuste à l'égard des autres.

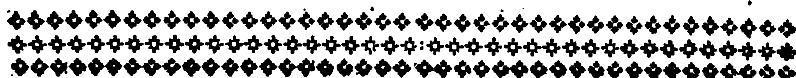
Il a été ami particulier de la plûpart de ceux qui ont brillé dans les Lettres, principalement de M[rs] Racine & Despreaux, & par cette raison il fut choisi après la mort de M. Racine pour être associé à M. Despreaux dans le travail ou le dessein de l'Histoire du feu Roi. Apparemment sa liaison avec ce grand Satirique lui fit adopter quelques-uns de ses jugements, tels que celui qu'il portoit contre le premier de nos Poëtes Liriques, jugement insoûtenable sur le Parnasse, & recevable seulement dans un Tribunal infiniment plus respectable, où le Satirique lui-même n'eût pas d'ailleurs trouvé son compte. Cependant M. de Valincourt ne se laissa point emporter à l'excessive chaleur que mirent ses Amis dans des disputes littéraires, qui ont fait assés de bruit. Il continua de vivre en amitié avec ceux qui refusoient l'adoration aux Anciens, il négocia même des reconciliations, & donna des exemples rares de modération & d'équité, quoique dans une bagatelle.

Mais il n'a pas eu seulement des amis dans les Lettres, il en a eu dans les premiéres places de l'Etat, non pas simplement

comme un homme d'esprit dont la conversation peut délasser, mais comme un homme d'un grand sens, à qui on peut parler d'affaires. Il ne s'est jamais fait valoir de ces commerces si flateurs & si dangereux pour la vanité, il les cachoit autant qu'il étoit possible, & ce qu'il cachoit encore avec plus de soin, c'est l'usage qu'il en a fait toutes les fois que la justice ou le mérite ont eu besoin de son crédit.

Il n'étoit point marié, & joüissoit d'un revenu considérable. Sa famille publie hautement sa générosité pour elle, & ses bienfaits toûjours prévenants, mais elle crandroit d'offenser sa vertu, & d'aller contre ses intentions, si elle révéloit ce qu'il a fait d'ailleurs par des motifs plus élevés.





ÉLOGE
DE M. DU VERNEY.

GUICHARD-JOSEPH DU VERNEY nâquit à Feurs en Forez le 5 Août 1648 de Jacques du Verney Médecin de la même Ville, & d'Antoinette Pittre. Ses Classes faites il étudia en Médecine à Avignon pendant 5 ans, & en partit en 1667 pour venir à Paris, où il se sentoit appellé par ses talents.

A peine arrivé dans cette grande Ville, il alla chés le fameux Abbé Bourdelot, qui tenoit des Conférences de Gens de Lettres de toutes les especes. Il leur fit une Anatomie du Cerveau, & d'autres ensuite chés M. Denys sçavant Médecin, où l'on s'assembloit aussi. Il démontroit ce qui avoit été découvert par Sténon, Swammerdam, Graaf, & les autres grands Anatomistes, & il eut bien-tôt une réputation.

Outre ses connoissances déja grandes & rares par rapport à son âge, ce qui contribua beaucoup à le mettre promptement en vogue, ce fut l'éloquence avec laquelle il parloit sur ces matiéres. Cette éloquence n'étoit pas seulement de la clarté, de la justesse, de l'ordre, toutes les perfections froides que demandent les sujets dogmatiques, c'étoit un feu dans les expressions, dans les tours, & jusque dans la prononciation, qui auroit presque suffi à un Orateur. Il n'eût pas pû annoncer indifféremment la découverte d'un Vaisseau, ou un nouvel usage d'une partie, ses yeux en brilloient de joye, & toute sa personne s'animoit. Cette chaleur ou se communique aux Auditeurs, ou du moins les préserve d'une langueur involontaire, qui auroit pû les gagner. On peut ajoûter qu'il étoit jeune, & d'une figure assés agréable. Ces petites circonstances n'auront lieu, si l'on veut, qu'à l'égard d'un

certain nombre de Dames, qui furent elles-mêmes curieuſes de l'entendre.

A meſure qu'il parvenoit à être plus à la mode, il y mettoit l'Anatomie, qui renfermée juſque-là dans les Ecoles de Médecine, ou à S[t] Coſme, oſa ſe produire dans le beau monde, préſentée de ſa main. Je me ſouviens d'avoir vû des gens de ce monde là, qui portoient ſur eux des piéces ſéches préparées par lui, pour avoir le plaiſir de les montrer dans les Compagnies, ſur-tout celles qui appartenoient aux ſujets les plus intéreſſants. Les Sciences ne demandent pas à conquerir l'Univers, elles ne le peuvent, ni ne le doivent, elles ſont à leur plus haut point de gloire, quand ceux qui ne s'y attachent pas les connoiſſent aſſés pour en ſentir le prix, & l'importance.

Il entra en 1676 dans l'Académie, qui ne comptoit encore que 10 années depuis ſon établiſſement. On crut réparer par lui la perte que la Compagnie avoit faite de M[rs] Gayent & Pecquet, tous deux habiles Anatomiſtes, mais le dernier plus fameux par la découverte du Réſervoir du Chile, & du Canal Thorachique. Du caractére dont étoit M. du Verney il n'avoit pas beſoin de grands motifs pour prendre beaucoup d'ardeur. Il ſe mit à travailler à l'Hiſtoire Naturelle des Animaux, qui faiſoient alors une partie des occupations de l'Académie, & il tient beaucoup de place dans l'Hiſtoire Latine de M. du Hamel.

Quand ceux qui étoient chargés de l'éducation de M. le Dauphin, ayeul du Roi, ſongerent à lui donner des connoiſſances de Phiſique, on fit l'honneur à l'Académie de tirer de ſon corps ceux qui auroient cette fonction, & ce furent M. Roëmer pour les Expériences générales, & M. du Verney pour l'Anatomie. Celui-ci préparoit les parties à Paris, & les tranſportoit à S[t] Germain, ou à Verſailles. Là il trouvoit un Auditoire redoutable, le Dauphin environné de M. le Duc de Montauſier, de M. l'Evêque de Meaux, de M. Huet depuis Evêque d'Avranches, de M. de Cordemoi, qui tous, en ne comptant pour rien les titres, quoiqu'ils

fassent toûjours leur impression, étoient fort sçavants, & fort capables de juger même de ce qui leur eût été nouveau. Les démonstrations d'Anatomie réüssirent si bien auprès du jeune Prince, qu'il offrit quelquefois de ne point aller à la Chasse, si on les lui pouvoit continuer après son dîner.

Ce qui avoit été fait chés lui se recommençoit chés M. de Meaux avec plus d'étendüe & de détail. Il s'y assembloit de nouveaux Auditeurs, tels que M. le Duc de Chevreuse, le P. de la Chaise, M. Dodart, tous ceux que leur goût y attiroit, & qui se sentoient dignes d'y paroître. M. du Verney fut de cette sorte pendant près d'un an l'Anatomiste des Courtisans, connu de tous, & presque ami de ceux qui avoient le plus de mérite. Ses succès de Paris l'avoient porté à la Cour, & il en revint à Paris avec ce je ne sçai quoi de plus brillant que donnent les succès de la Cour.

Les fatigues de son métier, très-pénible par lui-même, & plus pénible pour lui que pour tout autre, lui causerent un mal de Poitrine si violent, qu'on lui crut un Ulcere au Poumon. Il en revint cependant, bien résolu à se ménager davantage à l'avenir, mais comment executer cette résolution? Comment résister à mille choses qui s'offroient, & qui forçoient ses regards, & ses recherches à se tourner de leur côté? Comment leur refuser ses nuits, même après les jours entiers? Souvent l'Anatomie ne souffre pas de délais, mais quand elle en eût souffert, en pouvoit-il prendre?

En 1679 il fut nommé Professeur d'Anatomie au Jardin Royal, & il alla en basse Bretagne pour y faire des dissections de Poissons, envoyé dans cette vûë avec M. de la Hire, qui devoit avoir d'autres occupations. Ils furent envoyés tous deux l'année suivante sur la Côte de Bayonne pour les mêmes desseins. Il entra dans une Anatomie toute nouvelle, mais il ne pût qu'ébaucher la matiére, & depuis son retour la seule structure des Oüies de la Carpe lui coûta plus de temps que tous les Poissons qu'il avoit étudiés dans ses deux voyages.

Il mit les exercices Anatomiques du Jardin Royal sur un

pied où ils n'avoient pas encore été. On vit avec étonnement la foule d'Ecoliers, qui s'y rendoit, & on compta en une année jusqu'à 140 Etrangers. Plusieurs d'entre eux retournés dans leurs Pays, ont été de grands Médecins, de grands Chirurgiens, & ils ont semé dans toute l'Europe le nom & les loüanges de leur Maître. Sans doute ils ont souvent fait valoir son autorité, & se sont servis du fameux, *il l'a dit*. Nous avons rapporté dans l'Eloge de M. Lémery* qu'il faisoit ici en même temps des Cours de Chimie avec le même éclat. Une Nation, qui auroit pris sur les autres une certaine supériorité dans les Sciences, s'appercevroit bientôt que cette gloire ne seroit pas stérile, & qu'il lui en reviendroit des avantages aussi réels, que d'une marchandise nécessaire & précieuse, dont elle feroit seule le commerce.

* V. l'Hist. de 1715. p. 74. & 75.

Il publia en 1683 son *Traité de l'Organe de l'Oüie*, qui fut traduit en Latin dès l'année suivante, & imprimé à Nuremberg. Cette traduction a été insérée dans la Bibliotheque Anatomique de Manget. On sera surpris que ce soit là le seul Livre qu'ait donné M. du Verney, vû le long-temps qu'il a vécu depuis, mais quand on le connoîtra bien, on sera surpris au contraire qu'il l'ait donné. Jamais il ne se contentoit pleinement sur un sujet, & ceux qui ont quelque idée de la Nature le lui pardonneront. Il faisoit d'une partie qu'il éxaminoit toutes les Coupes différentes qu'il pouvoit imaginer pour la voir de tous les sens, il employoit toutes les Injections, & cela demande déja un temps infini, ne fût-ce qu'en tentatives inutiles. Mais il arrivoit ce qui arrive presque toûjours des discussions poussées dans un grand détail, elles ne levent guere une difficulté sans en faire naître une autre, cette nouvelle difficulté, qu'on veut suivre, produit aussi sa difficulté incidente, & on se trouve engagé dans un Labirinthe. De plus un premier travail, qui auroit voulu être continüé, est interrompu par un autre, que quelques circonstances, ou, si l'on veut, la simple curiosité rendent indispensable. Une connoissance acquise comme par hasard aura une espece d'effet rétroactif, qui détruira ou modifiera

beaucoup de connoissances précédentes qu'on croyoit absolument sûres. Ajoûtés à ce fond d'embarras, que produit la nature de l'Anatomie, une peur de se méprendre, une frayeur des jugements du Public, qui ne peut guere être excessive, & l'on concevra sans peine qu'un très-habile Anatomiste peut n'avoir pas imprimé. Il faut pourtant avoüer qu'un trop grand amour de la perfection, ou une trop grande délicatesse de gloire, feront perdre au Public une infinité de vûës & d'idées, qui pour être d'une certaine utilité n'auroient pas eû besoin d'une entiére certitude ou d'une précision parfaite.

M. du Verney fut assés long-temps le seul Anatomiste de l'Académie, & ce ne fut qu'en 1684 qu'on lui joignit M. Méry *. Ils n'avoient rien de commun qu'une extrême passion pour la même Science & beaucoup de capacité; du reste presque entiérement opposés, sur-tout à l'égard des talents extérieurs. Si l'on pouvoit quelquefois craindre que par le Don de la parole M. du Verney n'eût la facilité de tourner les faits selon ses idées, on étoit sûr que M. Méry ne pouvoit que se renfermer dans une sévére exactitude des faits, & que l'un eût tenu en respect l'éloquence de l'autre. Le grand avantage des Compagnies résulte de cet Equilibre des caractéres. On remarqua que M. du Verney prit un nouveau feu par cette espece de rivalité. Elle n'éclata jamais davantage que dans la fameuse question de la Circulation du sang du Fœtus, dont nous avons tant parlé. Elle le conduisit à examiner d'autres sujets qui pouvoient y avoir rapport, la Circulation dans les Amphibies, tels que la Grenoüille, car le Fœtus qui vit d'abord sans respirer l'air, & ensuite en le respirant, est une espece d'Amphibie; ceux-là le conduisoient à d'autres animaux approchants sans être Amphibies, comme le Crapaud, & enfin aux Insectes, qui sont un Genre à part, & offrent un spectacle tout nouveau.

* V. l'Hist. de 1722. p. 130.

Aussi excelloit-il dans l'Anatomie comparée, qui est l'Anatomie prise le plus en grand qu'il soit possible, & dans une étenduë où peu de gens la peuvent embrasser. Il est vrai que pour nous & pour nos besoins la structure du Corps humain

paroîtroit ſuffire, mais on le connoît mieux, quand on connoît auſſi toutes les autres Machines faites à peu près ſur le même deſſein. Après celles-là il s'en preſente d'autres d'un deſſein fort différent, il y aura moins d'utilité à les étudier à cauſe de la grande différence, mais par cette raiſon là même la curioſité ſera plus picquée, & la curioſité n'a-t-elle pas ſes beſoins?

Dans les premiers temps de ſes exercices du Jardin Royal il faiſoit & les démonſtrations des parties qu'il avoit préparées, & les diſcours qui expliquoient les uſages, les maladies, les cures, & réſolvoient les difficultés. Mais ſa foibleſſe de poitrine, qui ſe faiſoit toûjours ſentir, ne lui permit pas de conſerver les deux fonctions à la fois. Un habile Chirurgien choiſi par lui faiſoit ſous lui les démonſtrations, & il ne lui reſtoit plus que les diſcours, dans leſquels il avoit de la peine à ſe renfermer. C'eſt lui qui a le premier enſeigné en ce lieu là l'Oſtéologie, & les maladies des Os.

De ſon Cabinet, où il avoit étudié des Cadavres & des Squelétes, il alloit dans les Hôpitaux de Paris, où il étudioit ceux dont les maux avoient rapport à l'Anatomie. Si la Machine du Corps diſſéquée & démontrée préſente encore tant d'Enigmes très-difficiles & très-obſcures, à plus forte raiſon la Machine vivante, où tout eſt ſans comparaiſon moins expoſé à la vûë, plus enveloppé, plus équivoque. C'étoit-là qu'il appliquoit ſa Théorie aux faits, & qu'il apprenoit même ce que la ſeule Théorie ne lui eût pas appris. En même temps il étoit d'un grand ſecours, & aux Malades, & à ceux qui en étoient chargés. Quoiqu'il fût Docteur en Médecine, il évitoit de s'engager dans aucune pratique de Médecine ordinaire, quelque honorable, quelque utile qu'elle pût être, il prévoyoit qu'un cas rare de Chirurgie, une opération ſinguliére, lui auroit cauſé une diſtraction indiſpenſable, & il s'acquitoit aſſés envers le Public de ſon devoir de Médecin, non-ſeulement par les inſtructions générales qu'il donnoit ſur toute l'Anatomie, mais par l'utilité dont il étoit dans les occaſions particuliéres.

Loin

Loin d'avoir rien à se reprocher sur cet article, il ne se reprochoit que d'être trop occupé de sa profession. Il craignoit que la Religion, dont il avoit un sentiment très-vif, ne lui permît pas un si violent attachement, qui s'emparoit de toutes ses pensées, & de tout son temps. L'Auteur de la Nature, qu'il admiroit & reveroit sans cesse dans ses Ouvrages si bien connus de lui, ne lui paroissoit pas suffisamment honoré par ce culte sçavant, toûjours cependant accompagné du culte ordinaire le plus régulier. L'âge qui s'avançoit, les infirmités qui augmentoient, contribuoient peut-être à ce scrupule, sans lui donner pourtant le pouvoir de s'y livrer entiérement.

Les mêmes raisons l'empêcherent pendant plusieurs années de paroître à l'Académie. Il demanda à être Vétéran, & sa place fut remplie par M. Petit Docteur en Médecine. Il paroissoit avoir oublié l'Académie, lorsque tout d'un coup il se réveilla à l'occasion de la réimpression de l'Histoire Naturelle des Animaux, à laquelle il avoit eu anciennement beaucoup de part. Il reprit à 80 ans des forces, de la jeunesse pour revenir dans nos Assemblées, où il parla avec toute la vivacité qu'on lui avoit connüe, & qu'on n'attendoit plus. Une grande passion est une espece d'Ame, immortelle à sa maniére, & presque indépendante des Organes.

Il ne perdoit aucun des intervalles que lui laissoient des souffrances, qui redoubloient toûjours, & qui le mirent plusieurs fois au bord du tombeau. Il revoyoit avec M. Vinslou son Traité de l'Oreille dont il vouloit donner une 2de Edition, qui se seroit bien sentie des acquisitions postérieures. Il avoit entrepris un Ouvrage sur les Insectes, qui l'obligeoit à des soins très-pénibles; malgré son grand âge, par exemple, il passoit des nuits dans les endroits les plus humides du Jardin, couché sur le ventre sans oser faire aucun mouvement, pour découvrir les allures, la conduite des Limaçons, qui semblent en vouloir faire un secret impénétrable. Sa santé en souffroit, mais il auroit encore plus souffert de rien négliger. Il mourut le 10 Sept. 1730, âgé de 82 ans.

Il étoit en commerce avec les plus grands Anatomistes de son temps, Malpighi, Ruysch, Pitcarne, Bidloo, Boerhave. J'ai vû les Lettres qu'il en avoit reçûës, & je ne puis m'empêcher d'en traduire ici une de Pitcarne écrite en Latin, datée de l'an 1712, à cause de son caractére singulier.

Très-illustre du Verney, voici ce que t'écrit un homme qui te doit beaucoup, & qui te rend graces de ces discours divins, qu'il a entendus de toi à Paris il y a 30 ans. Je te recommande Thomson mon ami, & Ecossois. Je t'envoyerai bien-tôt mes Dissertations où je résoudrai ce Probléme, Une Maladie étant donnée trouver le Remede. *A Edimbourg,* &c. Celui qui s'élévoit à de pareils Problémes, & dont effectivement le nom est devenu si célébre, se faisoit honneur de se reconnoître pour Disciple de M. du Verney. On voit de plus par des Lettres de 1698 que lui qui auroit pû instruire parfaitement dans l'Anatomie un frere qu'il avoit, il l'envoyoit d'Angleterre à Paris, pour y étudier sous le plus grand Maître.

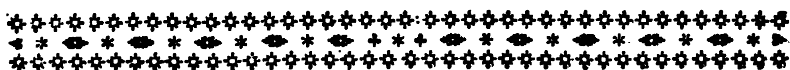
En général il paroît par toutes ces Lettres que la réputation de M. du Verney étoit très-brillante chés les Etrangers, non-seulement par la haute idée qu'ils remportoient de sa capacité, mais par la reconnoissance qu'ils lui devoient de ses maniéres obligeantes, de l'intérêt qu'il prenoit à leurs progrès, de l'affection dont il animoit ses Leçons. Ceux qui lui adressoient de nouveaux Disciples, ne lui demandoient pour eux que ce qu'ils avoient éprouvé eux-mêmes. Ils disent tous que son Traité de l'Oüie leur a donné une envie extrême de voir les Traités des quatre autres Sens qu'il avoit promis dans celui-là, ils l'exhortent souvent à faire part à tout le Public de ses richesses, qu'il ne peut plus tenir cachées après les avoir laissé appercevoir dans ses Discours du Jardin Royal, ils le ménacent du péril de se les voir enlever par des gens peu scrupuleux, & on lui cite même un exemple où l'on croit le cas déja arrivé, mais il a toûjours été ou peu sensible à ce malheur, ou trop irrésolu à force de sçavoir.

On lui donne assés souvent dans ces Lettres une premiére

place entre tous les Anatomiſtes. Il eſt vrai que dans ce qu'on écrit à un homme illuſtre, il y entre d'ordinaire du compliment, on peut mettre à un haut rang celui qui n'eſt pas à un rang fort haut, mais on n'oſe pas mettre au premier rang celui qui n'y eſt pas; la loüange eſt trop déterminée, & on ne pourroit ſauver l'honneur de ſon jugement.

Il eſt du devoir de l'Académie de publier un bien-fait qu'elle a reçû de lui. Il lui a légué par ſon Teſtament toutes ſes préparations Anatomiques, qui ſont & en grand nombre, & de la perfection qu'on peut imaginer. Cela joint à tous les Squelétes d'Animaux rares, que la Compagnie a depuis long-temps dans une Salle du Jardin Royal, compoſera un grand Cabinet d'Anatomie, moins eſtimable encore par la curioſité, que par l'utilité dont il ſera dans les recherches de ce genre.





E'LOGE

DE M. LE COMTE MARSIGLI.

LOÜIS FERDINAND MARSIGLI nâquit à Bologne le 10 Juillet 1658 du Comte Charles François Marsigli, issu d'une ancienne Maison Patricienne de Bologne, & de la Comtesse Marguerite Cicolani. Il fut élevé par ses parents selon qu'il convenoit à sa naissance, mais il se donna à lui-même, quant aux Lettres, une éducation bien supérieure à celle que sa naissance demandoit. Il alla dès sa premiére jeunesse chercher tous les plus illustres Sçavants d'Italie, il apprit les Mathématiques de Geminiano Montanari, & d'Alphonse Borelli, l'Anatomie de Marcel Malpighi, l'Histoire Naturelle des observations que son génie lui fournissoit dans ses voyages.

Mais ils eussent été trop bornés, s'ils se fussent renfermés dans l'Italie. Il alla à Constantinople en 1679 avec le Bayle que Venise y envoyoit. Comme il se destinoit à la Guerre, il s'informa, mais avec toute l'adresse, & les précautions nécessaires, de l'état des Forces Ottomanes, & en même temps il examina en Philosophe le Bosphore de Thrace, & ses fameux Courants. Il écrivit sur l'un & l'autre de ces deux sujets. Le Traité du Bosphore parut à Rome en 1681 dédié à la Reine Christine de Suede, & c'est le premier qu'on ait de lui. L'autre intitulé *Del incremento e decremento dell' Imperio Ottomano* doit paroître présentement imprimé à Amsterdam avec une traduction Françoise.

Il revint de Constantinople dès l'an 1680, & peu de temps après, lorsque les Turcs menaçoient d'une irruption en Hongrie, il alla à Vienne offrir ses services à l'Empereur Leopold,

qui les accepta. Il lui fut aiſé de prouver combien il étoit au deſſus d'un ſimple Soldat par ſon intelligence dans les Fortifications, & dans toute la Science de la Guerre, il fit avec une grande approbation des Généraux des Lignes & des travaux ſur le Rab pour arrêter les Turcs, & il en fut récompenſé par une Compagnie d'Infanterie en 1683, quand les Ennemis parurent pour paſſer cette Riviére. Ce fut là qu'après une action aſſés vive, il tomba bleſſé & preſque mourant entre les mains des Tartares, le 2 Juillet, jour de la Viſitation; ce n'eſt pas ſans raiſon que nous ajoûtons le nom de cette Fête à la datte du jour. Il a fait de ſa captivité une Relation, où il a bien ſenti que l'art n'étoit point néceſſaire pour la rendre touchante. Le Sabre toûjours levé ſur ſa tête, la mort toûjours préſente à ſes yeux, des traitements plus que barbares, qui étoient une mort de tous les moments, feront frémir les plus impitoyables, & l'on aura ſeulement de la peine à concevoir comment ſa jeuneſſe, ſa bonne conſtitution, ſon courage, la réſignation la plus Chrétienne, ont pû réſiſter à une ſi affreuſe ſituation. Il ſe crut heureux d'être acheté par deux Turcs, freres, & très-pauvres, avec qui il ſouffrit encore beaucoup, mais plus par leur miſere que par leur cruauté, il comptoit qu'ils lui avoient ſauvé la vie. Ces maîtres ſi doux le faiſoient enchaîner toutes les nuits à un Pieu planté au milieu de leur chétive cabane, & un troiſiéme Turc, qui vivoit avec eux, étoit chargé de ce ſoin.

Enfin, car nous ſupprimons beaucoup de détails, quoiqu'intéreſſants, il trouva moyen de donner de ſes nouvelles en Italie, & de ſe faire racheter, & le jour de ſa liberté fut le 25 Mars 1684, jour de l'Annonciation. Ses réfléxions ſur ces deux dattes de ſa captivité & de ſa délivrance ſont la plus remarquable partie de ſon Eloge, puiſqu'elles découvrent en lui un grand fonds de piété. Il conçut, & ce ſont ici ſes paroles, que dans deux jours où l'auguſte Protectrice des Fidelles eſt particuliérement honorée, elle lui avoit obtenu deux graces du Ciel, l'une conſiſtoit à le punir ſalutairement

de ses fautes passées, l'autre à faire cesser la punition.

Remis en liberté, il alla à Bologne se montrer à ses Concitoyens, qui avoient pleuré sa mort, & qui verserent d'autres larmes en le revoyant, & après avoir joüi de toutes les douceurs d'une pareille situation, il retourna à Vienne se présenter à l'Empereur, & reprendre ses emplois militaires. Il fut chargé de fortifier Strigonie, & quelques autres Places, & d'ordonner les travaux nécessaires pour le Siége de Bude, que méditoient les Impériaux. Il eut part à la construction d'un Pont sur le Danube, ce qui lui donna occasion d'observer les ruines d'un ancien Pont de Trajan sur ce même Fleuve. Il fut fait Colonel en 1689.

En cette même année l'Empereur l'envoya deux fois à Rome pour faire part aux Papes Innocent XI & Aléxandre VIII des grands succès des armes Chrétiennes, & des projets formés pour la suite.

Lorsqu'après une longue guerre, funeste aux Chrétiens mêmes, qui en remportoient l'avantage, l'Empereur & la République de Venise d'une part, & de l'autre la Porte, vinrent à songer à la Paix, & qu'il fut question d'établir les Limites entre les Etats de ces trois Puissances, le Comte Marsigli fut employé par l'Empereur dans une affaire si importante, & comme un homme de guerre qui connoissoit ce qui fait une bonne Frontiére, & comme un Sçavant bien instruit des anciennes possessions, & comme un habile Négociateur, qui sçauroit faire valoir des droits. Se trouvant sur les confins de la Dalmatie Vénitienne, il reconnut à quelque distance de-là une Montagne, au pied de laquelle habitoient les deux Turcs, dont il avoit été Esclave. Il fit demander dans le pays Turc s'ils vivoient encore, & heureusement pour lui ils se retrouverent. Il eut le plaisir de se faire voir à eux environné de Troupes qui lui obéissoient, ou le respectoient, & le plaisir encore plus sensible de soulager leur extrême misere, & de les combler de présents. Il crut leur devoir encore sa rançon, parce que l'argent qu'ils en avoient

reçû leur avoit été enlevé par le Commandant Turc ſous ce prétexte extravagant que leur Eſclave étoit un fils ou un proche parent du Roi de Pologne, qu'ils auroient dû envoyer au Grand Seigneur. Il fit encore plus pour eux, perſuadé preſque que c'étoient des Libérateurs généreux, qui pour ſon ſeul intérêt l'avoient tiré des mains des Tartares. L'emploi qu'il avoit pour régler les Limites le mettant à portée d'écrire au grand Viſir, il lui demanda pour l'un de ſes deux Turcs un Timariot, benefice militaire, & en obtint un beaucoup plus conſidérable que celui qu'il demandoit. Sa générosité fut ſentie par ce Viſir, comme on auroit pû ſouhaiter qu'elle le fût par le premier Miniſtre de la Nation la plus polie, & la plus exercée à la vertu.

Les différentes opérations d'une Guerre très-vive, ſuivies de toutes celles qui furent néceſſaires par un reglement de Limites, doivent ſuffire pour occuper un homme tout entier. Cependant au milieu de tant de tumulte, d'agitation, de fatigues, de périls, M. Marſigli fit preſque tout ce qu'au*roit* pû faire un Sçavant, qui auroit voyagé tranquillement pour acquerir des connoiſſances. Les armes à la main, il levoit des Plans, déterminoit des poſitions par les méthodes Aſtronomiques, meſuroit la viteſſe des Riviéres, étudioit les Foſſiles de chaque Pays, les Mines, les Métaux, les Oiſeaux, les Poiſſons, tout ce qui pouvoit mériter les regards d'un homme qui ſçait où il les faut porter. Il alloit juſqu'à faire des Epreuves Chimiques, & des Anatomies. Le temps bien ménagé eſt beaucoup plus long que n'imaginent ceux qui ne ſçavent guere que le perdre. Le mêtier de la Guerre a des vuides fréquents, & quelquefois conſidérables, abandonnés ou à une oiſiveté entiére, ou à des plaiſirs qu'on ſe rend témoignage d'avoir bien mérités. Ces vuides n'en étoient point pour le Comte Marſigli, il les donnoit à un métier preſque auſſi noble, à celui de Philoſophe & d'Obſervateur, il les rempliſſoit comme auroit fait Xénophon. Il amaſſa un grand Recüeil, non-ſeulement d'Ecrits, de Plans, de Cartes,

mais encore de curiosités d'Histoire Naturelle.

La succession d'Espagne ayant rallumé en 1701 une Guerre qui embrasa l'Europe, l'importante Place de Brisac se rendit par capitulation à feu Mgr le Duc de Bourgogne le 6 Septembre 1703, après 13 jours de Tranchée ouverte. Le Comte d'Arco y commandoit, & sous lui M. Marsigli, parvenu alors au grade de Général de Bataille. L'Empereur, persuadé que Brisac avoit été en état de se défendre, & qu'une si prompte capitulation s'étoit faite contre les regles, nomma des Juges pour connoître de cette grande affaire. Ils prononcérent le 4 Fév. 1704 une Sentence par laquelle le Comte d'Arco étoit condamné à avoir la tête tranchée, ce qui fut executé le 18 du même mois, & le Comte Marsigli à *être déposé de tous honneurs & charges, avec la rupture de l'Epée*. Un coup si terrible lui dut faire regretter l'esclavage chés les Tartares.

Il est presque impossible que de pareils coups fassent la même impression sur le coupable, & sur l'innocent; l'un est terrassé malgré lui-même par le témoignage de sa conscience, l'autre en est soutenu & relevé. Il alla à Vienne pour se jetter aux pieds de l'Empereur, & lui demander la révision du procès, mais il ne put en huit mois approcher de S. M. I. Grace en effet très-difficile à obtenir du Prince le plus juste, à cause des conséquences, ou dangereuses, ou tout au moins desagréables. Il eut donc recours au Public, & remplit l'Europe d'un grand Mémoire imprimé pour sa justification. Par bonheur pour lui un Anonime, & ce ne fut qu'un Anonime, y répondit, ce qui lui donna lieu de lever jusqu'aux moindres scrupules, que son Apologie auroit pû laisser. Le fond en est que long-temps avant le Siége de Brisac il avoit représenté très-instamment que la Place ne pourroit se défendre, & il le fait voir par les Etats de la Garnison, des Munitions de guerre, &c. Piéces dont on ne lui a pas contesté la vérité. On lui avoit refusé, sous prétexte d'autres besoins, tout ce qu'il avoit demandé de plus nécessaire & de plus indispensable.

ſible. Il n'étoit point le Commandant, & il n'avoit fait que ſe ranger à l'avis entiérement unanime du Conſeil de Guerre. Mais cette grande briéveté, à laquelle nous ſommes obligés de réduire ſes raiſons, lui fait tort, & il vaut mieux nous contenter de dire, que le Public, qui ſçait ſi bien faire entendre ſon jugement ſans le prononcer en forme, ne ſouſcrivit pas à celui des Commiſſaires Impériaux. Les Puiſſances mêmes alliées de l'Empereur, intéreſſées par conſéquent à la conſervation de Briſac, reconnurent l'innocence du Comte Marſigli, & la Hollande nommément permit qu'on en rendît témoignage dans des Ecrits qui furent publiés. Parmi tous ces ſuffrages favorables, nous en avons encore un à compter, qui n'eſt à la vérité que celui d'un particulier, mais ce particulier eſt M. le Maréchal de Vauban, dont l'autorité auroit pû être oppoſée, s'il l'eût fallu, à celle de toute l'Europe, comme l'autorité de Caton à celle des Dieux. Sur le fond de toute cette affaire, il parut généralement qu'on avoit voulu au commencement d'une grande Guerre donner un exemple effrayant de ſévérité, dont on prévoyoit le beſoin dans beaucoup d'autres occaſions pareilles ; la Morale des Etats ſe réſout pour de ſi grands intérêts à haſarder le ſacrifice de quelques Particuliers.

M. Marſigli envoya en 1705, toutes ſes piéces juſtificatives à l'Académie, comme à un Corps dont il ne vouloit pas perdre l'eſtime, & il eſt remarquable dans la Lettre qu'il lui écrivit, qu'après avoir parlé en peu de mots de ſa malheureuſe ſituation, il ne penſe plus qu'à des projets d'Ouvrages, & les expoſe aſſés au long, principalement l'idée qu'il avoit d'établir le véritable cours de la Ligne de Montagnes, qui commence à la Mer noire, va parallelement au Danube juſqu'au Mont St Gothard, & continüe juſqu'à la Méditerranée.

Dans l'impreſſion de ſes Apologies, il met pour Vignette une eſpece de Deviſe ſinguliére, qui a rapport à ſon avanture. C'eſt une *M*, premiére lettre de ſon nom, qui porte de part

& d'autre entre ses deux jambes les deux tronçons d'une Epée rompüe, avec ces mots, *fractus integro*. Eût-il imaginé, eût-il publié cette représentation affligeante, s'il se fût crû flétri, & n'eût-il pas crû l'être, si la voix publique ne l'eût pleinement rassûré ?

Il chercha sa consolation dans les Sciences, dont il s'étoit ménagé le secours, sans prévoir qu'il lui dût être un jour si nécessaire. Ce qui n'avoit été pour lui qu'un Lieu de plaisance devint un Asile. Il conserva la pratique d'étudier par les voyages, dont il avoit contracté l'habitude, & c'est réellement la meilleure pour l'Histoire Naturelle, qui étoit son grand objet. Il alla en Suisse, où la Nature se presente sous un aspect si différent de tous les autres, & ce Pays l'intéressoit particuliérement parce qu'il vouloit faire un Traité de la Structure organique de la Terre, & que les Montagnes sont peut-être des especes d'Os de ce grand Corps. Il vint ensuite à Paris, où il ne trouva pas moins de quoi exercer sa curiosité, quoique d'une maniére différente ; de-là il parcourut la France, & s'arrêta à Marseille pour étudier la Mer.

Etant un jour sur le Port, il reconnut un Galérien Turc, pour être celui qui l'attachoit toutes les nuits au Pieu, dont nous avons parlé. Ce Malheureux, frappé d'un effroi mortel, se jetta à ses pieds pour implorer sa miséricorde, qui ne devoit consister qu'à ne pas ajoûter de nouvelles rigueurs à sa misere présente. M. Marsigli écrivit à M. le Comte de Pontchartrain, pour le prier de demander au Roi la liberté de ce Turc, & elle fut accordée. On le renvoya à Alger, d'où il manda à son Libérateur qu'il avoit obtenu du Bacha des traitements plus doux pour les Esclaves Chrétiens. Il semble que la Fortune imitât un Auteur de Roman, qui auroit ménagé des rencontres imprévûës & singuliéres, en faveur des vertus de son Héros.

Le Comte Marsigli fut rappellé de Marseille en 1709, par les ordres du Pape Clément XI, qui dans les conjonctures d'alors crut avoir besoin de Troupes, & lui en donna

le commandement, tant l'affaire de Brisac lui avoit laissé une réputation entiére, car la valeur & la capacité les plus réelles n'auroient pas suffi, il faut toûjours dans de semblables choix compter avec l'opinion des hommes. Quand ce commandement fut fini par le changement des conjonctures, le Pape voulut retenir M. Marsigli auprès de lui, par l'offre des emplois militaires les plus importants, dont il disposât, & même, pour n'épargner aucun moyen, par l'offre de la Prélature, qui auroit pû le relever si glorieusement, & le porter à un rang si haut; mais il refusa tout pour aller reprendre en Provence les délicieuses recherches qu'il y avoit commencées. Il en envoya à l'Académie en 1710 une assés ample Relation, dont nous avons rendu compte *, & la belle découverte des Fleurs du Corail y est comprise. Cet Ouvrage a été imprimé à Amsterdam en 1715, sous le titre d'*Histoire Phisique de la Mer*. Des affaires domestiques le rappellerent à Bologne, & là il commença l'execution d'un dessein qu'il méditoit depuis long-temps, digne d'un homme accoûtumé au grand pendant tout le cours de sa vie.

* V. l'Hist. de 1710. p. 23. 48. & 69.

Entre toutes les Villes d'Italie, Bologne est célébre par rapport aux Sciences, & aux Arts. Elle a une ancienne Université pareille aux autres de l'Europe, une Académie de Peinture, de Sculpture, & d'Architecture, nommée *Clementine,* parce qu'elle a été établie par Clément XI, enfin une Académie des Sciences, qui s'appelle l'Académie des *Inquiets,* nom assés convenable aux Philosophes modernes, qui n'étant plus fixés par aucune autorité cherchent & chercheront toûjours. Le Comte Marsigli voulut encore orner de ce côté-là sa Patrie, quoique déja si ornée. Il avoit un fonds très-riche de toutes les différentes Piéces, qui peuvent servir à l'Histoire Naturelle, d'Instruments nécessaires aux observations Astronomiques, ou aux expériences de Chimie, de Plans pour les Fortifications, de Modéles de Machines, d'Antiquités, d'Armes étrangéres, &c. Le tout non-seulement acquis à grands frais, mais transporté encore à plus grands frais de

différents lieux éloignés jusqu'à Bologne, & il en fit une donation au Sénat de cette Ville par un acte authentique du 11 Janv. 1712, en formant un Corps qui eût la garde de tous les fonds donnés, & qui en fit à l'avantage du Public l'usage reglé par les conditions du Contrat. Il nomma ce Corps *l'Institut des Sciences & des Arts de Bologne*. Sans doute il eût des difficultés à vaincre de la part des Compagnies plus anciennes, différents intérêts à concilier ensemble, des caprices mêmes à essuyer, mais il n'en reste plus de traces, & c'est autant de perdu pour sa gloire, à moins qu'on ne lui tienne compte de ce qu'il n'en reste plus de traces. Il subordonna son Institut à l'Université, & le lia aux deux Académies. De cette nouvelle disposition faite avec toute l'habileté requise, & tous les ménagements nécessaires, il en résulte certainement que la Phisique & les Mathématiques ont aujourd'hui dans Bologne des secours & des avantages considérables qu'elles n'y avoient jamais eûs, & dont le fruit doit se communiquer par une heureuse contagion. Le Sénat donna à l'Institut un Palais, tel que le demandoient les grands fonds reçûs de M. Marsigli, qu'il falloit distribuer en différents Appartements selon les Sciences. Dans ce Palais habitent six Professeurs, chacun dans le quartier de la Science qui lui appartient. On croit voir l'Atlantide du Chancelier Bacon executée, le songe d'un Sçavant réalisé. Il sera facile de juger qu'on n'a pas oublié un Observatoire. Il est occupé par M. Eustachio Manfredi, Astronome de l'Institut, si ce n'est pas lui faire tort que de le désigner par cette seule qualité, lui qui allie aux Mathématiques les talents qui leur sont les plus opposés.

L'Institut s'ouvrit en 1714 par une Harangue du P. Hercule Corazzi, Religieux Olivetan, Mathématicien de la nouvelle Compagnie. Le Comte Marsigli, qui n'avoit pas voulu permettre que son nom parût dans aucun Monument public, ne pût échapper aux justes loüanges de l'Orateur. Comment séparer le Fondateur d'avec la Fondation? Les loüanges

refusées sçavent bien revenir avec plus de force, & il est peut-être aussi modeste de leur laisser leur cours naturel, en ne les prenant que pour ce qu'elles valent.

En 1715 l'Académie des Sciences ayant proposé au Roi, selon sa Régle, pour une place vacante d'Associé Etranger, deux Sujets, qui furent M. le Duc d'Escalonne, Grand d'Espagne, & M. Marsigli, le Roi ne voulut point faire de choix entre eux, & il ordonna que tous deux seroient de l'Académie, parce que la premiére place d'Associé Etranger qui vaqueroit, ne seroit point remplie. N'eût-il pas sans hésiter donné la préférence à un homme du mérite & de la dignité du Duc d'Escalonne, pour peu qu'il fût resté de tache au nom de son Concurrent, & cette tache n'eût-elle pas été de l'espece la plus odieuse aux yeux de ce grand Prince? M. Marsigli étoit aussi de la Société Royale de Londres, & de celle de Montpellier. Ce n'étoit pas un honneur à négliger pour les différentes Académies que de compter parmi leurs membres le Fondateur d'une Académie.

Elle l'occupoit toûjours, & il se livroit volontiers à toutes les idées qui lui venoient sur ce sujet, quelques soins, & quelques dépenses qu'elles demandassent. Il mit sur pied une Imprimerie, qui devoit être fournie non-seulement de Caractéres Latins & Grecs, mais encore Hébreux & Arabes, & il fit venir de Hollande des Ouvriers habiles pour les fondre. Il eut des raisons pour ne pas donner ce grand fonds à l'Institut directement, mais aux Peres Dominicains de Bologne, à condition que tous les Ouvrages, qui partiroient de l'Institut seroient imprimés en remboursant seulement les frais. Il donna à cette Imprimerie le nom d'Imprimerie de St Thomas d'Aquin, dont il invoquoit la protection pour cet établissement, & pour tout l'Institut. Le Protecteur étoit bien choisi, car St Thomas dans un autre siécle, & dans d'autres circonstances étoit Descartes. Nous passons sous silence des Processions, où il vouloit que l'on portât huit Banniéres, qui auroient représenté les principaux événements

de la vie du Saint, & ausquelles on jugea à propos de substitüer la Châsse de ses Reliques. La dévotion d'Italie prend assés souvent une forme, qui n'est guere de nôtre goût d'aujourd'hui.

Ce qui en sera certainement davantage, c'est l'établissement qu'il fit d'un Tronc dans la Chapelle de l'Institut pour le rachat des Chrétiens, & principalement de ses Compatriotes esclaves en Turquie. Il n'oublia rien pour animer cette charité; il se souvenoit de ses malheurs utilement pour les autres Malheureux. Par le même souvenir il ordonna une Procession solemnelle de l'Institut tous les vingt-cinq ans le jour de l'Annonciation. Ces Fêtes, ces cérémonies fondées sur la piété pouvoient aussi avoir une politique sensée & légitime, elles lioient l'Institut à la Religion, & en assûroient la durée.

Il manquoit encore à la Collection d'Histoire Naturelle, dont l'Institut étoit en possession, quantité de choses des Indes, car ce qui y dominoit c'étoit l'Europe, & il jugea qu'il ne pouvoit avoir promptement ces curiosités qu'en les allant chercher en Angleterre & en Hollande. Il s'embarqua à Livourne pour Londres, quoique dans un âge déja fort avancé, & il alla de Londres à Amsterdam finir ses sçavantes emplettes. Là il donna à imprimer son grand ouvrage du *Cours du Danube* dont il a paru à la Haye en 1726 une Edition magnifique en 6 vol. in fol. Et il négocia avec les Libraires un nombre de bons Livres destinés à son Institut. Quand toutes ses nouvelles acquisitions furent rassemblées dans Bologne, il en fit la donation en 1727.

Tout cela fini, tous ses projets heureusement terminés; il imita en quelque sorte Solon, qui après avoir été le Législateur de son Pays, & n'ayant plus de bien à lui faire, s'en exila. Il alla en 1728 retrouver sa retraite de Provence, pour y reprendre ses recherches de la Mer, & suivre en liberté ce génie d'observation qui le possédoit. Mais il eut en 1729 une légere attaque d'Apopléxie, & les Médecins le

renvoyerent dans l'air natal. Il ne fit qu'y languir jusqu'au 1 Nov. 1730. qu'une seconde attaque l'emporta. Tout Bologne fit parfaitement son devoir pour un pareil Citoyen, qui à l'exemple des anciens Romains avoit uni en même degré les Lettres & les Armes, & donné tant de preuves d'un amour singulier pour sa Patrie.



Fautes à corriger dans l'Histoire de 1729.

P*Age 1. ligne 6.* cessé encore, *lisés* encore peu brillé.
Page 36. l. 5. foliis, *lisés* petalis. *Et* Raii, *lisés* Rei.
Ligne 7. Et, *lisés* Ou.

MEMOIRES



MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Academie Royale des Sciences.

De l'Année M. DCCXXX.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES FAITES A AIX

Par M. de Montvalon, Conseiller au Parlement d'Aix.

Comparées avec celles qui ont été faites à Paris.

Par M. Cassini.

Observations sur la quantité de Pluye de l'année 1729.

	A Paris.	A Aix.
En Janvier	13 lignes $\frac{1}{2}$	10 lignes $\frac{16}{24}$
Février	5 $\frac{4}{6}$	8 $\frac{16}{24}$
Mars	8 $\frac{1}{6}$	5 $\frac{1}{24}$

	A Paris.	A Aix.
En Avril........	19 lignes $\frac{5}{6}$	24 lignes $\frac{1}{24}$
Mai.........	43 $\frac{5}{6}$	18 $\frac{11}{24}$
Juin.........	8 $\frac{5}{6}$	24 $\frac{1}{2}$
Juillet	22 $\frac{1}{6}$	4 $\frac{13}{24}$
Août	28 $\frac{3}{6}$	2 $\frac{13}{24}$
Septembre....	20	14 $\frac{9}{24}$
Octobre	13 $\frac{2}{6}$	19 $\frac{1}{2}$
Novembre....	8 $\frac{2}{6}$	73 $\frac{2}{3}$
Décembre	12 $\frac{1}{6}$	13 $\frac{4}{24}$

Somme totale de la Pluye tombée en l'année 1719 à Paris .... 204 lign. $\frac{2}{6}$ à Aix... 219 lign. $\frac{1}{6}$
ou 17 pouces $\frac{2}{6}$ ou 18 pouc. 3 lign. $\frac{2}{3}$

En comparant ensemble ces Observations, on trouve que la quantité de Pluye qui est tombée à Aix est plus grande de 15 lignes que celle que l'on a observée à Paris; on voit aussi que cette quantité de Pluye a été distribuée bien inégalement dans chaque mois, puisqu'il en est tombé pendant le mois de Mai à Paris 43 lignes $\frac{5}{6}$, & à Aix 18 lign. $\frac{11}{24}$, au mois d'Août à Paris 28 lignes $\frac{1}{2}$, & à Aix 2 lignes $\frac{1}{2}$, au lieu qu'au mois de Novembre il en est tombé à Paris 8 lign. $\frac{2}{6}$; & à Aix 73 lign. $\frac{2}{3}$.

Il paroît aussi que quoique la quantité de Pluye ait été en 1729 de même qu'en 1728 plus grande à Aix qu'à Paris, elle n'a pas gardé la même proportion que l'année précédente, où il a plû à Aix 24 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$, 8 pouces 8 lignes plus qu'à Paris.

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid est arrivé à Aix le 9 Janvier, le Thermometre étant descendu à 13 degrés $\frac{1}{2}$, qui répondent à 17 degrés $\frac{1}{2}$ du Thermometre de l'Observatoire.

A Paris le plus grand froid le 20 Janvier, le Thermometre

étant descendu à 9 degrés $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire, 8 degrés ou environ plus bas que le 9 Janvier à Aix.

La plus grande chaleur est arrivée le 20 Juillet à 3 heures après midi, le Thermometre étant monté à 81 degrés, que M. de Montvalon juge répondre à 80 degrés de celui de Paris.

A Paris le plus grand chaud est arrivé le 18 Juin à 3 heures après midi, où l'on observa le Thermometre à 78 degrés, plus bas seulement de 2 degrés que le 20 Juillet à Aix.

Sur le Barometre.

La plus grande hauteur du Barometre a été observée à Aix le 31 Décembre de 27 pouces 10 lignes après une grande pluye, plus basse de 6 lignes qu'à Paris, où il a été observé le 6 Février à 28 pouces 4 lignes.

La moindre hauteur a été à Aix le 21 Novembre à 26 pouces 11 lignes, plus basse de 2 lignes $\frac{1}{2}$ qu'à Paris, où il est descendu le 22 Février à 27 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ par un vent de Sud-oüest couvert.

Sur la Déclinaison de l'Aimant.

La déclinaison de l'Aimant a été observée à Aix de 14^d $0'$.

Elle a été observée à Marseille par le P. Pesenas, Professeur d'Hydrographie, de .... 14 50.



MEMOIRE

Sur le Criſtallin de l'Oeil de l'Homme, des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons.

Par M. PETIT le Médecin.

18 Janvier 1730.

LE Criſtallin eſt une partie tranſparente de l'Oeil, de figure lenticulaire, d'une ſubſtance molle, mucilagineuſe, mais aſſés ferme pour ſe contenir dans ſes propres bornes, enchaſſée dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un Diamant dans ſon Chaton, dans laquelle il eſt retenu par une Membrane qui l'enveloppe entiérement, & qui pour cela eſt appellée la *Capſule du Criſtallin.*

L'on ſçait que le nom de Criſtallin ne lui a été donné que parce qu'il eſt tranſparent comme un morceau de Criſtal; c'eſt apparemment à cauſe de cette tranſparence que les Anatomiſtes l'ont mis au nombre des Humeurs des Yeux, quoique les parties qui le compoſent ne ſoient point fluides.

Sa ſubſtance eſt d'une conſiſtance moyenne entre la fermeté & la liquidité; ſes parties ne ſe dérangent point par elles-mêmes les unes à l'égard des autres.

Il eſt d'une forme lenticulaire dans l'Homme, les Animaux à quatre pieds & les Oiſeaux. Il eſt ſphérique à peu de choſe près dans preſque tous les Poiſſons & les Serpents; il eſt plus applati dans l'Homme & dans le Singe que dans aucun autre animal, parce qu'il a moins de convéxité dans ſes ſurfaces, ſur-tout à ſa partie antérieure.

La circonférence du Criſtallin eſt ordinairement ronde; j'en ai pourtant trouvé dans l'Homme qui ne l'étoient pas, & dont le diametre étoit plus grand d'un quart de ligne d'un côté que de l'autre.

Le diametre de la circonférence du Criſtallin dans l'Homme a pour l'ordinaire 4 lignes, quelquefois 4 lign. $\frac{1}{4}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$;

je l'ai vû rarement de 3 lign. $\frac{3}{4}$ dans les Adultes, mais je l'ai ſouvent trouvé de 3 lign. $\frac{1}{2}$ dans les Enfants.

Son épaiſſeur eſt de 2 lignes & 2 lign. $\frac{1}{4}$ dans les Adultes, quelquefois d'une ligne $\frac{3}{4}$, mais dans les Enfants on le trouve de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

La convéxité antérieure du Criſtallin dans l'Homme fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 6 lign. 6 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 9 lignes, & quelquefois de 12 lignes; j'en ai même trouvé dans des gens âgés qui étoient preſque plans à leur partie antérieure de la longueur de 2 lignes, & dont la convéxité me paroiſſoit être une portion de ſphere de 25 à 30 lign. de diametre, cela eſt bien extraordinaire. On en trouve auſſi qui n'ont que 5 lign. $\frac{1}{2}$, mais rarement, à moins que ce ne ſoit dans quelques Enfants.

La convéxité poſtérieure fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 5 lign. rarement de 5 lign. $\frac{1}{2}$ & de 4 lign. $\frac{3}{4}$, à moins que ce ne ſoit des Criſtallins d'Enfants.

J'ai trouvé des Criſtallins dont les deux convéxités étoient égales. J'en ai vû auſſi de plus convexe à la partie antérieure qu'à la partie poſtérieure, & j'ai rencontré plus d'une fois, dans les Yeux du même Homme, un Criſtallin plus convexe à ſa partie antérieure qu'à la partie poſtérieure, l'autre Criſtallin étant dans ſon état naturel.

J'ai auſſi trouvé quelques Criſtallins dont la convéxité poſtérieure n'étoit point ſphérique, mais elle approchoit de la figure parabolique. *V. les Mem. de 1725. p. 14.*

Le Criſtallin de l'Homme peſe 4 grains, dans les Adultes quelquefois 4 grains $\frac{1}{4}$, rarement 4 grains $\frac{1}{2}$ & 3 grains $\frac{3}{4}$. Je l'ai trouvé dans les Enfants de huit ou dix ans peſant 3 grains, juſqu'à 3 grains $\frac{1}{2}$.

Il peſoit un grain $\frac{1}{2}$ dans un Fœtus de ſept mois, il n'avoit que 2 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur. Sa convéxité antérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 3 lignes de diametre, & la poſtérieure étoit de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin peſoit 2 grains dans un Fœtus de neuf mois.

Il avoit 2 lign. $\frac{2}{3}$ de diametre & 2 lignes d'épaiſſeur, & les mêmes convéxités que le précédent

Celui d'un Enfant de huit jours de naiſſance peſoit 2 grains. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & 2 lignes d'épaiſſeur. Sa convéxité antérieure faiſoit une portion de ſphere de 4 lignes de diametre, & la poſtérieure de 3 lignes.

Celui d'un Enfant de neuf jours de naiſſance peſoit 2 grains $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lignes de diametre, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Sa convéxité antérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 5 lignes, & la poſtérieure de 3 lign. $\frac{1}{2}$.

Il faut remarquer que le diametre du Criſtallin n'eſt pas toûjours proportionné à ſon épaiſſeur. J'ai trouvé des Criſtallins qui avoient 4 lignes de diametre & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur, d'autres 2 lignes, d'autres 2 lign. $\frac{1}{4}$, juſqu'à 2 lign. $\frac{2}{3}$. J'en ai trouvé avec 2 lignes d'épaiſſeur, qui avoient 3 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, 4 lignes, 4 lign. $\frac{1}{4}$, 4 lign. $\frac{1}{3}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$. J'ai vû dans un Homme de quarante ans les deux Criſtallins de différents diametres.

Les convéxités des Criſtallins ne ſont pas toûjours proportionnées à l'âge, elles diminüent pour l'ordinaire à meſure que l'on avance en âge, ce qui dépend de la contraction des Muſcles, comme nous le dirons dans un Mémoire particulier. Les Criſtallins ſe trouvent quelquefois auſſi convexes dans un homme âgé que dans un jeune homme. Leur groſſeur ne s'accorde pas toûjours avec leur peſanteur ; ils ſont d'autant plus peſants qu'ils ſont fermes, quoique de même groſſeur.

On peut voir toutes ces diverſités dans la Table ſuivante ; je les ai tirées d'un grand nombre d'Yeux que j'ai examinés.

Cristallins d'Hommes.

	Nombre.	Age.	Convéxité antérieure.	Convéxité postérieure.	Diametre ou Largeur.	Axe ou Epaisseur.	Pesanteur.
	1.	12.	7 lignes $\frac{1}{2}$.	5 lignes.	4 lignes.	2 lignes.	3 grains $\frac{1}{2}$.
	2.	15.	6 lign.	4 lign. $\frac{3}{4}$.	4 lign.	2 lign.	3 gr.
	3.	15.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	3 lign. $\frac{3}{4}$.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
	4.	20.	6 lign.	4 lign. $\frac{3}{4}$.	4 lign.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	4 gr.
	5.	25.	6 lign.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign. $\frac{2}{3}$.	4 gr. $\frac{3}{4}$.
Cristallins du même Homme.	6.	30.	6 lign.	5 lign.	4 lign.	1 lign. $\frac{3}{4}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
	7.	30.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	1 ligne $\frac{2}{3}$.	4 gr.
	8.	30.	6 lign.	6 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
	9.	30.	7 lign. $\frac{1}{4}$.	6 lign. $\frac{1}{4}$.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	1 ligne $\frac{3}{4}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
	10.	35.	9 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr.
Cristallins du même Homme.	11.	40.	6 lign.	8 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	12.	40.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign. $\frac{7}{8}$.	4 gr.
	13.	40.	6 lign.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	3 gr. $\frac{3}{4}$.
	14.	45.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	15.	45.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	1 ligne $\frac{2}{3}$.	4 gr.
	16.	50.	7 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
	17.	50.	7 lign.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
	18.	55.	6 lign. $\frac{1}{4}$.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr. $\frac{3}{4}$.
	19.	55.	11 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
	20.	60.	8 lign.	5 lign. $\frac{1}{4}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign. $\frac{1}{4}$.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	21.	60.	8 lign.	8 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
	22.	60.	8 lign.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	23.	60.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign.	4 lign. $\frac{3}{4}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{4}$.
	24.	60.	12 lign.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
	25.	60.	10 lign.	8 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	1 ligne $\frac{7}{8}$.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	26.	65.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign. $\frac{1}{4}$.	5 gr. $\frac{1}{2}$.

L'on voit dans cette Table des Cristallins de même âge avoir différents diametres & différentes épaisseurs.

Il y a des gens âgés de 60 ans qui ont la même épaisseur du Cristallin que des jeunes gens agés de 12, de 15, de 30, de 40 ans, avec les mêmes convéxités.

On voit des convéxités différentes avec la même épaisseur

& la même largeur. Et dans un homme âgé de 30 ans & un autre de 40, on y trouve ses deux Cristallins de différentes convéxités, de différents diametres & de différentes pesanteurs.

Il est bon d'avertir ici que les âges ont été déterminés sur la simple vûë du Cadavre, ce qui est sujet à quelque erreur, mais qui n'est pas de conséquence. Il est presque impossible de sçavoir l'âge de ceux qui meurent dans les Hôpitaux, principalement après leur décès, & lorsqu'ils sont une fois dans la Salle des Morts.

Le Singe est de tous les Animaux celui dont les parties approchent le plus de celles de l'Homme. Ses Yeux sont tout semblables à ceux de l'Homme; son Cristallin a les mêmes convéxités, peu s'en faut, il n'a pourtant que 3 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, jusqu'à 3 lign. $\frac{1}{2}$, & une ligne $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, jusqu'à une ligne $\frac{3}{4}$.

La convéxité antérieure du Cristallin du Cheval fait une portion de sphere dont le diametre a 12 lignes, jusqu'à 15. La convéxité postérieure fait une portion de sphere qui a 10 lignes, jusqu'à 11 lignes de diametre.

Le diametre ou la largeur de ce Cristallin est de 9 lignes, jusqu'à 10. Il a 6 lignes d'épaisseur, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il pese 58 grains, jusqu'à 66.

La convéxité de la partie antérieure du Cristallin de l'Oeil du Bœuf fait une portion de sphere dont le diametre est de 10, 11, 12 lignes, jusqu'à 12 lign. $\frac{1}{2}$. La convéxité de la partie postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 8 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 9 $\frac{1}{2}$, rarement de 9 lign. $\frac{3}{4}$ & de 8 lign.

La largeur ou le diametre de ce Cristallin est de 8 lignes, jusqu'à 8 lign. $\frac{1}{2}$, rarement de 8 lign. $\frac{3}{4}$. Son épaisseur est de 5 lign. $\frac{1}{4}$, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Sa pesanteur est de 38 grains, jusqu'à 54; j'en ai trouvé de 58 grains, mais très-rarement.

La facilité que l'on a d'avoir des Cristallins de Bœuf, est cause que j'en ai examiné une très-grande quantité, sur lesquels j'ai choisi un certain nombre pour faire la Table suivante, où l'on peut voir la plûpart des variétés que nous avons remarquées dans les Cristallins de l'Homme, car l'on y voit que la largeur du Cristallin n'y est pas toûjours proportionnée

à

à son épaisseur, & que leur grosseur ne s'accorde pas toûjours avec leur pesanteur : il y en a quelques-uns dont je n'ai pas examiné les convéxités.

Cristallins de Bœufs.

	Nombre.	Convéxité antérieure.	Convéxité postérieure.	Diametre ou Largeur.	Axe ou E'paisseur.	Pesanteur.
	1.	11 lignes ½.	9 lignes.	8 lignes ½.	5 lignes ½.	38 grains.
	2.	12 lign.	9 lign.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	38 gr.
	3.	12 lign. ½.	8 lign. ½.	8 lign.	5 lign.	38 gr.
Cristallins du même Bœuf.	4.	12 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	41 gr.
	5.	12 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ⅓.	5 lign. ½.	41 gr.
	6.	10 lign. ½.	9 lign.	8 lign.	5 lign. ½.	42 gr. ½.
	7.	11 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	43 gr. ½.
	8.	10 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ⅓.	5 lign. ⅓.	44 gr.
	9.	12 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	44 gr.
	10.	10 lign.	9 lign.	8 lign. ⅓.	5 lign. ⅓.	44 gr.
	11.	10 lign.	9 lign.	8 lign. ¼.	5 lign. ½.	44 gr.
	12.	10 lign. ¾.	8 lign. ¼.	8 lign. ¼.	6 lign.	44 gr. ½.
	13.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ½.	45 gr.
	14.	11 lign.	9 lign.	8 lign. ⅓.	5 lign. ½.	45 gr.
	15.	12 lign.	9 lign. ¼.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	46 gr.
	16.	....	....	8 lign.	6 lign.	46 gr.
	17.	12 lign.	9 lign.	8 lign.	5 lign.	47 gr.
	18.	12 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	47 gr.
	19.	12 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	47 gr.
	20.	10 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	47 gr.
	21.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ¼.	47 gr. ½.
	22.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ½.	48 gr.
	23.	12 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	48 gr.
	24.	....	....	8 lign. ⅔.	5 lign. ½.	48 gr.
	25.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	49 gr.
	26.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	49 gr.
	27.	10 lign. ¼.	....	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	49 gr. ½.
	28.	....	....	8 lign. ½.	6 lign. ½.	50 gr.
	29.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	50 gr.
	30.	12 lign.	9 lign.	8 lign. ¾.	5 lign. ¾.	50 gr.
	31.	....	....	8 lign. ½.	6 lign.	50 gr.
	32.	11 lign.	9 lign.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	50 gr.
	33.	9 lign. ½.	12 lign.	8 lign. ¾.	5 lign. ⅔.	51 gr.
	34.	....	....	8 lign. ¾.	5 lign. ½.	51 gr.
	35.	11 lign. ¼.	9 lign.	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	51 gr.
	36.	....	....	8 lign. ½.	6 lign. ½.	56 gr.

La convéxité de la partie antérieure du Cristallin du

Mouton fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 7 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 8 lignes. Sa convéxité poſtérieure fait une portion de ſphere, dont le diametre eſt de 6 lignes, juſqu'à 7.

La largeur ou le diametre eſt de 5 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Son épaiſſeur eſt de 4 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 4 lign. $\frac{3}{4}$. Il peſe pour l'ordinaire 24 grains, juſqu'à 28.

La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin de l'Oeil du Chien-dogue & de trois ou quatre Loups que j'ai diſſéqués, fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 6 lignes, juſqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. La convéxité de la partie poſtérieure eſt quelquefois égale à l'antérieure, mais pour l'ordinaire elle fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 5 lignes, juſqu'à 5 lign. $\frac{1}{2}$.

La largeur de ce Criſtallin eſt de 4 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 5 lign. & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur, juſqu'à 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il peſe 12 grains, juſqu'à 14.

Les Criſtallins des Yeux des gros Chats ne différent preſque point de ceux du Chien & du Loup.

J'ai diſſéqué les Yeux d'un ſeul Renard, la convéxité de la partie antérieure de ſes Criſtallins faiſoit la portion d'une ſphere de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la convéxité poſtérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre.

Ils avoient 5 lign. $\frac{1}{4}$ de largeur, & 4 lignes d'épaiſſeur. Ils peſoient chacun 12 grains.

On trouve preſque toûjours la convéxité de la partie antérieure du Criſtallin de l'Oeil du Liévre & du Lapin égale à la poſtérieure, elle fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 6 juſqu'à 7 lignes.

La largeur de ce Criſtallin eſt de 5 lign. 5 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 6, & ſon épaiſſeur eſt de 4 lign. $\frac{1}{4}$, juſqu'à 4 lign. $\frac{1}{2}$.

La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin des Yeux du Dindon & de l'Oye eſt la même; elle fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 4 lign. $\frac{1}{2}$ ou 5 lignes, aſſés ſouvent de 6 lignes, rarement de 7 lignes.

La convéxité de la partie poſtérieure fait la portion d'une

ſphere, dont le diametre eſt de 4 lignes, juſqu'à 5 lignes.

Ces Criſtallins ont 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, juſqu'à 4 lignes, & 2 lign. juſqu'à 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Ils peſent 3 grains, 3 grains $\frac{1}{2}$, juſqu'à 4 grains $\frac{1}{2}$.

Le Chat-huant, le Duc & la Choüette ont le Criſtallin de la même conformation, auſſi-bien que tout le globe de l'Oeil, qui eſt d'une ſtructure particuliére, comme je l'ai fait voir à l'Académie. La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin eſt plus grande que la poſtérieure, car cette partie antérieure fait la portion d'une ſphere qui a 6 lignes de diametre. La convéxité poſtérieure fait la portion d'une ſphere qui a 7 lign. de diametre.

Il a 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur.

Il peſe 14 grains, ce qui eſt digne de remarque, qu'un ſi petit Oiſeau ait un Criſtallin auſſi gros & auſſi peſant, en comparaiſon de ceux du Dindon & de l'Oye, dont les plus gros Criſtallins n'ont que 4 lign. de diametre, & 4 grains $\frac{1}{2}$ de peſanteur.

Le Criſtallin de la Choüette eſt plus petit que celui du Chat-huant & du Duc, il n'avoit que 4 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur, & peſoit 10 grains.

Les Criſtallins de la plûpart des Serpents & des Poiſſons ſont à peu-près ſphériques.

La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin d'un Marſoüin long de 5 pieds, faiſoit la portion d'une ſphere de 8 lignes de diametre, & la convéxité de la partie poſtérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre.

Ce Criſtallin avoit 6 lignes de diametre dans ſa circonférence, & 5 lignes d'axe ou d'épaiſſeur: il peſoit 24 grains.

Le Criſtallin d'un Marſoüin, de 4 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, faiſoit à ſa partie antérieure la portion d'une ſphere de 7 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 6 lignes.

Ce Criſtallin avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur: il peſoit 22 grains.

Le Criſtallin d'un Marſoüin, long de 3 pieds $\frac{1}{2}$, faiſoit à ſa

partie antérieure la portion d'une ſphere de 7 lign. de diametre, & la poſtérieure 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 19 grains.

Un Poiſſon appellé *Carpe de Mer*, long de 6 pieds, ſon Criſtallin faiſoit une portion de ſphere de 9 lignes de diametre par ſa convéxité antérieure, & par la poſtérieure elle étoit de 7 lignes.

Le diametre de ſa circonférence étoit de 6 lign. $\frac{3}{4}$, & ſon épaiſſeur de 6 lign. $\frac{1}{4}$: il peſoit 28 grains.

Le Criſtallin d'un Poiſſon nommé *Reluiſant*, long de 7 pieds, faiſoit à ſa partie antérieure une portion de ſphere de 10 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 9 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 9 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 9 lign. d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 111 grains.

Le Criſtallin d'un Poiſſon appellé *Negre*, long de 4 pieds, avoit une convéxité à ſa partie antérieure qui faiſoit une portion de ſphere de 7 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 6 lign. $\frac{1}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 32 grains.

Le Criſtallin d'un autre Negre, qui avoit 4 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 8 lign. de diametre, & la poſtérieure 6 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 6 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 6 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 36 grains.

Le Criſtallin d'un Saumon, qui avoit 2 pieds de longueur, avoit à ſa partie antérieure une convéxité qui faiſoit la portion d'une ſphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'un Eſpadon *(Gladius ſive Xiphias)* long de 3 pieds, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 10 lignes de diametre, & la poſtérieure 8 lignes $\frac{2}{3}$. Il avoit 8 lignes $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 8 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 72 grains.

Le Criſtallin d'une Aloze, longue de 21 pouces, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, la partie poſtérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'une autre Aloze, de 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa partie antérieure une portion de ſphere de 4 lign. de diametre, & la poſtérieure de 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains.

Le Criſtallin d'un Poiſſon appellé *Pucelle*, long de 14 pouc. faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{1}{3}$.

Le Criſtallin d'un Brochet, de 2 pieds de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 6 grains.

Le Criſtallin d'un Brochet, de 32 pouces de longueur, avoit les mêmes dimenſions & le même poids.

Le Criſtallin d'un Barbeau ou Barbillon, qui avoit 18 pouc. de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lignes de diametre, & la poſtérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 4 grains.

Le Criſtallin d'un autre Barbeau, qui avoit 2 pieds de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lign. de diametre, & la poſtérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 6 grains.

Le Criſtallin d'une Carpe, qui avoit 15 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 3 lignes de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit

2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'un Maquereau, qui avoit 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. de diametre, & la poſtérieure 3 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{3}{4}$.

Le Criſtallin d'un autre Maquereau, de 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 4 lign. $\frac{1}{3}$ de diametre, & la poſtérieure de 3 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{8}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Criſtallin d'un autre Maquereau, de 13 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{2}{3}$. Il avoit 2 lign. $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'un Merlan, qui avoit 12 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 3 lignes $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Criſtallin d'un autre Merlan, de 12 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lignes de diametre, & la poſtérieure 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 4 grains.

Le Criſtallin d'un Chien de Mer, qui avoit 3 pieds 3 pouc. de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 5 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 18 grains.

Le Criſtallin d'un autre Chien de Mer, long de 2 pieds $\frac{1}{2}$; faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 5 lignes. Il avoit

5 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 16 grains.

Le Criſtallin d'une Raye appellée *Ange*, longue d'un pied $\frac{1}{2}$ ſans la queüe, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 4 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lign. $\frac{1}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 17 grains.

Le Criſtallin d'une autre Raye appellée *Bouclée*, longue de 2 pieds ſans la queüe, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 6 lign. $\frac{1}{4}$ de diametre, & la poſtérieure de 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 5 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaiſſeur ou d'axe. Il peſoit 18 grains.

Le Criſtallin d'un Rouget, qui avoit 10 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 5 lignes de diametre, & la poſtérieure de 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 8 grains $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'un Hareng faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 2 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'un autre Hareng faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 3 lignes de diametre, & la poſtérieure de 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de la circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Il peſoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'une Tanche faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & la poſtérieure de 2 lignes. Il avoit 2 lignes de largeur, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit un grain.

Le Criſtallin d'une Anguille d'eau douce faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains.

Le Criſtallin d'une Anguille de Mer faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 5 lignes. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 14 grains.

Le Criſtallin d'une Lamproye étoit tout ſemblable à celui de l'Anguille d'eau douce.

Le Criſtallin d'une Lote faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure d'une ligne $\frac{3}{4}$. Il avoit une ligne $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & une ligne $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit $\frac{3}{4}$ de grains.

J'ai trouvé dans les Criſtallins de la plûpart des Viperes & des Aſpics les mêmes dimenſions & les mêmes poids.

Le Criſtallin d'une Loutre, que j'ai diſſéquée, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'une Tortüe, qui avoit 2 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, ſans y comprendre la tête ni la queüe, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit de largeur ou de diametre de ſa circonférence 2 lign. $\frac{1}{4}$, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'une groſſe Grenoüille faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lignes. Il avoit de largeur ou de diametre de ſa circonférence 2 lignes, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'une moyenne Grenoüille ne peſoit qu'un grain, & avoit les dimenſions plus petites.

Morgagni advers. 6. p. 90. Il faut encore remarquer que plus les Animaux ſont jeunes, le Criſtallin ſe trouve d'autant plus mou. Il eſt d'une molleſſe qui reſſemble à celle de la boüillie refroidie dans les Fœtus & les nouveau-nés, il eſt même plus mou au centre qu'à la circonférence,

circonférence, ce qu'il eſt facile de remarquer dans les Criſtallins de Veaux & d'Agneaux.

Si l'on fait ſécher ces Criſtallins, il s'en évapore les deux tiers ou les trois quarts, & l'on trouve une cavité au dedans, ou bien il ſe fait un enfoncement ſur l'une des deux ſurfaces, quelquefois ſur toutes les deux la même choſe arrive aux Criſtallins d'Enfants nouveau-nés, mais ſi l'on met ſécher des Criſtallins d'Hommes de l'âge de 50 à 60 ans, il ne ſe fait aucun enfoncement qui ſoit conſidérable, & qui d'ailleurs ne provient que de la molleſſe de la partie extérieure, il s'en évapore ſeulement le tiers ou le quart, ce qui arrive de même aux Criſtallins des autres Animaux, dont l'évaporation ſe fait à proportion de leur âge. Ces Criſtallins, qui ſont d'une ſi grande molleſſe dans le premier âge, deviennent peu-à-peu plus ferme, enſorte que dans l'Homme de 15 ou 20 ans la conſiſtance du Criſtallin ſe trouve égale au centre & à la circonférence, ce que l'on remarque auſſi dans les Criſtallins de Veaux de deux mois, ou deux mois & demi, & dans ceux d'Agneaux de ſix ſemaines ou deux mois. La partie centrale commence à devenir plus ferme dans l'Homme à l'âge de 20 ou 25 ans; cette fermeté s'augmente & s'étend peu-à-peu vers la circonférence, qui devient auſſi plus ferme, mais quelque fermeté qu'elle acquiert, elle l'eſt rarement autant que la partie centrale.

Les Criſtallins ſont non ſeulement d'autant plus fermes que les Animaux ſont plus âgés, mais ceux des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons le ſont plus que ceux de l'Homme. Les Criſtallins des Yeux de Dindon, d'Oye, de Cheval, de Bœuf, de Mouton, & âgés d'un an, ſont plus fermes que ceux d'Hommes âgés de 25 ans.

Les Criſtallins ſe trouvent d'autant plus fermes, qu'ils ſont plus gros à proportion de leur âge. Ceux de Chevaux le ſont plus que ceux de Bœufs, qui le ſont plus que ceux de Moutons, & ceux-ci que ceux de Chiens & de Chats.

Ceux des Animaux à quatre pieds ſont plus fermes que ceux des Oiſeaux, mais ceux des Poiſſons ſont beaucoup plus

fermes que ceux de Chevaux & de Bœufs, ensorte que la partie centrale des Cristallins des Poissons a une fermeté qui approche quelquefois de la dureté de la Corne; il est vrai que la substance externe de ces Cristallins est plus molle que celle des autres Cristallins (ce que Morgagni a remarqué) car elle est mucilagineuse, ce que j'ai vû aussi dans le Cristallin de la Loutre, animal à quatre pieds, mais aquatique.

Advers. 6. p. 90.

Il y a encore une chose singuliére qui arrive aux Cristallins des Yeux de l'Homme, & que je n'ai vûë dans aucun des Cristallins des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons.

Le Cristallin de l'Homme est transparent & sans couleur depuis la naissance jusqu'à l'âge de 25 ans ou environ, après quoi il commence à prendre dans le centre une couleur jaune de paille très-légere qui augmente à mesure que l'on avance en âge; la couleur devient peu-à-peu plus jaune, & s'étend vers la circonférence. J'ai vû les Cristallins d'un Invalide âgé de 81 ans, qui ressembloient par leur couleur & leur transparence à des morceaux d'Ambre jaune bien transparents; & plus les Cristallins sont fermes, plus ils sont jaunes. Mais quelque fermeté qu'ayent les Cristallins des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons, je n'en ai trouvé aucun qui eût la moindre couleur. Il y a des Cristallins de Chevaux, mais peu, qui acquiérent cette couleur en séchant à l'air, ils n'avoient aucune couleur dans le temps que je les ai tirés des Yeux. Les Cristallins de Poissons, qui sont plus fermes que ceux de Chevaux, ne jaunissent point en séchant. J'ai quelquefois trouvé dans le même Homme un Cristallin plus jaune que l'autre.

V. les Mem. de l'Acad. an. 1726. p. 81. & 82.

Venons présentement à la structure du Cristallin. Il est formé & composé de fibres agencées les unes contre les autres dans un certain ordre. On voit assés facilement ces fibres dans un Cristallin nouvellement tiré de l'Oeil d'un Bœuf. On frotte un Scalpel d'huile, on l'enfonce environ de l'épaisseur d'une demi-ligne, plus ou moins, au centre d'une des surfaces de ce Cristallin, puis on ramene le Scalpel vers la circonférence,

en déchirant la ſubſtance du Criſtallin, on voit les fibres du Criſtallin qui forment des pellicules poſées les unes ſur les autres. On découvre facilement ces pellicules dans les Criſtallins ſéchés à l'air, mais on ne voit point les fibres. On découvre encore mieux l'un & l'autre dans ceux que l'on a fait boüillir dans l'eau.

Voici les expériences que j'ai faites pour cela avec des Criſtallins de Bœufs.

J'ai pris un Criſtallin de Bœuf qui peſoit 48 grains, il avoit 8 lignes $\frac{1}{2}$ de diametre, & 5 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Je l'ai laiſſé ſécher à l'air au mois de Juillet. Au bout de quatre jours il ne peſoit plus que 22 grains. Il avoit 7 lignes de diametre, & 4 lignes $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur, mais ſes ſurfaces étoient très-inégales, boſſelées, plus épaiſſes en des endroits que dans d'autres. Il étoit blanc, opaque à ſa partie extérieure, tranſparent à ſa partie interne, mais non pas de cette tranſparence dont il étoit lorſque je l'ai tiré de l'Oeil. La partie externe étoit feüilletée, la partie interne étoit égale, & s'enlevoit par piéces qui reſſembloient à des côtes de Melon, le tout ſe réduiſoit facilement en poudre.

J'ai laiſſé ſécher beaucoup d'autres Criſtallins, il s'en eſt trouvé qui peſoient 50 grains, qui étant ſéchés, ne peſoient plus que 12 grains ; d'autres peſant 46 grains, peſoient 30 grains étant ſecs. Les Criſtallins qui perdent le plus de leur peſanteur, ont moins de matiére tranſparente, & plus de cette matiére feüilletée, blanche & opaque ; & ceux qui conſervent le plus de leur peſanteur, ont moins de matiére blanche & opaque, & plus de matiére tranſparente. En général on leur trouve d'autant plus de matiére tranſparente, étant ſéchés, qu'ils ſont naturellement plus fermes & d'Animaux plus âgés ; c'eſt ce qui fait que l'on rencontre rarement de la ſubſtance tranſparente dans les Criſtallins de l'Homme qui ſont ſéchés ; ils ſe réduiſent preſque entiérement en matiére blanche en ſéchant, &, comme je l'ai dit, perdent quelquefois les trois quarts de leur peſanteur. Les Criſtallins de Veaux, & de tous les jeunes Animaux, perdent, en ſéchant, auſſi les trois

quarts de leur pesanteur & plus, & l'on n'y trouve point de matiére transparente. Les Cristallins sont beaucoup plus mous à leur partie extérieure qu'à leur partie interne; lorsque l'humidité, qui cause cette mollesse, vient à s'évaporer, elle laisse des espaces vuides, les parties solides se rapprochent les unes des autres, mais inégalement, ainsi les plans ne se trouvant plus paralleles les uns à l'égard des autres, la matiére lumineuse qui y passe, trouve incessamment des plans inclinés, se rompt & se refléchit d'une infinité de maniéres, ce qui rend le corps opaque, comme il arrive au Verre pilé & au Sablon, composés d'une infinité de parties toutes transparentes.

Traité de l'Oeil, ch. 4. Briggs dit que les Cristallins mis dans une cuillier d'argent exposée sur les charbons ardents, se réduisent en gelée: je ne sçais s'il a obmis de rapporter quelques circonstances, j'ai fait cette expérience comme il le dit, bien-loin de se réduire en gelée, ils se grillent après que toute l'humidité est évaporée, il n'y reste le plus souvent point de matiére transparente, parce que l'humidité qui se trouve dans toute la substance du Cristallin est poussée avec trop de force par la chaleur, & dérange les parties internes du Cristallin.

J'ai mis tremper un Cristallin dans l'eau froide, il pesoit 44 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, 5 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Je l'ai retiré 26 heures après, il pesoit 56 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lign. $\frac{2}{3}$ de diametre & 6 lign. $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. J'en ai mis tremper d'autres, qui ont donné bien des variétés: plus ils sont fermes, plus ils grossissent, & fendent quelquefois leur capsule, & pour lors ils se trouvent très-inégaux, & toûjours très-mous; si on les laisse tremper plus long-temps, ils se réduisent en mucilage.

Les Cristallins boüillis dans l'eau, deviennent opaques & fermes; leur surface reste quelquefois réguliére, & quelquefois irréguliére. Ces Cristallins diminüent dans leur poids & leurs dimensions, puis exposés à l'air encore tout chauds, se séchent bien vîte, & se fendent d'abord en trois parties à leurs surfaces antérieures & postérieures. Chacune de ces parties

ſe diviſe en pluſieurs autres, & par ce moyen on peut découvrir leur ſtructure, mais cela ſe fait encore mieux dans les Criſtallins trempés dans les Eſprits acides, ce qui m'a engagé de faire quantité d'expériences dans leſquelles j'ai employé beaucoup de Criſtallins de Bœufs, & très-peu de Criſtallins d'Hommes, parce qu'ils ſont trop petits & trop mous.

V. M. Antoine Maîtrejean, Deſcript. de l'Oeil, ch. 11.

J'ai mis dans l'Eſprit de Nitre un Criſtallin d'Homme qui peſoit 4 grains; il avoit 4 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, & 2 lign. d'épaiſſeur. Il a tout auſſi-tôt blanchi, il nageoit ſur la liqueur. Je l'ai retiré 24 heures après, il n'avoit plus de capſule, elle étoit diſſoute.

Le Criſtallin étoit devenu jaune-pâle, ſes ſurfaces étoient encore unies & polies. Il peſoit 4 grains, il avoit 4 lignes de diametre, & 2 lignes d'épaiſſeur. Étant reſté quelque temps à l'air, il s'eſt fendu en pluſieurs rayons de la circonférence au centre; il s'eſt ſéparé par piéces qui reſſembloient à des côtes de Melon, & par fibres très-fines de la groſſeur des fils de Soye grege, elles étoient jaunâtres. Tous les Criſtallins d'Hommes que j'ai mis dans l'Eſprit de Nitre, ont été de même, à peu de choſe près. Les plus mous ſe diſſolvent tant ſoit peu, ils diminüent de poids, & reſtent plus mous que les autres.

J'ai mis dans l'Eſprit de Nitre un Criſtallin de Bœuf, il peſoit 47 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre ou de largeur, & 6 lignes d'épaiſſeur. La capſule s'eſt d'abord fendüe, & s'eſt ſéparée du Criſtallin qui nageoit ſur la liqueur, elle eſt devenüe jaune, le Criſtallin a blanchi tout auſſi-tôt, il s'eſt formé beaucoup de bulles, la capſule s'eſt preſque entiérement diſſoute. J'ai retiré le Criſtallin 24 heures après, il étoit jaune à ſa ſurface. Il peſoit 52 grains, il eſt augmenté de 4 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lignes de diametre, & 5 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Il avoit donc diminué de demi-ligne dans ſon diametre, & de deux tiers de ligne dans ſon épaiſſeur, quoiqu'il eût augmenté de poids. Il étoit fendu en trois rayons du centre à la circonférence, il s'eſt ſéché à l'air en 24 heures, & il s'eſt diviſé en piéces qui reſſembloient à des côtes de Melon, qui ſe ſont

séparées en peau, qui étoient jaunes de Safran, & ses peaux en fibres très-déliées comme le Cristallin de l'Homme.

Tous les Cristallins de Bœufs que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre pur, ont donné les mêmes phénomenes. Il y en a qui n'ont augmenté que d'un grain, d'autres ont diminué de 5 ou 6 grains, quelques-uns ont eu la surface très-inégale, molle, ensorte que je n'ai pû en mesurer les dimensions, & n'ont pû se sécher à l'air qu'en trois fois 24 heures, il s'en est trouvé qui étoient mous dans le centre, & d'autres fermes dans toute leur substance.

J'ai mis un Cristallin d'Homme dans un mêlange de partie égale d'Esprit de Nitre & d'Eau commune, il pesoit 4 grains $\frac{1}{4}$, il avoit 4 lign. $\frac{1}{3}$ de diametre, & 2 lignes d'épaisseur. Il a blanchi dans le moment par rayons, il nageoit sur la liqueur, mais le lendemain il s'est trouvé au fond. Je l'ai retiré 24 heures après, il étoit opaque, dur, jaunâtre, fendu en quatre rayons, enveloppé de sa capsule, qui est restée transparente. Il pesoit 4 grains, il avoit 4 lignes de largeur, & 2 lignes d'épaisseur. Il avoit donc diminué d'un quart de grain, & d'un tiers de ligne dans son diametre.

J'ai mis un Cristallin de Bœuf dans le même mêlange d'Esprit de Nitre & d'Eau, il pesoit 49 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. $\frac{2}{3}$ d'épaisseur. Il a d'abord nagé sur la liqueur, & est devenu blanc en une demi-minute, une heure & demie après il étoit précipité au fond de la liqueur. Je l'ai retiré, il s'est trouvé blanc, opaque, fendu en six rayons du centre de sa surface antérieure jusqu'auprès de sa circonférence. Je l'ai remis dans la liqueur, le lendemain je l'ai trouvé nageant sur la liqueur, je l'ai retiré, il étoit jaune de paille, dur, opaque, fendu plus profondément qu'il n'étoit le jour précédent. Il avoit 8 lignes de diametre ou de largeur, & 5 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 44 grains sans membrane qui pesoit un grain $\frac{1}{2}$, elle étoit transparente. Ce Cristallin a donc diminué dans ses dimensions & dans sa pesanteur.

La même chose est arrivée à un autre Cristallin dans une pareille liqueur.

Les Criſtallins mis dans l'Eſprit de Sel dulcifié, ont eu les mêmes phénomenes que ceux qui ont été mis dans l'Eſprit de Nitre mêlé avec moitié Eau.

Les Criſtallins que j'ai mis dans l'Eſprit de Sel, ont donné à peu-près les mêmes phénomenes que ceux que j'ai mis dans l'Eſprit de Nitre pur. Ils ont nagé ſur cet Eſprit ; ils ont blanchi tout d'abord, puis ils ſont devenus jaunes, ils ſe ſont fendus par rayons, la membrane ou capſule s'eſt diſſoute dans quelques expériences, elle s'eſt trouvée toute entiére dans d'autres, & tranſparente. Ils ont diminué dans leurs dimenſions, mais ce qu'il y a de différent, ils ont toûjours diminués de poids depuis 5 grains juſqu'à 10, & ces Criſtallins étant gardés, ſont toûjours devenus bruns ou noirs, au lieu que les Criſtallins, mis dans l'Eſprit de Nitre & ſéchés, ſont reſtés jaunes de Safran ou aurore.

Les Criſtallins mis dans l'Eſprit de Vitriol pur, ont eu les mêmes phénomenes que ceux qui ont été mis dans le mêlange d'Eſprit de Nitre & d'Eau commune. Il y a cela de différent : les Criſtallins, tant d'Hommes que de Bœufs, ſont devenus blancheâtres dans l'Eſprit de Vitriol, ils ont moins diminué dans leur peſanteur & dans leurs dimenſions, principalement ceux de Bœufs, & ils ne ſe ſont fendus qu'après avoir été expoſés à l'air & un peu ſéchés. Les Criſtallins d'Hommes ont d'abord nagé ſur la liqueur, mais le lendemain ils ſe ſont trouvés au fond ; les Criſtallins de Bœufs ont été au fond de la liqueur auſſi-tôt qu'on les y a mis, & ſont devenus tous blancs.

V. M. Antoine Maîtrej. Deſcr. de l'Oeil, c. 11. du Criſtallin.

La même choſe arrive aux Criſtallins trempés dans égale partie d'Eſprit de Vitriol & d'Eau, mais il faut les y laiſſer plus long-temps. Ils n'ont point diminué de peſanteur, il y en a même qui ont augmenté de 2 grains, juſqu'à 4 grains.

J'ai mis des Criſtallins de Bœufs dans l'Eſprit de Vinaigre, ils ont tous augmenté dans leur poids & leurs dimenſions ; il y en a quelques-uns qui expoſés à l'air, ſe ſont fendus très-réguliérement en ſéchant, mais les autres ſe ſont trouvés irréguliers.

La plûpart des Criſtallins que j'ai mis dans l'Huile de Vitriol, ſont devenus d'un jaune-brun, opaques, mous comme de la pâte, très-irréguliers & inégaux à leur ſurface externe. Si on les expoſe à l'air, ils deviennent d'un brun noir, & ne ſe ſéchent jamais bien, la membrane s'eſt diſſoute; l'Huile de Vitriol dulcifiée les a rendus opaques, blancs.

Le mêlange d'égale partie d'Huile de Vitriol & d'Eau commune produit le même effet ſur les Criſtallins que l'Eſprit de Vitriol pur.

Nous venons de voir que les Criſtallins trempés 24 heures, plus ou moins, dans les Eſprits acides de Vitriol, de Vinaigre, deviennent opaques, blancs, auſſi-bien que ceux qui ont trempé dans l'Eſprit de Nitre ou de Sel, affoiblis avec de l'Eau. Ces Criſtallins ſe fendent quelquefois dans le temps même qu'ils trempent dans la liqueur, mais pour l'ordinaire ils ne ſe fendent qu'après en avoir été retirés, & avoir été expoſés à l'air pendant quelque temps, & pour lors ils ſe fendent plus ou moins réguliérement en pluſieurs endroits de leurs ſurfaces antérieures & poſtérieures.

Si l'on ſépare ces parties les unes des autres, on les trouve à peu-près ſemblables aux piéces d'un Oignon qu'on auroit coupé par ſon axe en pluſieurs parties: on peut les ſéparer par pellicules, qui jointes & unies enſemble, forment des enveloppes qui ſont emboîtées les unes dans les autres. Chacune de ces pellicules eſt formée par une infinité de filets courbes & déliés comme des fils de Soye grege, comme je l'ai déja dit, & aſſemblés les uns contre les autres à peu-près parallelement.

Tous les Criſtallins ne ſe fendent pas de la même maniére. Ceux d'Hommes ſe fendent de la circonférence au centre; les fentes commencent à ſe former à la circonférence, & ſe continüent vers le centre, où le plus ſouvent elles n'arrivent pas. Il y a rarement de la régularité dans ces fentes. Ceux de Poiſſons commencent toûjours au centre des deux ſurfaces antérieure & poſtérieure, & ſe continüent d'une ſurface à l'autre.

Les

Les Criſtallins des Animaux à quatre pieds, que nous avons diſſéqués, ſe fendent auſſi du centre de leur ſurface à la circonférence, le plus ſouvent aſſés réguliérement, & ces fentes ſe trouvent diſpoſées de trois maniéres différentes, mais toûjours en rayons.

Dans la premiére les fentes ſe trouvent ſelon la rectitude des fibres, du centre à la circonférence, qui diviſent le Criſtallin en trois parties, chacune deſquelles eſt diviſée en ſix autres, dont chacune forme un angle.

Dans la ſeconde on trouve des Criſtallins diviſés en trois parties, du centre à la circonférence, mais non pas ſelon la rectitude des fibres, car la diviſion ſe fait dans les angles de la premiére ſorte, ce qui fait que chacune de ces trois parties ſe trouve diviſée en douze parties ſelon la rectitude des fibres, mais non pas du centre à la circonférence.

Dans la troiſiéme les Criſtallins ſe diviſent d'abord en trois parties comme dans la premiére maniére, puis ils ſe diviſent en trois autres ſemblables à la ſeconde, mais ces fentes & ces diviſions ſont rarement réguliéres, car il ſe trouve quelquefois plus de diviſions, quelquefois moins, ce qui dépend du plus ou du moins d'adhérance des fibres les unes aux autres qui compoſent le Criſtallin.

Quoiqu'il en ſoit, chaque couche dont le Criſtallin eſt compoſé, eſt produite par une fibre, qui en paſſant & repaſſant de la partie antérieure à la poſtérieure, & de la partie poſtérieure à la partie antérieure, forme le plan de fibres qui produiſent ces couches, à peu-près de la même maniére que Leeuwenhoek, qui a donné tant de belles obſervations faites avec le Microſcope, les repreſente. Il ne dit point qu'il ait mis tremper les Criſtallins dans aucune liqueur, & ne dit pas les moyens dont il s'eſt ſervi pour les préparer, & rendre ces fibres palpables, il paroît ſeulement qu'il a examiné ces Criſtallins tirés nouvellement des Yeux, & qu'il en a examiné d'autres qui ont été expoſés à l'air pendant trois jours. Il s'eſt ſans doute ſervi du Microſcope, quoiqu'il n'en faſſe aucune mention, pour moi je n'ai pû découvrir cette ſtructure par

Arcan. natur. detect. tom. 2. p. 66. de formatione Criſtallini.

aucun Microſcope. Je me ſuis ſervi de Loupes de 6 à 7 pouces de foyer pour mieux découvrir les fibres des Criſtallins que j'ai mis tremper dans les Eſprits acides, mais on peut s'en paſſer; on peut même ſe ſervir de Verre d'un plus petit foyer ſelon la diſpoſition des Yeux, il y a des gens qui découvrent mieux les fibres du Criſtallin avec un Verre de 2 pouces $\frac{1}{2}$ & 3 pouces de foyer, qu'avec des Verres qui en ont plus ou moins.

SOLUTION FORT SIMPLE D'UN PROBLEME ASTRONOMIQUE;

D'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes.

Par M. GODIN.

PROBLEME.

25 Février 1730.

TROUVER le point de l'Ecliptique où le mouvement du Soleil en aſcenſion droite eſt égal à ſon mouvement en longitude.

Figure 1.

SOLUTION. Soit *EQ* un quart de l'Equateur, *EC* un quart de l'Ecliptique, *pPCQ* le Colure des Solſtices, *p* le Pole de l'Ecliptique, *P* celui de l'Equateur, *PE* un Méridien mené par l'un des Equinoxes. Soit *S* le point cherché ſur l'Ecliptique, & *Y* un autre point auſſi ſur l'Ecliptique infiniment proche du premier, & *YZ* une portion d'un parallele à l'Equateur, on aura le petit Triangle *SZY* qu'on peut conſidérer comme plan & rectiligne, dont l'angle *YSZ* eſt égal à l'angle *PSC* du triangle ſphérique *PSC*. Si par le point *Y* on mene un autre Méridien *PYT*, la queſtion ſe réduit à trouver le point *S* de l'Ecliptique, tel que l'arc *SY* ſoit égal à l'arc *RT* de l'Equateur.

Dans le Triangle sphérique *PCS* rectangle en *C*, on aura cette proportion,

Sin. *PS* : Sin. *PC* :: Rayon : Sin. *PSC*;

& dans le petit Triangle on aura

YS : *YZ* :: Rayon : Sin. *YSZ* = *PSC*,

& parce que *TR* = *YS*,

TR : *YZ* :: Rayon : Sin. *YSZ*,

mais on aura aussi cette autre proportion,

TR : *YZ* :: Rayon : Sin. *PZ* ou *PS*.

En comparant les deux derniéres analogies, il suit que le sinus de l'angle *YSZ* ou *PSC* est égal au sinus de l'arc *PS*.

Pour trouver la valeur de cet arc, multipliez par la premiére analogie le sinus de *PC* complément de l'obliquité de l'Ecliptique par le Rayon, le produit sera le quarré du sinus de l'arc *PS* ou de l'angle *PSC*; & en logarithmes, si l'on ajoûte le logarithme du sinus de 66° 31' au logarith. du sinus total, la moitié de la somme sera le logarithme du sinus de l'arc *PS* qu'on trouvera de 73° 16' 27", son complément *SR* sera donc de 16° 43' 33" pour la déclinaison du Soleil au point *S* au temps de son mouvement en longitude égal à son mouvement en ascension droite, & sa distance *SE* au plus proche Equinoxe se trouvera par cette analogie

Sin. *CQ* : Sin. *SR* :: Sin. *EC* ou le Rayon : Sin. *ES* qu'on trouvera de 46° 14' 17", & par conséquent *SC* de 43° 45' 43" à quelques secondes près de ce qui est dans les Tables de M. de la Hire.

Si l'inclinaison de l'Orbite d'une Planete étoit de 15°, le point cherché *S* seroit éloigné du point *C* de 44° 29' 40"; & si cette inclinaison étoit de 1° seulement, cet arc *SC* seroit de 44° 40' 15", car cet arc s'approche d'autant plus de 45° que l'inclinaison est petite, & au contraire; pour 85 degrés d'inclinaison, par exemple, il est de 16° 18' 50", ce qui paroîtra évident, si l'on considere que le sinus de l'arc *PS* doit toûjours être moyen proportionnel entre le rayon & le sinus de *PC*, car dans la premiére analogie, en permutant, on aura Sin. *PC* : Sin. *PS* :: Sin. *PSC* = Sin. *PS* : Rayon;

& par conséquent plus le ſinus de PC approchera de la grandeur du rayon, c'eſt-à-dire, moins l'arc CQ ou l'inclinaiſon de la Planete ſera grande, & plus la moyenne proportionnelle PS approchera auſſi du rayon, & par conſéquent le point S du point E; ce ſera le contraire, ſi PC eſt plus petite.

On ſe ſervira de la même Méthode pour toutes les Planetes, ſuivant les différentes inclinaiſons de leurs Orbites à l'Ecliptique & à l'Equateur.

Regiomont. Epitom. Almag. lib. 3. prop. 25. Voyés auſſi *Kepler. Epitom. lib. 3. p. 258.*

Regiomontanus a réſolu ce Probleme par les plus grands & les plus petits rapports entre les ſinus des arcs de déclinaiſon & de leurs compléments, & les ſinus des arcs, diſtances de ces points à l'un des Equinoxes; il trouve 46° 15′ pour l'arc ES, ou 43° 45′ pour SC; mais ſuppoſant ſon obliquité de l'Ecliptique de 23° 28′, moindre que celle que je ſuppoſe de 23° 29′, il devoit trouver l'arc SC plus grand d'une minute entiére ou environ; ce qui doit venir de ſon calcul.

Stevin. Hypomnem. mathem. tom. 1. coſmogr. part. 3. de mot. cæleſt. p. 148. & ſeq.

Stevin a auſſi réſolu le Probleme d'après *Regiomontanus*, & par la même méthode, il a prétendu l'éclaircir, mais il l'a rendu trop diffuſe. Il ſuppoſe l'obliquité de l'Ecliptique de 23° 51′ 20″, d'où il trouve l'arc SC de 43° 43′ 16″ $\frac{1}{4}$.

Mem. de l'Acad. 1704. p. 134.

Enfin M. *Parent* en a donné une Solution dans laquelle il employe le Calcul différentiel: je crois l'avoir réſolu plus ſimplement, & d'une maniére plus aſtronomique.

Dans l'ancienne démonſtration de *Regiomontanus*, on ſuppoſe que le point S eſt tellement pris, que l'arc PS eſt moyen proportionnel entre le rayon & le ſinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique, mais on n'y démontre pas pourquoi cela donne la ſolution du Probleme.

Dans celle de M. *Parent* il trouve la Tangente de la diſtance du Solſtice au point S, moyenne proportionnelle entre le rayon & le ſinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique, d'où il ſuit que cette Tangente eſt égale au ſinus, complément de la déclinaiſon du Soleil au point S de ſon mouvement médiocre.

Si l'on connoissoit le lieu du point *S* dans l'Ecliptique, indépendamment du lieu des points *E* & *C*, c'est-à-dire, quelle que fût la longitude de ces points, en connoissant seulement la plus grande distance *CQ* de l'Orbe *EC* à l'Orbe *EQ*, on détermineroit la longitude de ces points *E* & *C*; & par conséquent 1.° si *EQ* représente l'Ecliptique, & *EC* l'Orbite d'une Planete, connoissant l'inclinaison *CQ* de cet Orbite à l'Ecliptique, on trouvera par la méthode ci-dessus, la valeur des arcs *SR*, *SC*, & *SE*; & trouvant par observation le lieu de la Planete en *S* dans le temps que son mouvement *SY* sur son Orbite est égal à son mouvement en longitude *TR* sur l'Ecliptique, ou bien observant ce lieu *S* dans le temps que l'inclinaison apparente *SR* de la Planete est égale à celle qu'on a déterminée par calcul, on aura aussi le lieu des points *C* & *E*, c'est-à-dire, des limites & des Nœuds de cette Planete; le Nœud, par exemple, aura une plus grande longitude que le point *S* de tout l'arc déterminé *SE*, si la latitude de la Planete va en décroissant, & au contraire elle sera moindre, si la latitude va en augmentant. Figure 1.

2.° Si *EC* est toûjours l'Orbite de la Planete, & que *EQ* soit l'Equateur, connoissant par observation la plus grande déclinaison *CQ* de la Planete, on déterminera comme ci-dessus les valeurs de *SR*, *SC*, & *SE*; observant donc le lieu de la Planete, lorsqu'elle a une déclinaison *SR* égale à la calculée, ou lorsque son mouvement sur son Orbite est égal à son mouvement en ascension droite, on aura l'ascension droite du point *S* ou *R*, & par conséquent celles des points *E* & *C*, c'est-à-dire, qu'on connoîtra le point de l'Equateur où l'Orbite de la Planete le coupe, & le point de l'Equateur auquel répondent les limites de cet Orbite.

Mais connoissant le point où l'Orbite d'une Planete coupe l'Equateur, & le point où l'Ecliptique coupe aussi l'Equateur, on connoîtra le point d'interfection de l'Orbite de cette Planete & de l'Ecliptique, il ne faut pour cela que résoudre le Triangle sphérique *AFG* dans lequel *AG* représente l'Equateur, *AF* l'Ecliptique, & *GF* l'Orbite de la Planete. Dans Figure 2.

ce Triangle on connoît le côté *AG*, différence d'ascension droite entre *A*, l'un des Equinoxes, & *G* le point de l'Equateur où il est coupé par l'Orbite de la Planete; l'angle en *A* est l'obliquité de l'Ecliptique, & l'angle en *G*, ou son supplément, est l'obliquité de l'Orbite de la Planete égale à sa plus grande déclinaison observée; donc on connoîtra le côté *AF*, distance du Nœud de la Planete à l'un des Equinoxes, & l'angle en *F* de l'inclinaison de l'Orbite de cette Planete à l'Ecliptique.

On peut donc trouver le lieu des Nœuds d'une Planete par l'observation de son inclinaison à l'Ecliptique & de sa déclinaison au temps, de son mouvement médiocre sur son Orbite par rapport à son mouvement sur l'Ecliptique & à son mouvement en ascension droite.

Mais cette théorie si simple ne suffit absolument que lorsqu'on est au centre des Cercles *EC* & *EQ*, & que les arcs *CQ*, *SR*, sont les véritables latitudes ou déclinaisons, & qu'elles sont invariables, c'est-à-dire, non sujettes à des inégalités optiques, elle ne convient donc, par rapport à la recherche des Nœuds des Planetes, qu'à un Observateur qui seroit dans le Soleil supposé immobile au centre du mouvement de ces Planetes. De ce centre seul les arcs *CQ* & *SR* mesurent les véritables inclinaisons des points *C* & *S*; car comme les plus grandes latitudes ou déclinaisons *CQ*, vûës de la Terre, sont variables suivant le plus ou le moins de distance de la Terre à la Planete, le point *S* & par conséquent le lieu du Nœud *E* auroient autant de positions différentes que *CQ* auroit de différentes valeurs. Donc les plus grandes latitudes ou déclinaisons, vûës de la Terre, ne peuvent servir à la solution de ce Probleme, si ce n'est lorsqu'elles sont égales à ces mêmes choses vûës du Soleil, c'est-à-dire, lorsque la Planete posée dans ses limites, est également éloignée du Soleil & de la Terre, ou en quadrature environ avec le Soleil, ce qui est un cas fort rare.

Figure 1.

Cependant comme la détermination des Nœuds des Planetes est très-importante, & qu'on ne sçauroit avoir trop de

Méthodes pour arriver au même but, lorſque chacune a ſa difficulté, voici de quelle maniére j'employe celle-ci à cette recherche.

Je ſuppoſe ſeulement que l'on connoiſſe la théorie du Soleil ou de la Terre, & les diſtances de la Planete au Soleil, d'où ſuit la connoiſſance de ſes diſtances à la Terre.

Soit S le Soleil, T la Terre. APL eſt l'Orbite d'une Planete poſée en P. ARM eſt l'Ecliptique. Le point A un des Nœuds de la Planete. Connoiſſant LM la plus grande inclinaiſon de l'Orbite de la Planete à l'Ecliptique vûë du Soleil, on trouvera, comme ci-deſſus, l'inclinaiſon PR vûë du Soleil telle que la Planete poſée en P paroîtra décrire ſur ſon Orbite un arc égal à ſon arc correſpondant ſur l'Ecliptique. Si l'on prend donc, de la maniére dont on va dire, le lieu de la Planete ſur l'Ecliptique en R par rapport au premier point d'*Aries*, dans le moment que cette Planete a l'inclinaiſon calculée, dans le Triangle ſphérique APR rectangle en R, on connoît le côté PR, & l'angle en $A = LM$; on connoîtra donc AR, & par conſéquent le lieu du Nœud A ſur l'Ecliptique, vû du Soleil. Figure 3.

Je ſuppoſe donc que l'on obſerve continuellement les latitudes apparentes de la Planete, c'eſt-à-dire, l'angle PTR, & que par les diſtances connües du Soleil à la Terre & à la Planete, on détermine laquelle de toutes les latitudes PR obſervées, eſt égale à l'inclinaiſon calculée vûë du Soleil, en ce cas le point P ſera celui d'égalité du mouvement de la Planete ſur ſon Orbite, & en longitude ſur l'Ecliptique; & ſi l'on obſerve dans le même moment le lieu de la Planete ſur l'Ecliptique en R, vû de la Terre, qui donnera l'angle CTR, on aura, en réſolvant le Triangle RST, dont les trois côtés & l'angle en T ſont connus, l'angle RST qui comparé avec le lieu héliocentrique de la Terre, donnera la véritable longitude héliocentrique de la Planete réduite à l'Ecliptique; d'où l'on conclurra, comme ci-deſſus, le vrai lieu de la Planete.

Pour les Planetes qui ont des Satellites, le Probleme devient en certains cas plus facile, car on peut quelquefois y

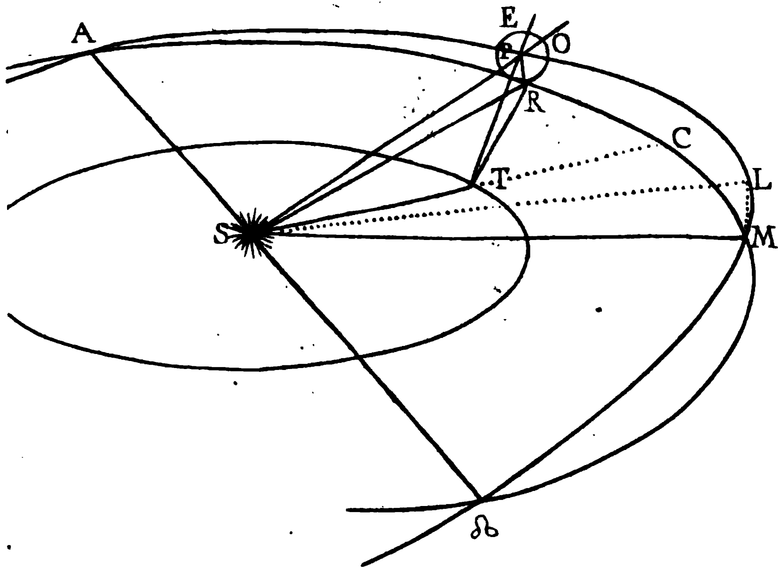
déduire immédiatement de l'obſervation ce qu'on vient de déterminer par les diſtances, qui eſt ce qu'on appelle la ſeconde inégalité de la Planete ; car ſi l'on ſçait aſſés préciſément le temps de la révolution périodique d'un Satellite autour de ſa Planete, on obſervera très-aiſément la valeur de l'arc *OE* de l'Orbite du Satellite compris entre le milieu *O* de ſa demeure dans l'ombre de la Planete & le point *E* où il paroît vû de la Terre en conjonction avec ſa Planete ; cet arc eſt égal à l'angle *TPS* ; ainſi dans le Triangle *TPS*, on connoît *ST* l'angle *TPS* & l'angle *STP*, différence entre les lieux apparents du Soleil & de la Planete, on connoîtra donc le côté *TP* ; & dans le Triangle *RTP* rectangle en *R*, on connoît l'angle en *T* & le côté *TP* ; donc on connoîtra *TR*. Enfin dans le Triangle *RTS* on connoît *ST* & *TR*, & l'angle compris *STR*, ce qui donnera l'angle *RST*, différence de longitude entre la Terre & la Planete vûës du Soleil, d'où l'on conclurra, comme ci-devant, le vrai lieu du point *A*, Nœud de la Planete.

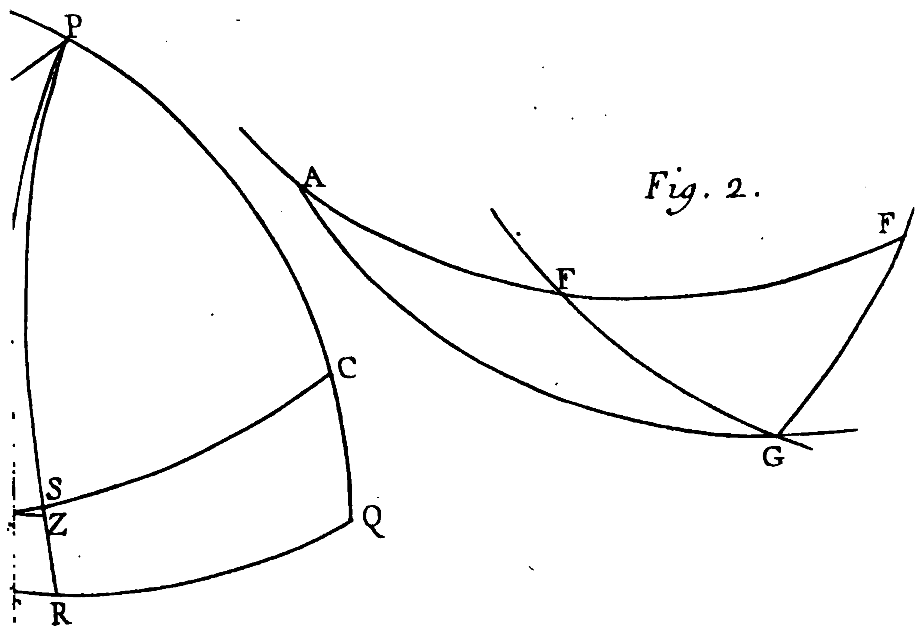
Je ſuppoſe ici, comme on voit, qu'on puiſſe obſerver l'immerſion & l'émerſion du Satellite de l'ombre de ſa Planete, ce qui ne ſe peut pas dans tous les Satellites, dans le premier de Jupiter, par exemple, & très-rarement dans le ſecond.

On trouvera de la même maniére le point de l'Equateur où il eſt coupé par l'Orbite d'une Planete vûë du Soleil.

Par ces Méthodes on multiplie les points des Orbites des Planetes qui peuvent ſervir à déterminer la poſition de leurs Nœuds ; par la Méthode ordinaire, qui eſt d'obſerver la Planete proche de ſes Nœuds mêmes lorſque ſa latitude change de dénomination dans l'eſpace de quelques jours, on n'a, dans toute la révolution d'une Planete, que deux occaſions favorables de faire ces obſervations, & il faut, de même que nous venons de faire, y ſuppoſer les diſtances de la Planete à la Terre & au Soleil, pour changer les latitudes apparentes & la poſition apparente du Nœud en inclinaiſons & en vrai lieu héliocentrique du Nœud.

Il





Ph. Simonneau Sculp.

Il reste à donner, dans une suite, quelques exemples de ces Méthodes pour différentes Planetes, fondées sur des observations, afin qu'on puisse plus sûrement juger du degré de précision qu'on en peut attendre.

MÉMOIRE SUR LE SEL LIXIVIEL DU GAYAC.

Par M. BOURDELIN.

DANS le Mémoire que je présentai en 1728 à l'Académie, sur la formation des Sels alkalis, je tâchai de prouver que ces Sels n'étoient que des Sels décomposés, & que si la partie grasse des Végétaux contribuoit à leur formation, ce n'étoit qu'en enlevant au Sel essentiel une grande partie de ses Acides, & point du tout en s'unissant avec ce même Sel essentiel, comme le veut M. Stahl, & comme il prétend le prouver par une expérience que je rapportai d'après lui, & de laquelle je tirai des conséquences toutes différentes, & tout-à-fait opposées à celles qu'il en tire. Dans le même Livre, le même Auteur rapporte une expérience assés singuliére, concernant ce sujet. On a crû jusqu'ici que le feu formoit seul les Sels alkalis que l'on tire des matiéres végétales, que cet agent n'avoit besoin, pour former ces Sels, d'aucune aide de la part du Chimiste, ni d'aucune préparation, & qu'il suffisoit de lui livrer une Plante desséchée pour qu'il formât, en la détruisant, autant de Sel lixiviel qu'elle contenoit de matiére propre à s'alkaliser. Mais dans l'expérience de M. Stahl la chose se passe différemment; le Chimiste paroît avoir grande part à la production du Sel alkali; ce n'est qu'après que son industrie a tiré du Mixte les matériaux nécessaires pour la composition de ce Sel, qu'il les a rapprochés, &, pour ainsi dire, présentés l'un à l'autre, que le feu les combine, les unit

28 Janvier 1730.

plus étroitement, & opere par ce moyen, & avec ce secours, une production de Sel alkali bien plus abondante. Voici le fait.

M. Stahl fait remarquer, en parlant des Sels alkalis, qu'il y a quelques Végétaux qui n'en donnent pas tant par l'opération ordinaire, c'est-à-dire, lorsque l'on se contente de les faire sécher & de les brûler, que lorsqu'on s'y prend d'une autre façon. Il rapporte pour exemple le bois de Gayac, dont » on ne tire, dit-il, par l'incinération seule, que très-peu de Sel » alkali ; mais si l'on prend, dit M. Stahl, les rapures de ce » même bois, qu'on les fasse boüillir un certain temps, que » l'on en fasse évaporer la décoction lentement, & jusqu'à sic- » cité, la matiére qui reste, étant brûlée & légerement calcinée, » donne infiniment plus de Sel fixe. Voilà l'expérience de M. Stahl, voyons l'explication qu'il en donne.

» Pour expliquer ce phénomene, dit M. Stahl, il est proba- » ble que les parties salines nitreuses qui sont contenües dans » le Gayac, y sont logées séparément & à quelque distance des » parties huileuses qui sont renfermées dans leurs petites loges » particuliéres. Cela fait que dans l'instant de la déflagration, » le feu pousse & chasse hors du Mixte séparément les parties » salines & les parties huileuses, qui par ce moyen ne peuvent » pas se toucher, se joindre, brûler ensemble, & ainsi se com- » biner pour composer le Sel alkali ; au lieu que si, par la » coction, on tire de leurs cellules chacun de ces deux prin- » cipes, ensorte qu'ils puissent se confondre librement ensemble » dans l'eau, & que par le moyen de l'épaississement de la ma- » tiére qui reste après l'évaporation poussée jusqu'à siccité, les » particules salines & huileuses puissent s'accrocher ensemble, » & se mêler les unes avec les autres, & qu'alors on brûle cette » matiére, l'action du feu peut combiner plus facilement les » deux principes qui dans cet état se touchent immédiatement, » & de cette combinaison suit l'effet qu'on doit attendre, c'est- » à-dire, la production du Sel alkali. M. Stahl, dans cette explication de son expérience, ne s'écarte point de ses principes, & déduit toûjours la formation du Sel alkali d'une Plante, du mélange & de l'union intime & durable qui se fait du Sel

essentiel de cette Plante avec sa partie grasse par le moyen du feu, & dans le sein du feu.

Il y a plusieurs choses dans cette explication qu'un Lecteur attentif ne sçauroit aisément passer. Mais, sans entrer dans un plus grand détail, sur quel fondement M. Stahl suppose-t-il une distance si éloignée entre les particules salines & huileuses dans le bois de Gayac? Quelle preuve en pourroit-il apporter? Si l'on regarde le Gayac comme les autres Plantes, c'est-à-dire, comme un assemblage de Vaisseaux ou de Tuyaux arrosés par des liqueurs, dans lesquelles tous les principes de la Plante, & par conséquent l'Huile & le Sel essentiel, sont déja renfermés, &, pour ainsi dire, combinés par la Nature, on accordera difficilement à M. Stahl les différents logements, & les cellules écartées qu'il assigne à ces deux principes. M. Stahl alléguera-t-il en sa faveur une apparence d'analogie qui peut se rencontrer entre les Plantes & les Animaux, dans lesquels, par le moyen des sécrétions, différentes humeurs se trouvent renfermées séparément dans différents réservoirs? Mais pour lors on sera en droit de pousser l'analogie plus loin, & de dire que comme dans les Animaux il se trouve par-tout de l'Huile & du Sel mêlés ensemble, il doit aussi s'en trouver par-tout dans les Plantes. Il est bien vrai que dans certaines liqueurs des Animaux, on découvre distinctement que certains principes y dominent. Mais ces mêmes principes s'y trouvent-ils dans leur premiére simplicité, s'y trouvent-ils totalement dégagés les uns des autres? Rencontre-t-on, par exemple, du Sel pur, de l'Huile pure? Les graisses des Animaux ne contiennent-elles pas du Sel, même en assés grande quantité? Dans la Bile, toute sulphureuse qu'elle est, ne démêle-t-on pas, même par le seul goût, le Sel qui y est mêlé? Avanceroit-on avec raison, que dans la Salive il ne se trouve purement & simplement que du Sel? De même dans les Plantes, leurs sucs les plus aqueux en apparence, ne contiennent-ils que du Sel, ne s'y rencontre-t-il pas quelque portion d'Huile? Quoique la Résine soit la partie grasse des Plantes, cette Résine n'est-elle purement que de l'Huile? Quand on la

brûle, ne donne-t-elle pas du Sel alkali? preuve qu'elle contient une portion de Sel essentiel qui se décompose dans le feu. Mais si, dans les Végétaux, comme dans les Animaux, la partie saline & la partie grasse se trouvent mêlées ensemble, même dans les liqueurs dans lesquelles on auroit le plus lieu de croire qu'elles existent séparément l'une de l'autre, que doit-on penser de tout le corps de la Plante en général, dont les canaux contiennent les Sucs qui sont l'origine & la source de toutes les sécrétions qui se font dans la Plante, comme le Sang l'est de celles qui se font dans l'Animal, & dans lesquels par conséquent ces deux principes sont contenus confusément, avant de se séparer pour être renfermés dans leurs différents réservoirs. M. Stahl ne nie pas non plus qu'il se rencontre du Sel & de l'Huile combinés ensemble dans toute l'étendüe de la Plante, puisqu'il avoüe qu'en brûlant le Gayac à la façon ordinaire, on en tire du Sel alkali, mais on l'en tire, dit-il, en moindre quantité. La difficulté ne roule donc que sur le plus ou le moins, & le Gayac donne moins de Sel alkali par ce procédé, parce que la distance éloignée qui se rencontre, selon M. Stahl, entre l'Huile & le Sel dans ce bois, fait qu'une grande partie de ces deux principes échappe au mêlange & à la combinaison que le feu en feroit, s'ils étoient plus rapprochés, & si toute l'Huile requise pour la formation du Sel lixiviel pouvoit se combiner avec tout le Sel essentiel.

Je n'opposerai à ce raisonnement que l'expérience que fournit le Nitre fixé par les charbons. Ce Sel ne s'alkalise que par le moyen de la poudre de Charbon que l'on y jette, lorsqu'il est en fusion dans le Creuset qui le contient. Il se fait, pour lors, une liaison étroite & une union de la partie grasse du charbon avec l'acide du Nitre qu'elle emporte avec elle, & à qui elle fait suivre la même détermination de mouvement qu'elle a reçû du feu, & qu'elle suit elle-même, comme j'ai tâché de le prouver dans mon Mémoire de 1728. Il se fait donc, avant cette fuite de l'Acide nitreux, une liaison de la partie grasse du Charbon avec ce Sel. Mais pourquoi la même

chose n'arrivera-t-elle pas entre l'Huile & le Sel essentiel d'une même Plante? L'Acide du Nitre & la partie grasse du Charbon sont deux substances tout-à-fait étrangeres l'une à l'autre, cependant elles s'unissent lorsque l'on jette la poudre de Charbon dans le Creuset; tout le Nitre qui y est contenu se décompose, & devient du Sel alkali. Est-il vrai-semblable qu'il se trouve plus de proximité entre ces deux substances, qu'il ne s'en trouve entre deux pareils principes renfermés dans une même Plante, & que la Nature avoit intimement mêlés & combinés dans les liqueurs & le suc nourricier qui a servi à la végétation, l'accroissement & la conservation de cette Plante? Que l'on explique la formation du Sel alkali par l'union fixe & durable de la partie grasse avec le Sel essentiel entier, selon l'hypothese de M. Stahl, ou qu'on l'explique, selon la mienne, par la liaison qui se fait de cette même partie grasse avec l'Acide seulement du Sel essentiel, lequel Acide est emporté par elle; toûjours, selon l'un ou l'autre sentiment, se fait-il une union étroite, & toûjours sera-t-on fondé à demander pourquoi cette union se fait entre deux matiéres tout-à-fait étrangeres l'une à l'autre, & pourquoi elle ne se feroit pas entre deux semblables substances, qui sont déja rassemblées & mêlées ensemble dans un même Végétal. Mais passons du vrai-semblable au vrai; après avoir réfuté sommairement l'explication de M. Stahl, suivons son expérience, & examinons-en la vérité.

La premiére fois que je lûs avec attention l'expérience de M. Stahl, sa singularité fit naître en même temps ma surprise & mes doutes. Je trouvois qu'il y avoit de l'industrie à remédier ainsi à l'empêchement que la Nature sembloit avoir formé dans le Gayac à une production abondante de Sel alkali. Mais je n'étois pas bien convaincu de la réalité de l'obstacle, ni de l'efficacité du remede qu'on y apportoit. Malgré la grande réputation que s'est acquis M. Stahl, & qu'il s'est acquis à juste titre, la confiance que j'avois à une expérience qu'il citoit, & que je devois supposer qu'il avoit faite, ne pût jamais aller jusqu'à me persuader que la simple décoction du

Gayac dût apporter un ſi grand changement dans la quantité de Sel fixe qu'on en tire. Je ne concevois pas que l'Eau boüillante ſeule, ſoit comme échauffée par le feu, ſoit comme compoſée de parties qui, à l'aide du feu, puſſent s'inſinuer dans les pores d'un Mixte, eût aſſés d'efficacité pour tirer d'un bois, dont le tiſſu eſt auſſi ſerré & auſſi denſe que l'eſt celui du Gayac, une ſi grande quantité de Sel eſſentiel. La peine que j'avois à concilier mes idées avec l'expérience de M. Stahl, me fit prendre le parti de la réïtérer d'après lui. Mais comme il ne ſuffiſoit pas de tirer le Sel alkali de la décoction réſineuſe du Gayac, & qu'il falloit le comparer avec celui que fourniroit une pareille quantité de Gayac brûlé à la façon ordinaire, j'en ai brûlé de trois façons différentes. J'ai brûlé le Gayac en morceaux, comme on le fait ordinairement, j'en ai brûlé en rapures, & enfin j'ai fait boüillir, pour mon expérience, des rapures de Gayac, deſquelles j'ai tiré la Réſine par ce moyen, & ces mêmes rapures boüillies & dépoüillées de leur partie graſſe, je les ai fait ſécher, & les ai brûlé enſuite.

De quelque façon que j'aye brûlé le Gayac, ſoit en rapures qui euſſent boüilli, ſoit en rapures qui n'euſſent point boüilli, ſoit en ſubſtance, je veux dire en morceaux, j'en ai toûjours brûlé ſix livres à la fois. De ces trois façons différentes, la plus ſimple fut celle qui me donna à la premiére opération le plus de Sel lixiviel. Six livres de Gayac brûlé en morceaux m'en fournirent un gros & 7 grains, c'eſt-à-dire, 79 grains. Pareil poids de rapures ne me donna que 39 grains. Je n'inſiſterai point ici ſur la raiſon qui fit que les rapures me donnerent moins de Sel que le bois. Je dirai ſeulement que je crois qu'il y eut de ma faute, parce que je ne leſſivai leurs cendres que deux fois, & peut-être une troiſiéme ou une quatriéme leſſive m'auroient-elles donné encore aſſés de Sel lixiviel pour égaler la quantité que m'en avoit fourni le Gayac brûlé en morceaux.

Je pris ſix autres livres de Gayac en morceaux, je le brûlai, je le réduiſis en cendres, que je calcinai enſuite dans la

Creuſet ; elles ne me fournirent en deux évaporations que 51 grains de Sel, ſçavoir 45 grains à la première, & 6 à la ſeconde. Je pris enſuite des rapures de Gayac, que j'avois fait boüillir pendant ſix heures, & qui peſoient ſix livres avant l'ébullition. Je les fis ſécher pour les brûler. Leurs cendres calcinées & leſſivées me fournirent en trois évaporations 58 grains de Sel lixiviel. On voit par-là que ſi dans la premiére expérience le Gayac en morceaux l'avoit emporté par le produit du Sel lixiviel ſur les rapures, dans celle-ci les rapures, quoique boüillies, & qui devoient avoir perdu une partie de leur Sel, l'ont cependant réciproquement emporté ſur le bois.

Quand même j'aurois été bien perſuadé de la vérité & de l'exactitude de l'expérience de M. Stahl, cette ſeule circonſtance auroit ſuffit pour faire naître mes doutes. Les rapures de Gayac boüillies & ſéchées, reſſembloient trop par leur produit au bois de Gayac brûlé en morceaux, & en approchoient de trop près pour que je puſſe attendre de la matiére réſineuſe, provenant de la décoction épaiſſie, une quantité conſidérable de Sel lixiviel. Car comme il ne pouvoit ſe trouver de Sel dans cet extrait réſineux, qu'à proportion de ce que pouvoient lui en avoir communiqué les rapures de Gayac, & par conſéquent à proportion de ce qu'elles en avoient perdu, il n'étoit pas naturel d'attendre de cette matiére réſineuſe une grande quantité de Sel lixiviel, lorſque les rapures, qui avoient fourni dans la décoction cette même Réſine, conſervoient encore tant de Sel. J'aurois eu quelque ſujet de me flatter plus juſtement de l'eſpérance que donne M. Stahl, ſi j'avois vû que l'ébullition eût dépoüillé mes rapures de Gayac de leur Sel, au point qu'elles ne m'en euſſent preſque pas fourni en les brûlant, après les avoir fait ſécher. Pour lors il y auroit eu quelque raiſon d'attendre de la décoction épaiſſie la multiplication conſidérable de Sel fixe que M. Stahl en promet. Car à s'en rapporter aux termes dans leſquels s'exprime M. Stahl, il ſemble que le Gayac, dont on a tiré la teinture ou l'extrait par le moyen de l'ébullition, devienne,

pour ainsi dire, une Tête-morte, & une matiére absolument dénuée de tout son Sel, & que tout ce Sel passe dans la décoction, dans laquelle il doit produire par l'incinération, en se combinant avec sa partie grasse, une quantité de Sel lixiviel infiniment, & sans aucune comparaison plus considérable que n'en donne le Gayac brûlé à la façon ordinaire. Que M. Stahl regarde les rapures de Gayac qui ont boüilli comme une Tête-morte dénuée de son Sel essentiel, il n'y a presque pas lieu d'en douter; il paroît en faire si peu de cas, que uniquement attentif au produit de l'extrait, il semble rejetter comme inutiles les rapures qui l'ont fourni, & ne conseille même pas de les brûler après en avoir tiré la Résine & le Sel par le moyen de la décoction. Il me reste maintenant à détailler mon expérience telle que je l'ai faite d'après M. Stahl.

Je pris six livres de rapures de Gayac. Je les fis boüillir pendant six heures. J'en fis évaporer la décoction jusqu'à siccité. Il me resta de cette évaporation 7 gros de matiére résineuse, & ces 7 gros de matiére résineuse ne me donnerent, par la calcination & la lessive des cendres, que 4 grains de Sel lixiviel. Quoique la quantité de Sel lixiviel que m'avoient donné mes rapures boüillies & séchées, eût commencé à me faire soupçonner le peu que m'en fourniroit leur résidu résineux, un reste de préjugé pour une expérience citée par M. Stahl, & que je devois croire qu'il avoit fait lui-même, me tenoit encore en suspens, & j'avoüerai que je vis avec surprise combien ma méfiance fut justifiée. J'avois travaillé auparavant de la même maniére douze livres de rapures de Gayac. J'en avois tiré 10 gros d'extrait résineux, qui ne m'avoient produit que 14 grains de Sel lixiviel. Mais il m'étoit arrivé un accident en faisant cette opération. Un grand Vaisseau de terre, dont je me servois pour faire boüillir mes rapures de Gayac, s'étoit cassé sur le feu, après y avoir été cinq heures. Il s'étoit répandu une certaine quantité de décoction, je ne sçavois à quoi pouvoit monter ce déchet. Cet accident, joint au peu de Sel lixiviel que j'avois tiré de l'extrait résineux de ces douze livres de rapures, me fit naître

quelques ſcrupules. Comme j'avois toûjours préſente à l'eſprit l'explication que M. Stahl donne à ſon expérience, & la quantité conſidérable de Sel lixiviel que produit ſelon lui le Gayac travaillé de cette façon, je ne doutai preſque point que l'opération ne fût manquée, & que ce ne fût ma faute ſi le Gayac m'avoit ſi peu donné de Sel lixiviel. Je pris donc le parti, pour ma propre ſatisfaction, de réïtérer l'expérience avec ſix livres de rapures de Gayac, comme je viens de le dire ci-deſſus. Elle fut exactement faite, & ſervit à diſſiper mes doutes. Quand je vis que 7 gros d'extrait réſineux, provenant de la décoction de mes ſix livres de rapures de Gayac, ne me donnoient que 4 grains de Sel lixiviel, je trouvai qu'il n'étoit point étonnant que 10 gros de pareil réſidu, provenant des douze livres de rapures de Gayac que j'avois travaillé précédemment, ne m'euſſent donné que 14 grains de ce même Sel. Ce raiſonnement me parut pendant quelque temps aſſés plauſible, & j'en ſerois demeuré-là, ſi une derniére réfléxion ne m'en eût empêché.

Il eſt difficile de vouloir être exact, ſur-tout en Chimie, ſans devenir un peu ſcrupuleux. Comme M. Stahl, dans l'expoſé de ſon expérience, ne limite point la durée de l'ébullition du Gayac, & qu'il dit ſimplement qu'il faut le faire boüillir un peu de temps, j'imaginai que je n'avois peut-être pas donné à ſes termes toute leur étendüe, & que faute de cela je n'avois pas pouſſé l'ébullition aſſés loin. Ce ſcrupule ne me permit pas de m'en tenir à mes expériences précédentes, il fallut les réïtérer de nouveau. Je n'avois donné que ſix heures de feu à la décoction des derniéres rapures de Gayac dont j'avois tiré la Réſine, je pris le parti de leur en donner douze cette fois-ci. Je fis acheter douze livres de rapures de Gayac. Je les partageai en deux; j'en pris ſix, que je brûlai comme j'avois déja fait, ſans autre préparation. Elles me donnerent à la premiére leſſive 90 grains de Sel lixiviel. Les ſix livres reſtantes, je les fis boüillir douze heures entiéres, ayant ſoin de renouveller de temps en temps l'eau, de crainte qu'elle ne ſe tarît, & que la matiére ne ſe brûlât pêle-mêle,

c'eſt-à-dire les rapures, & la Réſine que l'eau boüillante en détachoit. J'eûs de cette décoction 9 gros de Réſine, au lieu que des ſix livres que j'avois fait boüillir précédemment, je n'en avois tiré que 7 gros. Cette augmentation d'extrait me fit eſpérer plus de Sel lixiviel, & mon eſpérance ſe trouva bien fondée. Je tirai de mes neuf gros d'extrait réſineux, après la calcination & la leſſive des cendres, 32 grains de Sel lixiviel. C'étoit, à la vérité, beaucoup plus que je n'en avois tiré dans mes deux opérations antérieures; mais cela ne répondoit cependant pas, à beaucoup près, aux promeſſes de M. Stahl, ni au produit des ſix livres de rapures que je venois récemment de brûler ſans les avoir dépoüillé de leur partie graſſe. Il y avoit encore loin de 32 à 90. J'étois bien ſûr de mes rapures, elles étoient les mêmes; ainſi je devois en obtenir au moins la même quantité de Sel lixiviel par le procédé de M. Stahl que par le mien. Cependant tout le produit de la Réſine calcinée & leſſivée ſe bornoit à 32 grains. Il falloit donc que les rapures, qui avoient boüilli, conſervaſſent ce qui manquoit de Sel à la décoction épaiſſie. Pour m'en aſſûrer, j'eûs encore recours à la calcination des cendres des rapures dont j'avois tiré la Réſine. Six livres de ces rapures que j'avois employé pour la décoction, s'étoient réduites à cinq. Elles étoient beaucoup plus brunes que les autres qui m'étoient reſtées des opérations précédentes. Je brûlai ces cinq livres; les cendres qui en provinrent, ayant été bien calcinées, devinrent d'une couleur approchante d'un chamois un peu foncé. Elles ſe réduiſirent en une poudre auſſi fine que ſi elle eût été porphyrizée, & qui s'envoloit pour peu qu'on remuât le Creuſet qui les contenoit. Ces cendres ne ſe pelotonnerent point, comme le font ordinairement, ſur la fin de la calcination, celles qui contiennent beaucoup de Sel lixiviel. Leur ſéchereſſe & leur légereté me fit mal augurer d'abord de leur richeſſe, cependant ma prévention ſe trouva mal fondée. Ces cendres, tout arides qu'elles paroiſſoient, m'ont donné un tiers & preſque moitié plus de Sel lixiviel que celles du réſidu réſineux. J'ai fait de chacune de ces trois ſortes de cendres

six lessives. Les rapures qui n'avoient point boüilli, & qui avoient été brûlées à la façon ordinaire, m'ont donné en tout 130 grains de Sel lixiviel. Les rapures qui avoient boüilli pendant douze heures entiéres, & dont j'avois tiré la Résine, m'ont donné 78 grains, & l'extrait résineux provenant de ces mêmes rapures boüillies, & duquel M. Stahl promet un produit si abondant, ne m'a donné que 47 grains & demi de Sel lixiviel.

Il est aisé de voir, par le détail de cette derniére expérience, que j'avois eu quelque raison de douter de l'exactitude & de la vérité de celle que rapporte M. Stahl. Tant s'en faut que les cendres de l'extrait résineux ne l'emportent par l'abondance de leur Sel lixiviel sur celles des rapures de Gayac brûlé à la façon ordinaire, qu'au contraire elles le cedent en quantité, même aux cendres des rapures qui ont boüilli, desquelles cet extrait résineux est le produit. Il ne se trouve donc plus rien d'étonnant ni de mystérieux dans l'opération de M. Stahl. La décoction emporte une partie du Sel essentiel du Gayac, & le confond avec la partie grasse de ce bois; de-là il résulte dans la décoction épaissie, autant de Sel fixe que l'ébullition a ôté de Sel essentiel aux rapures. Ce qui en est resté aux rapures après l'ébullition, se retrouve en Sel lixiviel dans leurs cendres. Ainsi tirer le Sel lixiviel du Gayac à la façon de M. Stahl, ce n'est que diviser un tout en deux parties, c'est obtenir par deux opérations ce qu'on peut obtenir par une seule, c'est augmenter la peine sans augmenter le profit.

On me demandera peut-être d'où vient que les cendres du Gayac qui a été brûlé à la façon ordinaire, ont donné seules plus de Sel lixiviel que celles des rapures boüillies & de l'extrait résineux jointes ensemble, puisque celles-ci ont fourni quatre grains & demi moins que les autres. La réponse est aisée à faire. Après l'évaporation d'une lessive, on a beau gratter le vaisseau dans lequel elle a été faite, quelque soin que l'on prenne, il y reste toûjours un peu de Sel, & cette petite quantité du Sel lixiviel qui s'attache au vaisseau est

proportionnée à l'étendüe de la surface de ce même vaisseau. Quelque peu sensible que paroisse ce déchet dans une seule évaporation, il doit le devenir, & augmenter après plusieurs opérations. Les rapures de Gayac, qui m'ont servi dans ces derniéres expériences, étoient les mêmes, puisque je n'avois fait qu'en partager douze livres en deux parts. Elles devoient par conséquent contenir autant de Sel les unes que les autres. Mais ces trois sortes de cendres ont été lessivées chacune six fois, comme je l'ai déja dit. Regardons maintenant les cendres du résidu résineux & celles des rapures boüillies, comme deux parties ne faisant qu'un même tout, c'est-à-dire, comme les cendres de six livres de Gayac. Il s'ensuivra que ces cendres-ci ont souffert le déchet de douze opérations, pendant que celles des six livres qui ont été brûlées à la façon ordinaire, n'ont souffert que le déchet de six évaporations. Supposé que celles-ci ayent perdu à chaque évaporation trois quarts de grain de Sel lixiviel, ce qui est peu de chose, & ce qui sera en tout quatre grains & demi pour les six évaporations, il s'ensuivra que les autres en auront perdu neuf.

Je ne dirai rien ici sur la nature du Sel lixiviel du Gayac. J'ai crû avoir lieu de penser, pour plusieurs raisons, qu'il n'étoit gueres alkali, peut-être même pourroit-il se faire qu'il ne le fût point du tout. En ce cas M. Stahl auroit bien perdu de la peine à en expliquer la formation. Je n'ose pourtant pas encore prononcer que ce Sel ne soit absolument point Alkali. Mais ce que je puis avancer avec certitude, c'est que s'il l'est, il l'est peu. Je renvoye cette discussion à un autre Mémoire, dans lequel je me propose d'examiner les variétés qui se rencontrent entre différents Sels lixiviels.



EXAMEN ET RÉSOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS SUR LES JEUX.

Par M. NICOLE.

ON peut confidérer tous les Jeux, que l'amufement ou le defir d'augmenter fon argent ont inventés, fous deux efpeces. La premiére efpece renferme les Jeux où le hazard feul a part, & qui par leur nature mettent les Joüeurs dans différentes conditions, enforte que l'un ait avantage fur l'autre, comme dans les Jeux de la Baffette, du Pharaon, & des Trois Dés, &c. La feconde efpece renferme les Jeux où le hazard étant égal pour les Joüeurs comme dans le Piquet, &c. les forces ou degrés d'habileté entre les Joüeurs font différents. 11 Février 1730.

Entre les divers Problemes que l'on peut propofer fur chacune de ces deux efpeces de Jeux, il y en a qui leur font communs, la plus grande probabilité de gagner pour l'un des Joüeurs, pouvant venir également de la nature du Jeu qui lui donne de l'avantage, ou de la fupériorité d'habileté.

La queftion que l'on examine ici eft de cette efpece, elle m'a été faite plufieurs fois par de gros Joüeurs : la voici.

Deux Joüeurs joüent une partie à un Jeu quelconque, par exemple au Piquet ; l'un des Joüeurs a plus de probabilité de gagner cette partie qu'il n'en a de la perdre, on demande, lorfque ces Joüeurs conviennent de joüer un certain nombre de parties, fi le Joüeur fupérieur a toûjours le même avantage fur l'autre, ou le même degré de probabilité de gagner plus de parties que l'autre ; ou fi cette probabilité augmente, on demande felon quelle loi fe fait cette augmentation.

PROBLEME.

Deux Joüeurs, dont les forces sont entr'elles comme p *&* q, *joüent au Piquet un certain nombre de parties, on demande quelle probabilité il y a que le Joüeur le plus fort gagne, ce que les Joüeurs appellent la* queüe des paris, *& quel est son avantage. Celui qui perd, est celui qui est marqué le plus de fois dans le cours des parties que l'on est convenu de joüer.*

Pour résoudre ce Probleme, il faut découvrir d'abord quel est l'avantage de ce Joüeur; lorsque l'on ne joüe que deux parties, ensuite lorsque l'on en joüe quatre, puis six, huit, dix, & enfin le nombre dont on est convenu. Car il est clair que son sort, lorsque l'on en joüe douze, par exemple, doit résulter de l'examen des différents états dans lesquels cette partie de Jeu peut se trouver dans tout le cours de ces douze parties, & que quelques-uns de ces états répondent à la situation où seroient les deux Joüeurs, s'ils ne joüoient qu'en deux parties, ou en quatre, six, huit & dix.

SOLUTION.

J'appelle *Pierre* le premier Joüeur, dont la force est exprimée par p, & *Paul* le second Joüeur, dont la force est exprimée par q; p est plus grand que q.

Soit supposé qu'ils joüent d'abord en deux parties, soit nommé a l'argent que l'on gagne, lorsque l'on gagne le pari. Cela posé:

Si l'on nomme f le sort de Pierre que l'on cherche, x son sort lorsqu'il gagne la premiére partie, & y lorsqu'il la perd, on aura ces Equations, $f = \frac{\overset{1.0}{p\times x} + \overset{0.1}{q\times y}}{p+q}$, $x = \frac{\overset{2.0}{p\times a} + \overset{1.1}{q\times o}}{p+q}$ & $y = \frac{\overset{1.1}{p\times o} + \overset{0.2}{q\times -a}}{p+q}$, dans lesquelles les nombres qui sont écrits au dessus de chaque membre de ces Equations, servent à exprimer ce que chaque Joüeur a gagné de parties. Donc $f = \frac{p\times ap + q\times -aq}{\overline{p+q}^{2}} = \frac{app - aqq}{\overline{p+q}^{2}}$, qui est le sort de Pierre,

ou ſon avantage, lorſque l'on joüe en deux parties.

Soit ſuppoſé maintenant que ces Joüeurs joüent en quatre parties.

Si l'on nomme f le ſort de Pierre que l'on cherche, x ſon ſort lorſqu'il gagne la premiére partie, y lorſqu'il la perd; z ſon ſort, lorſqu'ayant gagné la premiére partie, il gagne encore la ſeconde; r ſon ſort, lorſqu'ayant gagné les deux premiéres parties, il perd la troiſiéme, on aura ces Equations,

$$f = \frac{p \times \overset{1.0}{x} + q \times \overset{0.1}{y}}{p+q}, \quad x = \frac{p \times \overset{2.0}{z} + q \times \overset{1.1}{\frac{app - aqq}{(p+q)^2}}}{p+q}, \quad z = \frac{p \times \overset{3.0}{a} + q \times \overset{2.1}{r}}{p+q},$$

$$r = \frac{p \times \overset{3.1}{a} + q \times \overset{2.2}{o}}{p+q} = \frac{ap}{p+q}. \text{ Donc } z = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{(p+q)^2}$$

$$= \frac{app + 2apq}{(p+q)^2} \ \& \ x = \frac{ap^3 + 2appq + appq - aq^3}{(p+q)^3}$$

$$= \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{(p+q)^3}.$$

Pour déterminer y, ſoit encore nommé t le ſort de Pierre, lorſqu'ayant perdu la premiére partie, il perd encore la ſeconde, & u ſon ſort, lorſqu'ayant perdu les deux premiéres parties, il gagne la troiſiéme, on aura ces nouvelles Equations,

$$y = \frac{p \times \overset{1.1}{\frac{app - aqq}{(p+q)^2}} + q \times \overset{0.2}{t}}{p+q}, \quad t = \frac{p \times \overset{1.2}{u} + q \times \overset{0.3}{-a}}{p+q},$$

$$u = \frac{p \times \overset{2.2}{o} + q \times \overset{1.3}{-a}}{p+q} = -\frac{qa}{p+q}. \text{ Donc } t = -\frac{apq}{(p+q)^2}$$

$$-\frac{qa}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{(p+q)^2} \ \& \ y = \frac{ap^3 - apqq - 2apqq - aq^3}{(p+q)^3}$$

$$= \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{(p+q)^3}$$; & en ſubſtituant dans la premiére Equation pour x & y leurs valeurs, il vient

$$f = \frac{ap^4 + 3ap^3q - apq^3 + ap^3q - 3apq^3 - aq^4}{(p+q)^4} = \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{(p+q)^4}$$

qui eſt le ſort cherché de Pierre, ou ſon avantage, lorſque l'on joüe en quatre parties.

Si l'on ſuppoſe maintenant que l'on joüe en ſix parties, en employant autant d'inconnües que l'on en a beſoin, on aura toutes les Equations ſuivantes,

$$ſ = \frac{\overset{1.0}{p} \times x + \overset{0.1}{q} \times y}{p+q}, \quad x = \frac{\overset{2.0}{p} \times z + \overset{1.1}{q} \times \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}}{p+q},$$

$$z = \frac{\overset{3.0}{p} \times r + \overset{2.1}{q} \times t}{p+q}, \quad r = \frac{\overset{4.0}{p} \times a + \overset{3.1}{q} \times u}{p+q}, \quad u = \frac{\overset{4.1}{p} \times a + \overset{3.2}{q} \times m}{p+q},$$

$$m = \frac{\overset{4.2}{p} \times a + \overset{3.3}{q} \times o}{p+q} = \frac{ap}{p+q}.$$ Donc $u = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{\overline{p+q}^{2}}$

$$= \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{2}}, \quad r = \frac{ap}{p+q} + \frac{appq + 2apqq}{\overline{p+q}^{3}} = \frac{ap^3 + 3appq + 3apqq}{\overline{p+q}^{3}}.$$

Pour déterminer t, on a $t = \frac{\overset{3.1}{p} \times \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{2}} + \overset{2.2}{q} \times \frac{app - aqq}{\overline{p+q}^{2}}}{p+q}$

$= \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{\overline{p+q}^{3}}$. Donc $z = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}$.

D'où enfin on a $x = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3qq - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^{5}}$.

Pour déterminer y, on a ces autres Equations

$$y = \frac{p \times \frac{ap^4 + 4ap^3\overset{1.1}{q} - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^{4}} + \overset{0.2}{q} \times k}{p+q}, \quad k = \frac{\overset{1.2}{p} \times f + \overset{0.3}{q} \times h}{p+q};$$

$$f = \frac{p \times \frac{a\overset{2.2}{p}p - aqq}{\overline{p+q}^{2}} + \overset{1.3}{q} \times e}{p+q}, \quad e = \frac{\overset{2.3}{p} \times d + \overset{1.4}{q} \times -a}{p+q}, \quad d = \frac{\overset{3.3}{p} \times o + \overset{2.4}{q} \times -a}{p+q}$$

$= -\frac{qa}{p+q}$. Donc $e = -\frac{pqa}{\overline{p+q}^{2}} - \frac{qa}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^{2}}$;

donc $f = \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^{3}}$; on a auſſi $h = \frac{p \times -\frac{2a\overset{1.3}{p}q - aqq}{\overline{p+q}^{2}} + \overset{0.4}{q} \times -a}{p+q}$

$=$

$$= -\frac{3appq - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^{\,3}},\ \text{donc}\ k = \frac{ap^4 - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^{\,4}},$$

& enfin $y = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^{\,5}}$. Et en substituant dans la premiére Equation, pour x & y, les valeurs trouvées, il vient

$$s = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^{\,6}}$$

pour le sort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joüe en six parties.

Soit supposé maintenant que l'on joüe en huit parties, & que A représente le sort de Pierre, lorsque l'on joüe en deux parties, B lorsque l'on joüe en quatre parties, C lorsque l'on joüe en six parties.

Si l'on employe autant d'inconnües que l'on en a besoin, on aura toutes les Equations suivantes,

$$s = \frac{\overset{1.0}{p}\times x + \overset{0.1}{q}\times y}{p+q},\quad x = \frac{\overset{2.0}{p}\times z + \overset{1.1}{q}\times C}{p+q},\quad z = \frac{\overset{3.0}{p}\times u + \overset{2.1}{q}\times t}{p+q},$$

$$u = \frac{\overset{4.0}{p}\times r + \overset{3.1}{q}\times n}{p+q},\quad r = \frac{\overset{5.0}{p}\times a + \overset{4.1}{q}\times m}{p+q},\quad m = \frac{\overset{5.1}{p}\times a + \overset{4.2}{q}\times k}{p+q},$$

$$k = \frac{\overset{5.2}{p}\times a + \overset{4.3}{q}\times l}{p+q},\quad l = \frac{\overset{5.3}{p}\times a + \overset{4.4}{q}\times 0}{p+q} = \frac{ap}{p+q}.\ \text{Donc}\ k = \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{\,2}},$$

$$m = \frac{ap^3 + 3appq + 3apq^2}{\overline{p+q}^{\,3}}\ \&\ r = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq + 4apq^3}{\overline{p+q}^{\,4}},$$

On trouvera aussi $n = \frac{p\times\overset{4.1}{\overline{\frac{ap^3 + 3appq + 3apqq}{\overline{p+q}^{\,3}}}} + \overset{3.2}{q}\times h}{p+q}$,

$$h = \frac{p\times\overset{4.2}{\overline{\frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{\,2}}}} + \overset{3.3}{q}\times A}{p+q} = \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{\overline{p+q}^{\,3}}.\ \text{Donc}$$

$n = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}{\overline{p+q}^{\,4}}$; & en substituant pour r

& n les valeurs que l'on vient de trouver, il vient

$$u = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3qq + 10appq^3 - aq^5}{\overline{p+q}^5}.$$ Pour trouver

la valeur de t, on a $$t = \frac{\overset{3.1}{p} \times \overline{\frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}{\overline{p+q}^4}} + \overset{2.2}{q} \times B}{p+q}$$

$$= \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^5}.$$ Donc

$$z = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq + 20ap^3p^3 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^6},$$ & enfin

$$x = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq + 35ap^4q^3 - 21appq^5 - 7apq^6 - aq^7}{\overline{p+q}^7}.$$

Pour déterminer y, on a toutes ces Equations

$$y = \frac{\overset{1.1}{p} \times C + \overset{0.2}{q} \times g}{p+q},\quad g = \frac{\overset{1.2}{p} \times f + \overset{0.3}{q} \times e}{p+q},\quad f = \frac{\overset{2.2}{p} \times B + \overset{1.3}{q} \times d}{p+q},$$

$$d = \frac{\overset{2.3}{p} \times c + \overset{1.4}{q} \times b}{p+q},\quad c = \frac{\overset{3.3}{p} \times A + \overset{2.4}{q} \times Y}{p+q},\quad Y = \frac{\overset{3.4}{p} \times X + \overset{2.5}{q} \times -a}{p+q},$$

$$X = \frac{\overset{4.4}{p} \times o + \overset{3.5}{q} \times -a}{p+q} = -\frac{aq}{p+q}.$$ Donc $$Y = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^2},$$

& $$c = \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^2}.$$ Pour trouver la valeur de b, on a

$$b = \frac{\overset{2.4}{p} \times Z + \overset{1.5}{q} \times -a}{p+q},\quad Z = \frac{\overset{3.4}{p} \times -\frac{aq}{p+q} + \overset{2.5}{q} \times -a}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^2},$$

donc $$b = -\frac{3appq - 3apq^2 - aq^3}{\overline{p+q}^3};$$ ainsi en substituant les

valeurs de b & c, il vient $$d = \frac{ap^4 - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4},$$

donc $$f = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^5}.$$ Pour trouver

la valeur de e, on a $$e = \frac{\overset{2.3}{p} \times \overline{\frac{ap^4 - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}} + \overset{0.4}{q} \times V}{p+q},$$

$$V = \frac{p \times \overline{-\frac{3appq - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^{3}}}^{1.4} + q \times -a}{p+q} =$$

$-\frac{4ap^3q - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}$, donc $e =$ $\frac{ap^5 - 10ap^3qq - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^{5}}$. Maintenant si l'on substitüe pour f & e les valeurs trouvées, on aura

$$g = \frac{ap^6 + 6ap^5q - 20ap^3q^3 - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^{6}}.$$

Donc enfin $y = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq - 35ap^3q^4 - 21ap^2q^5 - 7apq^6 - aq^7}{\overline{p+q}^{7}}$;

Et en substituant, dans la premiére Equation, pour x & y les valeurs trouvées, il vient

$$s = \frac{ap^8 + 8ap^7q + 28ap^6q^2 + 56ap^5q^3 - 56ap^3q^5 - 28appq^6 - 8apq^7 - aq^8}{\overline{p+q}^{8}}$$

qui est le sort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joüe en huit parties.

On pourroit, par la même voye, déterminer le sort de Pierre, lorsque l'on joüe dix parties, & ensuite lorsque l'on en joüe un plus grand nombre; mais le nombre des Equations, qu'il faudroit parcourir pour résoudre ces autres cas, devenant fort considérable, il est plus simple, pour les résoudre, d'examiner les grandeurs qui ont été trouvées pour les cas précédents, de les comparer entr'elles, & de découvrir par cette comparaison la loi selon laquelle elles croissent. Les grandeurs, qui ont été trouvées, sont

$\frac{app - aqq}{\overline{p+q}^{2}}$, pour 2 parties.

$\frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}$, pour 4 parties.

$\frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^{6}}$, pour 6 parties.

$$\frac{ap^8+8ap^7q+28ap^6qq+56ap^5q^3-56ap^3q^5-28appq^6-8apq^7-aq^8}{\overline{p+q}^{\,8}},$$

pour 8 parties.

qui se réduisent, en divisant ses numérateurs & les dénominateurs par $p+q$,

à $\frac{ap-aq}{p+q}$, pour 2 parties.

à $\frac{ap^3+3appq-3apqq-aq^3}{\overline{p+q}^{\,3}}$, pour 4 parties.

à $\frac{ap^5+5ap^4q+10ap^3qq-10appq^3-5apq^4-aq^5}{\overline{p+q}^{\,5}}$, pour 6 parties.

à $\frac{ap^7+7ap^6q+21ap^5qq+35ap^4q^3-35ap^3q^4-21appq^5-7apq^6-aq^7}{\overline{p+q}^{\,7}}$,

pour 8 parties.

à $\frac{ap^9+9ap^8q+36ap^7qq+84ap^6q^3+126ap^5q^4-126ap^4q^5-84ap^3q^6-36appq^7-9apq^8-aq^9}{\overline{p+q}^{\,9}}$,

pour 10 parties.

à $a\times\left\{\frac{p^{11}+11p^{10}q+55p^9q^2+165p^8q^3+330p^7q^4+462p^6q^5-462p^5q^6-330p^4q^7-165p^3q^8-55p^2q^9-11pq^{10}-q^{11}}{\overline{p+q}^{\,11}}\right.$,

pour 12 parties.

On aura donc pour 24 parties, ou douze Rois,

$$a\times\left\{\frac{\begin{array}{l}p^{23}+23p^{22}q+253p^{21}q^2+1771p^{20}q^3+8855p^{19}q^4+33649p^{18}q^5\\+100947p^{17}q^6+245157p^{16}q^7+490314p^{15}q^8+817190p^{14}q^9\\+1144066p^{13}q^{10}+1352078p^{12}q^{11}-1352078p^{11}q^{12}-1144066p^{10}q^{13}\\-817190p^9q^{14}-490314p^8q^{15}-245157p^7q^{16}-100947p^6q^{17}\\-33649p^5q^{18}-8855p^4q^{19}-1771p^3q^{20}-253p^2q^{21}-23pq^{22}-q^{23}\end{array}}{\overline{p+q}^{\,23}}\right.$$

Si $p=5$ & $q=4$,

On aura $a\times\frac{5-4}{9}=\frac{1}{9}a$ pour 2 parties.

$a\times\frac{425-304}{729}=\frac{121a}{729}$ pour 4 parties.

$a\times\frac{35625-23424}{59049}=\frac{12201a}{59049}$ pour 6 parties.

$$a \times \frac{2965625 - 1817344}{4782969} = \frac{1148281a}{4782969} \text{ pour 8 parties.}$$

$$a \times \frac{242359625 - 141604864}{383964489} = \frac{100754761a}{383964489} \text{ pour 10 parties.}$$

$$a \times \frac{20314265625 - 11066793984}{31381059609} = \frac{9247471641a}{31381059609} \text{ pour 12 parties.}$$

Et $a \times \frac{617677182163500976525}{886293811965250109529}$, ou environ $a \times \frac{193}{277}$ pour 24 parties.

Cette derniére grandeur eſt entre $\frac{2}{3}a$ & $\frac{3}{4}a$. Ainſi dans la ſuppoſition, que les forces ou habiletés des Joüeurs ſoient comme 5 à 4, l'avantage qu'a le Joüeur le plus fort ſur le plus foible n'eſt que la neuviéme partie de ce qui eſt au Jeu, lorſqu'ils joüent en deux parties, & cet avantage devient un peu plus des deux tiers de ce qui eſt au Jeu, lorſqu'ils joüent en vingt-quatre parties. Lors donc que dans cette ſuppoſition deux Joüeurs joüent au Picquet, & mettent au Jeu chacun neuf Loüis pour ce que l'on appelle la queüe des paris, le Joüeur le plus foible fait préſent à l'autre de 6 Loüis 13 liv. 0 ſ. 2 den. des neuf Loüis qu'il a mis au Jeu.

REMARQUE I.

Les grandeurs qui ont été trouvées dans les cas que l'on vient d'éxaminer, & qui expriment l'avantage du Joüeur le plus fort ; ces grandeurs, dis-je, étant compoſées de termes poſitifs & de termes négatifs, il eſt clair que la ſomme de tous les poſitifs exprimera le ſort du Joüeur le plus fort, ou ſon droit à la partie, & que la ſomme de tous les négatifs exprimera le ſort du plus foible, ou le droit qu'il a à cette partie ; car l'avantage n'eſt autre choſe que l'excès du ſort de l'un ſur le ſort de l'autre.

Ainſi, pour deux parties ;

Le ſort de l'un ſera $\frac{p}{p+q} \times a$. Et le ſort de l'autre ſera $\frac{q}{p+q} \times a$.

Pour quatre parties

$$\frac{\overline{p^3 + 3ppq}}{\overline{p+q}^3} \times a. \qquad \text{Et } \frac{\overline{3pqq + q^3}}{\overline{p+q}^3} \times a.$$

Pour six parties

$$\frac{\overline{p^5+5p^4q+10p^3qq}}{\overline{p+q}^5}\times a. \quad \text{Et} \quad \frac{\overline{10ppq^3+5pq^4+q^5}}{\overline{p+q}^5}\times a.$$

Pour huit parties

$$\frac{\overline{p^7+7p^6q+21p^5qq+35p^4q^3}}{\overline{p+q}^7}\times a. \quad \text{Et} \quad \frac{\overline{35p^3q^4+21ppq^5+7pq^6+q^7}}{\overline{p+q}^7}\times a.$$

Pour dix parties.

$$\frac{\overline{p^9+9p^8q+36p^7qq+84p^6q^3+126p^5q^4}}{\overline{p+q}^9}\times a.$$

$$\text{Et} \quad \frac{\overline{126p^4q^5+84p^3q^6+36ppq^7+9pq^8+q^9}}{\overline{p+q}^9}\times a.$$

D'où l'on voit que pour avoir le sort de chacun des deux Joüeurs, lorsqu'ils joüent un nombre quelconque de parties, il faut élever le binôme $p+q$ à une puissance dont l'exposant soit moindre d'une unité que le nombre de parties que l'on doit joüer, diviser en deux parties ce binôme ainsi élevé, dont la premiére sera composée de tous les premiers termes jusqu'au milieu, & la seconde, de tous les derniers termes pris, depuis le milieu. Chacune de ces parties étant le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est la puissance entiére, exprimera le sort de chacun des Joüeurs, & l'excès de l'une de ces fractions sur l'autre exprimera l'avantage du Joüeur le plus fort.

REMARQUE II.

Si l'on avoit cherché par une voye semblable à celle que l'on a suivie ici, le sort des Joüeurs & l'avantage de l'un sur l'autre, lorsqu'ils joüent en un nombre impair de parties, on auroit trouvé les mêmes formules que l'on a trouvées, en supposant ce nombre de parties exprimé par le nombre pair qui le suit, ensorte que le sort est le même, soit que l'on joüe en une ou deux parties; il est encore le même, soit que l'on joüe en trois ou quatre parties, cinq ou six parties, & ainsi des autres.

Ceci peut faire difficulté à la premiére vûë ; car il est visible que le Joüeur le plus fort a d'autant plus d'avantage que l'on joüe en un plus grand nombre de parties ; ainsi par cette considération il doit avoir plus d'avantage, lorsque l'on joüe en six parties, que lorsque l'on joüe en cinq parties. Mais cet avantage est diminué dans le cas de six parties, en ce que ce Joüeur, pour gagner, doit gagner deux parties plus que l'autre, car en ce cas, pour gagner, il faut qu'il prenne quatre parties, & l'autre deux ; au lieu que dans le cas de cinq parties, il suffit qu'il prenne une partie plus que l'autre, c'est-à-dire, trois parties, & l'autre deux : ainsi, par cette seconde considération, l'avantage du Joüeur le plus fort doit être diminué, car il est évident qu'il est plus difficile de gagner deux parties plus que l'autre, qu'il ne l'est d'en gagner seulement une de plus. Cette réfléxion suffit pour faire voir la possibilité de ce que donne le calcul, car le même raisonnement aura lieu pour tout nombre pair de parties comparé au nombre impair qui le précéde.

COROLLAIRE I.

Si l'on suppose $p = q$, & que l'on substitüe dans la Table qui exprime l'avantage du Joüeur le plus fort, pour q, sa valeur p, on verra que cet avantage devient nul dans tous les cas, c'est-à-dire, quelque soit le nombre de parties que l'on joüe. Et si l'on substitüe p à la place de q, dans la Table qui exprime le sort des deux Joüeurs, on trouvera $\frac{1}{2}$ pour le sort de chaque Joüeur, quelque soit le nombre de parties que l'on joüe, & c'est aussi ce qui doit arriver.

COROLLAIRE II.

Si avant la fin des parties que l'on est convenu de joüer, on étoit obligé de quitter le jeu, & que l'on voulût découvrir de quelle maniére il faut partager l'argent du jeu relativement à l'état où est la partie, lorsque l'on cesse de joüer : on trouvera de quelle maniére il faut faire ce partage, & quel est l'avantage ou le desavantage des Joüeurs, en éxaminant

entre toutes les Equations que l'on a été obligé de parcourir, quelle eſt celle qui renferme le cas propoſé, & cette Equation donnera ce qu'on cherche.

Si l'on demande, par exemple, quel eſt l'avantage de Pierre, qui eſt le Joüeur le plus fort, lorſque l'état de la partie eſt telle, que joüant en huit parties, ce Joüeur en a quatre, & l'autre deux, l'Equation de ce cas a été trouvée $k = \frac{\frac{app+2apq}{2}}{p+q}$ pour l'avantage de Pierre, qui dans la ſuppoſition de $p=5$ & $q=4$, donne $\frac{65}{81}a$ pour cet avantage; d'où il ſuit que ce qui appartient à l'un des Joüeurs eſt $\frac{73}{81}a$, & ce qui appartient à l'autre eſt $\frac{8}{81}a$, c'eſt-à-dire, qu'il faut que Paul donne à Pierre $\frac{65}{81}a$.

Si l'état de la partie eſt tel, que Pierre a deux points, & Paul quatre, lorſque l'on joüe en huit points, l'Equation de ce cas eſt $Y = -\frac{\frac{2apq-aqq}{2}}{p+q}$, qui eſt l'avantage de Pierre; mais comme cette grandeur eſt négative, elle exprime ce que Pierre doit payer à Paul, ou l'avantage de Paul, qui dans la ſuppoſition de $p=5$ & $q=4$, eſt $-\frac{56}{81}a$, c'eſt-à-dire, que Pierre doit payer à Paul $\frac{56}{81}a$, & les ſorts ſeront comme $\frac{25}{162}$ à $\frac{137}{162}$. Il en ſera ainſi des autres que l'on voudra imaginer.



DE LA

DE LA MECHANIQUE
avec laquelle diverses Especes de Chenilles, & d'autres Insectes, plient & roulent des feüilles de Plantes & d'Arbres, & sur-tout celles du Chêne.

Par M. DE REAUMUR.

IL ne faut point avoir fait une étude particuliére de l'Histoire naturelle pour avoir vû dans des Jardins, dans des Bois, certaines feüilles simplement courbées, d'autres pliées en deux, d'autres roulées plusieurs fois sur elles-mêmes, d'autres ramassées en un paquet informe, & pour avoir remarqué que ces feüilles sont tenües, dans ces différents états, par un grand nombre de fils. Nos Poiriers, nos Pommiers, nos Groseliers, & bien d'autres Arbres & d'autres Plantes, mettent chaque jour sous les yeux de ces sortes de feüilles. On a pû encore observer que le milieu de ces feüilles est souvent occupé par un Insecte, & ordinairement par une Chenille. Le Chêne, le meilleur de tous les Arbres pour nos usages, est aussi le plus amusant pour un Naturaliste; M. Valisnieri assûre qu'il nourrit seul plus de deux cents différentes especes d'Insectes; je n'ai pas compté celles que j'y ai observées, mais je ne crois pas qu'elles aillent loin de ce nombre. Il est aussi de tous les Arbres celui où l'on voit plus de feüilles pliées & roulées: on y en apperçoit qui le sont avec une régularité qui donne envie de sçavoir comment des Insectes peuvent venir à bout de les contourner de la sorte; ces Insectes sont des Chenilles. J'ai cherché à découvrir la méchanique à laquelle elles ont recours pour faire si bien prendre la forme de Rouleaux, ou de Cornets, à des feüilles. Je vais expliquer celle qu'elles m'ont laissé voir, & ce sera, je crois, avoir expliqué celle dont se servent quantité d'autres Insectes qui font des ouvrages du même genre, mais moins parfaits.

8 Mars 1730.

Si l'on considere les feüilles des Chênes, vers le milieu du Printemps, lorsqu'elles se sont entiérement développées & étenduës, on en apperçoit plusieurs roulées de différentes maniéres, toutes capables de leur attirer de l'attention. La partie supérieure du bout des unes paroît avoir été ramenée vers le dessous de la feüille, pour y décrire le premier tour d'une Spirale, qui a été ensuite recouvert de plusieurs autres tours, fournis par des roulements successifs, & poussés quelquefois jusqu'au milieu de la feüille, & quelquefois par de-là *. Nos doigts ne pourroient mieux faire pour rouler réguliérement une feüille, que ce qu'on voit ici; les Oublis ne sont pas mieux roulés. Le centre du rouleau est vuide, c'est un Tuyau creux, dont le diametre est proportionné à celui du corps d'une Chenille, qui l'habite, & qui la fait pour l'habiter. D'autres feüilles des mêmes Arbres (mais le nombre de celles-ci est plus petit) sont roulées vers le dessus comme les premiéres le sont vers le dessous. D'autres, en grand nombre, sont roulées vers le dessous de la feüille comme les premiéres, mais dans des directions totalement différentes. La longueur ou l'axe des premiers rouleaux est perpendiculaire à la principale nervûre & à la queüe de la feüille, la longueur de ceux-ci est parallele à la même nervûre *. Le roulement de celles-ci n'est quelquefois poussé que jusqu'à la principale nervûre, & quelquefois la largeur entiére de la feüille est roulée *. Les axes, ou longueurs, de divers autres rouleaux sont obliques à la principale nervûre, leurs obliquités varient sous une infinité d'angles, de façon néantmoins que l'axe du rouleau prolongé rencontre ordinairement la grosse nervûre du côté du bout de la feüille *. Quoique la surface des rouleaux soit quelquefois très-unie, & telle que la donne celle d'une feüille assés lice, il y en a pourtant qui ont des inégalités, des enfoncements, tels que les donneroit une feüille chifonnée.

* Figure 1.
* Fig. 2.
* Fig. 3.
* Fig. 18.

De pareils ouvrages ne seroient pas bien difficiles à faire à qui a des doigts, mais les Chenilles n'ont ni doigts ni parties qui semblent équivalentes. D'ailleurs d'avoir roulé les feüilles, c'est avoir fait au plus la moitié de la besogne, il

faut les contenir dans un état d'où leur ressort naturel tend continuellement à les tirer. La méchanique à laquelle elles ont recours pour cette seconde partie de l'ouvrage est aisée à observer. On voit des paquets de fils, attachés par un bout à la surface extérieure du rouleau, & par l'autre au plat de la feüille *; ce sont autant de liens, autant de petites cordes qui tiennent contre le ressort de la feüille. Il y a quelquefois plus de dix à douze de ces liens rangés à peu-près sur une même ligne, lorsque le dernier tour d'un rouleau a à peu-près la longueur, ou seulement la largeur entiére de la feüille. Toutes ou presque toutes les Chenilles sçavent filer; chaque lien est un paquet de fils de soye blanche, pressés les uns auprès des autres, mais qu'on juge pourtant tous séparés.

* Fig. 1. & 2. *lo, lo*, &c.

On imagine assés que ces petits cordages sont suffisants pour conserver à la feüille la forme de rouleau, mais il ne m'a pas paru aussi aisé d'imaginer comment la Chenille lui donnoit cette forme; comment, & dans quel temps elle attachoit les liens. Tout cela m'a semblé dépendre de bien de petites manœuvres que j'ai eu très-envie de sçavoir, & qu'on ne pouvoit apprendre qu'en les voyant pratiquer par l'Insecte même. Il n'y avoit gueres apparence d'y parvenir en observant les Chenilles sur les Chênes qu'elles habitent; le moment où elles travaillent n'est pas facile à saisir, & la présence d'un Spectateur ne les excite pas au travail. J'ai tenté un moyen qui m'a réüssi mieux que je ne l'esperois. J'ai picqué dans un grand Vase, plein de terre humide, des branches de Chêne fraîchement cassées; j'ai distribué sur leurs feüilles quantité de Chenilles que j'avois tirées des rouleaux qu'elles s'étoient déja faits. Par bonheur elles souffrent impatiemment d'être à découvert; sçavent-elles qu'elles courent alors risque de devenir la pâture des Oiseaux? ou si elles sentent qu'elles ont besoin d'être à l'abri des impressions du grand air? Quoiqu'il en soit, elles se sont mises à travailler dans mon Cabinet & sous mes yeux comme elles l'eussent fait en plein Bois.

Ordinairement c'est le dessus de la feüille qu'elles roulent vers le dessous, mais les unes commencent le rouleau par le

bout même de la feüille, & les autres par une des dentelures des côtés. Les rouleaux commencés de la premiére façon, se trouvent perpendiculaires à la principale nervûre, & ceux qui sont commencés de la seconde, lui sont ou paralleles ou inclinés. Quelque platte que paroisse une feüille, lors même que sa surface supérieure est concave, il est rare que le bord, ou quelque endroit du bord d'une de ses dentelures, ne soit point un peu recourbé en dessous; & quelque petite que soit l'étendüe de la partie recourbée, & quelque petite que soit sa courbure, ç'en est assés pour donner prise à la Chenille, pour la mettre en état de commencer à contourner la feüille, & de la contourner ensuite autant qu'il lui plaira. Des fils pareils à ceux qui maintiennent la feüille dans la figure de rouleau, servent à la lui faire prendre. Ce n'est qu'en la tirant successivement en différents endroits avec de petites cordes qu'elle vient à bout de la plier en une espece de spirale, qui a quelquefois cinq à six tours qui tournent autour du même centre.

Nôtre Insecte ayant donc choisi un endroit où le bord de la feüille est tant soit peu recourbé en dessous, elle s'y établit, & commence à travailler *. Alors sa tête se donne des mouvements alternatifs très-prompts; elle décrit alternativement des especes d'arcs en sens opposés, comme le sont ceux des vibrations d'un Pendule. Le milieu de son corps, ou quelque endroit plus proche de la queüe, est l'espece de centre sur lequel la tête, & la partie du corps à qui elle tient, se meuvent. La tête va s'appliquer contre le dessous de la feüille, tout près du bord, & de-là elle va s'appliquer le plus loin qu'elle peut aller, du côté de la principale nervûre *; elle retourne sur le champ d'où elle étoit partie la premiére fois, & revient de même ensuite retoucher une seconde fois l'endroit le plus éloigné du bord. Ainsi continüe-t-elle à se donner de suite plus de deux à trois cents mouvements alternatifs, c'est-à-dire, à filer autant de fils, car chaque mouvement de tête, chaque allée & chaque retour produit un fil, que la Chenille attache par chaque bout aux endroits où sa

* Fig. 4.

* Fig. 5. & 6.

tête paroît s'appliquer. Chacun de ces fils eſt tendu depuis la partie recourbée de la feüille juſqu'à ſa partie plane, il ſert, ou doit ſervir, à tirer la premiére vers la ſeconde ; tous ces fils enſemble doivent faire une eſpece de lien. Ils ne partent pas tous d'un même point, les ſurfaces ſur leſquelles ils ſont appliqués, ſoit du côté du bord de la feüille, ſoit du côté oppoſé, approchent quelquefois de la circulaire, & ont plus d'une ligne de diametre *. La Chenille même n'en colle pas un grand nombre en deſſous, près du bord de la feüille. Bientôt elle en colle quelques-uns contre le bord même, & ceux qu'elle file peu à près, elle les attache à la ſurface ſupérieure, à la vérité à une petite diſtance du bord *. Ce premier paquet de fils donne déja une augmentation de courbure à la feüille vers le deſſous. Une partie ſenſible paroît ſe replier; la partie même du bord, à laquelle le paquet de fils eſt attaché, eſt plus recourbée que celles qui la ſuivent, qui tendent à ſe redreſſer; mais bien-tôt une plus longue portion va ſe replier. Le premier lien ayant été aſſés fourni de fils, la Chenille va en commencer un autre à deux ou trois lignes de diſtance du précédent. Pour former celui-ci, elle fait une manœuvre préciſément pareille à celle qu'elle a employée pour le premier. Il a auſſi un effet pareil; la partie qui eſt entre le premier lien & le ſecond, ſe recourbe plus qu'elle n'étoit, & ce qui eſt par de-là le nouveau lien commence à ſe recourber, & ſe recourbera davantage, lorſque la Chenille aura filé plus loin un troiſiéme lien pareil aux précédents.

* Fig. 8. & 9.

* Fig. 7.

L'étendüe de la partie qui doit former le premier tour du rouleau n'eſt pas grande, il en eſt ici comme d'un papier qu'on roule, en commençant à le rouler près d'un de ſes angles; auſſi trois à quatre paquets de fils ſuffiſent pour donner la courbure à tout ce premier tour.

C'eſt encore au moyen de pareils fils, de pareils liens, que le ſecond tour doit être tortillé *. Il faut tirer vers le deſſous de la feüille une portion de ſa ſurface ſupérieure ſuffiſamment diſtante de celle qui a été roulée, c'eſt-à-dire, qu'il faut que chaque nouveau lien ſoit attaché par un bout à une partie

* Fig. 10.

de la feüille plus éloignée du bord, & que par l'autre bout il ſoit attaché plus près de la principale nervûre, ou de la queüe de la feüille. En un mot, des paquets de fils arrangés au deſſus de ceux du premier tour, comme ceux du premier l'ont été, doivent produire un effet ſemblable; & comme les premiers ont fait faire à la feüille un premier ou à peu-près un premier tour de ſpirale, de même les autres lui en feront faire un ſecond, ou à peu-près, & ainſi de tours en tours.

L'effet néantmoins de ces paquets de fils, leur entier uſage, n'eſt pas encore aſſés clair à beaucoup près, on voit bien, comme nous l'avons vû d'abord, qu'ils ſervent à tenir la feüille roulée; mais quoique je viſſe la feüille ſe courber de plus en plus, à meſure qu'un nouveau lien ſe finiſſoit, j'avoüe que je n'appercevois pas la cauſe du roulement. Le paquet n'eſt que l'aſſemblage de fils filés ſucceſſivement. Dans l'inſtant que chaque fil vient de ſortir de la filiére, pendant qu'il eſt mol encore, l'Inſecte l'applique contre la feüille, il eſt aſſés gluant pour s'y coller. Il peut bien avoir été tiré droit d'une partie de la feüille à l'autre, mais il ne ſçauroit avoir été aſſés tendu pour faire un effort capable de ramener les deux parties de la feüille l'une contre l'autre. Je ſçais que ce fil, quoique extrêmement délié, a quelque force; je l'ai vû en bien des circonſtances ſuſpendre la Chenille en l'air, mais il n'a pas été poſſible, que quand il a été attaché mol, qu'il ait été attaché avec le degré de tenſion néceſſaire pour forcer une des parties d'une feüille à s'approcher de l'autre. Si après avoir été filé, il ſe raccourciſſoit en ſéchant, ce raccourciſſement le mettroit en état d'agir, mais où peut aller le raccourciſſement d'un fil ſi court! combien donneroit-il peu de courbure à la feüille!

Une force plus puiſſante agit auſſi contre elle, c'eſt une grande partie du poids de la Chenille, & ce n'a été qu'après avoir vû cet Inſecte faire ſouvent de pareil ouvrage, que j'ai apperçû tout l'artifice de ſa méchanique. Il dépend de la ſtructure de chaque paquet de fils, de chaque lien. Nous l'avons conſidéré d'abord comme formé de fils à peu-près paralleles; mais à préſent, pour nous en faire une idée plus

exacte, nous devons le regarder comme composé de deux plans de fil posés l'un au dessus de l'autre *. Tous les fils du plan supérieur croisent ceux du plan inférieur. La manœuvre de l'Insecte m'en a convaincu ; les fils eux-mêmes observés à la Loupe devoient me le faire voir ; enfin un paquet consi- déré à la vûë simple, suffisoit pour découvrir cette structure qui m'avoit échappé ; il est plus large à l'une & à l'autre de ses extrémités, qu'il ne l'est au milieu, le nombre des fils du milieu est pourtant égal à celui des fils des bouts. Pourquoi y occupent-ils moins de place ? c'est qu'ils y sont plus serrés les uns contre les autres, c'est qu'ils s'y croisent. Regardons donc chaque lien comme composé de deux plans de fils qui se croisent, suivons la Chenille pendant qu'elle file ceux de chacun de ces plans, & nous découvrirons le double usage de ces deux plans, de ces deux especes de toile. Les fils du premier plan étant tous attachés à peu-près parallelement les uns aux autres, comme on le voit en *AB* *, la Chenille passe de l'autre côté pour filer ceux du second plan *CD* *. Pendant qu'elle file, elle ne peut aller de *C* en *D* sans passer sur les fils *AB*, & loin de chercher à les éviter, en soûtenant son corps & sa tête plus haut, on voit sa tête & une partie de son corps toûjours appliqués sur le plan *AB*, elle ne l'aban- donne point, elle le presse. Ces fils ensemble font une espece de toile, ou de chaîne de toile, capable de soûtenir cette pression ; ils tirent par conséquent les deux parties de la feüille l'une vers l'autre. Celle qui est près du bord cede, se rap- proche de l'autre ; la feüille se courbe. Il n'est plus question que de lui conserver la courbure qu'elle vient de prendre, & c'est à quoi sert le nouveau fil que la Chenille attache. Ces fils, comme je l'ai déja fait remarquer, sont capables de soû- tenir un effort aussi considérable que celui que la feüille fait contre eux, puisqu'ils peuvent soûtenir une Chenille en l'air. Il suit de ce que nous venons de dire, que les fils de la cou- che supérieure sont les seuls qui soient tendus, que ceux de la couche inférieure deviennent lâches, c'est aussi ce qu'on peut remarquer en observant le paquet avec attention.

* Fig. 12.
* Fig. 13.
* Fig. 14. & 15.

La même méchanique, qui s'obſerve dans les deux différentes couches d'un même lien, doit ſe trouver & ſe voit bien plus aiſément dans les liens des différents tours, comparés les uns aux autres. Quand la feüille ne fait encore qu'un tour de ſpirale, les liens qui retiennent ce tour ſont tendus; au moins leur partie ſupérieure l'eſt. Mais quand la même feüille a, par ſon roulement, fait un ſecond tour, ce ne ſont plus que les derniers liens qui retiennent ce tour, qui ſont tendus, tous ceux qui arrêtoient d'abord le tour précédent
* Fig. 16. ſont lâches, ils ne produiſent plus aucun effet*. Si on appuye légérement ſur ceux du ſecond tour avec une plume, on voit que la feüille eſt tirée par cet effort; mais quoiqu'on appuye davantage ſur ceux du premier tour, l'action ne paſſe pas juſqu'à la feüille, auſſi la vûë ſeule apprend qu'ils ſont comme flottants. Il n'y a donc que les liens du dernier tour, ou plûtôt que la couche ſupérieure des fils du lien du dernier tour, qui conſervent la courbure de la feüille.

Une Chenille qui s'eſt attaquée à une feüille de Chêne épaiſſe, dont les nervûres ſont groſſes, pourroit ne pas filer des fils aſſés forts pour tenir contre la roideur des principales nervûres, & ſur-tout de celle du milieu. Mais elle ſçait les rendre ſouples; elle ronge en trois à quatre endroits différents ce que ces nervûres ont d'épaiſſeur de plus que le reſte de la feüille; les endroits ainſi rongés n'ont qu'une petite étendüe. Ils m'ont paru ſe trouver où la feüille doit être pliée pour recommencer à faire un nouveau tour.

Quand la Chenille, après avoir roulé une portion de la feüille, parvient à un endroit où il y a une dentelure qui déborde beaucoup par de-là le reſte, il arrive que les fils qu'elle attache au bout de cette dentelure, au lieu de la rouler, la plient, elle ne ſe courbe que vers le commencement du pli, le reſte conſerve une figure à peu-près plane; de plus, ſi la Chenille donnoit à toute cette partie de la feüille une égale courbure, une égale rondeur, comme elle l'a fait aux parties qu'elle a ci-devant roulées, & qui étoient d'une moindre étendüe, le vuide du rouleau auroit là beaucoup plus de

de diametre qu'il n'en a ailleurs, il n'auroit plus les proportions commodes à l'Insecte. Après avoir observé de ces grandes dentelures de feüilles, qu'elles avoient presque pliées à plat, je les ai vû dans la suite en former un Tuyau d'un aussi petit diametre que l'étoit celui des autres endroits, & un Tuyau très-bien arrondi. Pour cela, la Chenille a besoin d'avoir recours à deux manœuvres différentes. 1.° Elle raccourcit la partie pliée, elle en retranche, pour ainsi dire, tout ce qu'elle a de trop d'étendüe, elle en attache une portion à plat contre la feüille par un millier de fils. 2.° Ce qui reste libre est trop applatti, c'est à coups de tête qu'il m'a paru qu'elle l'arrondissoit. J'ai vû des Chenilles renfermées dans ces endroits trop applattis, qui agitoient leur tête vivement & alternativement en des sens contraires. A chaque mouvement la tête frappoit contre les parois, c'étoient des especes de petits coups de marteau dont on entendoit le bruit.

Au reste, quand la Chenille a fini le premier tour du rouleau, elle travaille presqu'à moitié à couvert; le bout replié ne touche jamais entiérement la partie de la feüille sur laquelle il a été ramené, outre que souvent il n'est pas courbé autant qu'il le faudroit pour cela, c'est que ses bords sont dentelés, & laissent des passages au corps fléxible de l'Insecte. La Chenille se sert des mêmes passages pour faire sortir la moitié de son corps ou plus, lorsqu'elle file les liens qui attachent le milieu du troisiéme ou du quatriéme tour. Pour les liens qui sont plus près des bouts, les ouvertures des bouts lui donnent une plus libre sortie. Le bout de la queüe reste dans l'intérieur du rouleau, pendant que la tête va filer aussi loin qu'elle peut atteindre *, ce qui la mene assés près du milieu du rouleau. * Fig. 10.

Outre les liens qui sont tout du long du dernier tour du rouleau, l'Insecte a souvent besoin d'en mettre aux deux bouts, ou au moins à un des bouts; mais ils sont tellement disposés, qu'ils ne lui ôtent pas la liberté de sortir de l'intérieur de ce rouleau, & d'y rentrer. C'est-là son domicile, c'est une espece de cellule cylindrique, qui ne reçoit le jour

que par les deux bouts; & ce qu'elle a de commode, c'eſt que ſes murs fourniſſent la nourriture à l'Animal qui l'habite. Cette Chenille vit de feüilles de Chêne; étant à couvert, elle les ronge à ſon aiſe & en ſûreté. Elle commence par ronger le bout qui a été le premier contourné, & de ſuite elle mange tout ce qui a été tortillé, au dernier tour près. Auſſi de quatre à cinq tours que faiſoit une feüille tortillée par de-là le milieu, ou même entiérement tortillée, ſouvent on ne retrouve plus que le dernier tour.

Quelquefois j'ai trouvé que le rouleau avoit été formé de deux feüilles roulées ſelon leur longueur; celle qui devoit occuper le centre, avoit alors été preſqu'entiérement rongée; il n'en reſtoit que les plus groſſes fibres. J'en ai vû qui en faiſant leur rouleau, ne laiſſoient pas de manger; elles dreſſoient en même temps les endroits qui ſe feroient mal-aiſément pliés, elles les rongeoient.

Cette induſtrieuſe & laborieuſe Chenille eſt au plus de celles qui ſont d'une grandeur médiocre *. Elle eſt d'un gris ardoiſé; quelquefois elle paroît pourtant d'un brun verdâtre, mais je crois que c'eſt quand elle eſt bien ſoulée de feüilles. Peut-être auſſi que ſa couleur paroît différente après des changements de peau, car elle en change probablement pluſieurs fois, les dépoüilles qu'on trouve dans les rouleaux le prouvent. Elle eſt d'une extrême vivacité; pour peu qu'on la touche, on la voit ſe remuer en différents ſens avec une grande vîteſſe.

* Fig. 17.

Un des bouts du rouleau eſt l'ouverture par où elle jette ſes excréments, qui ſont de petits grains noirs & à peu-près ronds.

Une partie d'une feüille, ou même une feüille de Chêne entiére, ne feroit pas une proviſion ſuffiſante pour la nourriture de nôtre Chenille pendant toute ſa vie; elles ſe font de nouveaux rouleaux quand elles en ont beſoin. Après y avoir vécu en Chenilles, elles s'y métamorphoſent en Cryſalides, & enſuite en Papillons. Le dernier rouleau qu'elles ſe font, diffère un peu des autres, les tours en ſont moins ſerrés,

l'Insecte est devenu plus gros. Chaque tour de ce dernier rouleau n'est pas attaché par ces forts liens distribués d'espaces en espaces, des fils un peu écartés les uns des autres, mais qui regnent depuis un bout jusqu'à l'autre, le retiennent *; c'est une espece de toile légere dont la force n'est pas équivalente à celle des cordages employés ci-devant. Il semble que l'Insecte sçache proportionner la force qu'il employe à la résistance qu'il a à vaincre; plus le diametre des tours est petit, & plus le ressort de la feüille agit pour la redresser, aussi est-ce sur-tout le dernier tour qui n'est tenu que par la toile dont nous parlons. Dans la fabrique de cette espece de toile, on observe la même méchanique que nous avons remarquée dans celle des liens; elle est de même composée de deux plans de fils qui se croisent très-visiblement; ceux de dessous servent à tirer la feüille, à la courber, pendant que l'Insecte s'appuye dessus, & qu'il file ceux du plan supérieur qui doivent la fixer dans cette courbure.

* Fig. 18.

C'est dans ces mêmes Etuis, où nos Chenilles ont vécu & crû, qu'elles se transforment en Crysalides *. La peau des Crysalides est molle & tendre dans les premiers moments de la transformation, quoique par la suite elle devienne séche & dure; l'attouchement de la feüille seroit trop rude pour cette peau, lorsqu'elle ne vient que d'être dégagée de dessous l'enveloppe de Chenille. Il semble que l'Insecte ait prévû qu'il avoit à craindre cette incommodité, car lorsque le temps de cette premiére métamorphose approche, il tapisse l'intérieur du rouleau d'une légere couche de fils de soye, dont l'attouchement est plus doux que celui de la surface raboteuse de la feüille.

* Fig. 19. & 20.

Enfin à l'état de Crysalide doit succéder celui de Papillon *. La condition de cette Chenille, comme celle de toutes les Chenilles que nous connoissons, est de vivre successivement sous ces trois formes différentes. Je ne sçais point assés précisément combien elle conserve celle de Crysalde, mais il ne m'a pas paru que ce fut plus de trois semaines. Quand elle est prête de la quitter, elle avance vers un des bouts du

* Fig. 21. & 22.

* Fig. 18. r. rouleau jusqu'à en sortir près d'à moitié ou plus *; là, plus exposé à l'air, le fourreau de Crysalde acheve de se sécher, & les efforts que fait le Papillon, qu'il renferme, le brisent plus aisément. Le Papillon s'en échappe, & n'a plus besoin, pour prendre l'essor, que de laisser évaporer pendant quelques instants l'humidité de ses aîles. Si on éxamine dans le mois de Juillet les rouleaux de nos feüilles du Chêne, il y en aura peu à qui on ne trouve un fourreau de Crysalde qui est resté à un des bouts, & cela parce que les Papillons en sont sortis depuis le mois de Juin.

La couleur de ces Papillons est composée de différentes nuances de brun jaunâtre, les unes plus foncées, les autres plus claires, mêlées par des especes de taches qui font un
* Fig. 21. & 22. agréable effet *. Les mêmes Chenilles en donnent de deux grosseurs différentes. Les plus petits, selon l'analogie ordinaire, devroient être les mâles, j'en ai pourtant vû d'accouplés qui ne différoient pas considérablement en grosseur. Pendant leur accouplement, ils sont placés derriére contre derriére, à la maniére des Hannetons.

Au reste l'espece de Chenille grise, ou d'un gris verdâtre, dont nous avons parlé jusqu'ici, n'est pas la seule qui roule des feüilles de Plantes & d'Arbres, ni même la seule qui roule des feüilles de Chêne. J'ai observé d'autres especes, soit beaucoup plus grosses, soit plus petites, qui roulent aussi les feüilles de ce dernier Arbre, & entre celles-ci j'en ai observé d'entiérement vertes, de verdâtres, & de diverses autres couleurs. Il y en a une qui roule fort artistement les feüilles d'Orme, qui ne differe guére ni par sa grandeur, ni par sa couleur, de nôtre habile rouleuse. Mais comme toutes ces diverses especes n'ont point d'artifices différents de celui que nous avons suivi jusqu'ici, que leurs rouleaux ne sont pas toûjours aussi-bien faits que ceux que nous avons décrits, elles n'ont rien qui doive nous arrêter. En général presque toutes les rouleuses sont d'une très-grande vivacité.

Il nous reste à parler des Chenilles qui, au lieu de rouler les feüilles, se contentent de les plier. Le nombre de ces

plieuſes eſt encore plus grand que celui des rouleuſes, leurs ouvrages ſont plus ſimples; mais il y en a qui malgré leur ſimplicité ne laiſſent pas de paroître induſtrieux. Le Chêne nous fournit encore de ceux-ci; on voit de ſes feüilles dont le bout a été ramené vers le deſſous *; il y a été appliqué & aſſujetti preſque à plat, il ne reſte d'élévation ſenſible qu'à l'endroit du pli. J'ai obſervé de ces feüilles, où tout le contour de la partie pliée étoit logé dans une eſpece de rainure que la Chenille avoit creuſée dans plus de la moitié de l'épaiſſeur de la feüille. Sur d'autres feüilles du même Arbre, on voit que de leurs grandes dentelures ont été de même pliées en deſſous. La plûpart des autres Arbres nous offrent auſſi des feüilles pliées par les Chenilles. Mais il n'y en a point où on puiſſe en obſerver plus commodément que ſur les Pommiers, ils en ont de toutes eſpeces à nous faire voir; de ſeulement pliées en partie, je veux dire de ſimplement courbées *; de pliées entiérement, je veux dire, où la partie pliée a été ramenée à plat ſur une autre partie de la feüille; de courbées, de pliées vers le deſſus, & de courbées ou pliées vers le deſſous. Entre ces derniéres, le Pommier même en a qui ont une ſingularité que je n'ai obſervée ſur aucunes de celles des autres Arbres. Tout autour du bord de la dentelure de la partie repliée, il y a un bourlet comme cotonneux, qui eſt pourtant de ſoye d'un jaune pâle *; il s'éleve d'environ une ligne au deſſus de la partie qu'il entoure; il la borde comme feroit un cordonnet; il a plus d'épaiſſeur que de largeur.

* Fig. 23.

* Fig. 24.

* Fig. 27.

Au lieu que les Chenilles rouleuſes habitent des rouleaux, les plieuſes ſe tiennent dans une eſpece de Boîte plate; elles n'y ont pas un grand eſpace, mais il eſt proportionné à la grandeur & à la groſſeur de leur corps; ordinairement elles ſont des plus petites. Chacune eſt bien cloſe dans cette eſpece d'étui plat, ou de boîte; il reſte pourtant quelquefois une ouverture à chaque bout, mais à peine ces ouvertures ſont-elles ſenſibles *. Elles ſe renferment auſſi pour ſe nourrir à couvert; mais ſi elles rongeoient, comme font les rouleuſes,

* Fig. 27. BD.

l'épaiſſeur entiére de la feüille, leurs eſpeces de boîtes ſeroient bien-tôt tout à jour, au lieu que tant qu'elles y demeurent, jamais on n'y voit de trous. Leur goût, & peut-être leur prévoyance, les porte à ne manger qu'une partie de l'épaiſſeur de la feüille. Celles qui plient les feüilles en deſſous, épargnent la membrane qui en fait le deſſus, & celles qui plient les feüilles en deſſus, épargnent la membrane qui en fait le deſſous. Les unes & les autres n'attaquent point les nervûres & les fibres un peu groſſes. Elles ſçavent ne détacher que la ſubſtance la plus molle, la pulpe, le parenchime qui eſt renfermé dans le rézeau fait par l'entrelaſſement des fibres. Auſſi la ſtructure de ce rézeau eſt-elle bien plus ſenſible dans les endroits où elles ont rongé que dans les autres.

Celles qui habitent des feüilles bien pliées, commencent à ronger la ſubſtance de la feüille à un des bouts de l'étui, & la partie qui a été rongée la premiére, eſt celle ſur laquelle elles dépoſent leurs excréments. Elles continüent à ronger, en avançant vers l'autre bout, mais elles ont la propreté d'aller jetter leurs excréments dans l'endroit où ſont les premiers ; ainſi ils ſe trouvent accumulés à un coin, & jamais il n'y en a d'épars. C'eſt au moins ce qu'obſervent réguliérement les Chenilles de nos Pommiers, dont les étuis ſont environnés d'un bourlet ou cordon ſoyeux. On voit avec plaiſir manger celles qui ſe contentent de courber des feüilles, ſur-tout ſi on les conſidere à la Loupe. On remarque avec quelle adreſſe & avec quelle vîteſſe elles découpent partie de l'épaiſſeur de la feüille. Leur tête eſt un peu inclinée vers un côté, afin apparemment qu'une ſeule de leurs dents perce d'abord une petite portion de la ſubſtance de la feüille, que les deux dents, ſerrées l'une contre l'autre, dans le moment ſuivant, ſçavent détacher. Les coups de dents ſe ſuccedent avec une vîteſſe prodigieuſe, & à meſure qu'ils ſont réitérés, le rézeau, formé par les fibres, ſe découvre, devient net, dans les endroits où auparavant il étoit à peine ſenſible. Ce n'eſt que par de petites aires que la ſubſtance de la feüille eſt emportée.

Ces Chenilles, qui ſe contentent de courber les feüilles,

ſont celles auſſi qui ſont les plus aiſées à obſerver dans leur travail, il eſt le plus ſimple de ceux de ce genre ; il ſuffira pourtant de l'avoir détaillé, pour avoir donné une idée de tous les autres. Une petite Chenille d'un verd clair, dont chaque anneau eſt chargé de pluſieurs petits grains noirs, eſt ſur toutes commode à ſuivre, elle aime à ronger le deſſus de la feüille, & par conſéquent elle doit plier la feüille, ou ramener la dentelure de quelque endroit de ſes bords, vers le deſſus; elle ſe contente de faire décrire un arc tantôt plus, tantôt moins courbe à la partie qu'elle contourne *, mais jamais elle ne la contourne au point de ramener ſes bords à toucher le deſſus de la feüille. Elle ne craint point la préſence du Spectateur, elle plie la feüille ſur ſa main, s'il tient ſa main en repos. Une de ces Chenilles étant poſée ſur le deſſus d'une feüille platte de Pommier, n'eſt donc pas longtemps ſans travailler à donner à une portion de cette feüille la courbure qu'elle lui veut. Entre les différents endroits des bords de la feüille, il y en a toûjours qui s'élevent plus que les autres. C'eſt à un de ceux-là qu'elle s'adreſſe ; elle s'en approche à une diſtance convenable, & ſe fixant ſur ſa queüe & ſur les anneaux qui en ſont proche, elle porte ſa tête ſur le bord de la feüille, & de-là la ramene ſur le plat de la feüille, du côté de la principale nervûre *; elle file de ſuite pluſieurs fils paralleles les uns aux autres, qui ſont le commencement d'une piéce de toile qu'elle va étendre.

* Fig. 24.

* Fig. 25.

Nous avons conſidéré la feüille comme à peu-près platte, mais ſeulement comme à peu-près platte, ainſi les fils qui viennent d'être filés ne ſont appliqués contre cette feüille que par leurs bouts, le reſte de leur longueur eſt en l'air. La Chenille monte ſur ces fils qui, chargés de ſon poids, forcent le bord de la feüille à avancer vers la principale nervûre. Les nouveaux fils, que la Chenille file en cette poſition, maintiennent le bord de la feüille dans le commencement de la courbure qu'elle a priſe; en étendant enſuite cette toile, & marchant deſſus à meſure qu'elle l'étend, la Chenille force toûjours de plus en plus la feüille à ſe plier. Cette méchanique

eſt bien ſimple, & ne mériteroit pas de nous arrêter, après avoir vû pratiquer l'équivalent par nos rouleuſes, mais le ſupplément qu'il faut y ajoûter ne doit pas être paſſé ſous ſilence. Les fils qui compoſent la toile, n'ont qu'une longueur proportionnée aux arcs que la tête de la Chenille peut décrire, étant fixée ſur une portion de ſon corps. Si au moyen de cordes ſi courtes, & dirigées comme elles le ſont, la Chenille forçoit la feüille à ſe courber entiérement, la feüille ainſi courbée décriroit une circonférence d'un très-petit rayon, telles que ſont celles des premiers tours de certains rouleaux. Or la courbure qu'elle veut, & qu'elle a beſoin de donner à cette partie de la feüille, doit être celle d'un cercle, ou d'une autre courbe d'un plus grand rayon. Pour parvenir à la lui donner, elle ne continüe pas à la tirer par des cordes ſi courtes, ou dont les directions ſoient ſi inclinées. Après avoir filé une certaine étendüe de toile, elle ceſſe de ſuivre la même ligne, elle vient ſe placer plus près de la groſſe nervûre*, & là elle commence à filer une toile compoſée de fils; elle colle un des bouts de chacun des nouveaux fils à la toile précédente, & l'autre le plus près qu'elle peut aller de la principale nervûre, ou même par de-là. Ce qui fait le même effet que ſi elle eût augmenté près d'une fois la longueur des premiéres cordes. Elle monte alors ſur ce nouveau plan, & ſe place vers l'endroit où les deux piéces de toiles ont été réünies. Là placée, elle attache des fils au bord de la feüille, & vers la principale nervûre, elle forme une nouvelle toile; à cette nouvelle toile, elle attache bien-tôt les fils d'une autre, qui croiſent ceux de la précédente, & ainſi de ſuite elle continüe à faire courber la feüille, mais doucement, & ſans que ſa courbure ſoit conſidérable. Des plans de toile s'élevent ainſi ſucceſſivement les uns aux deſſus des autres, & quand la Chenille a avancé ſon ouvrage, elle paroît, par rapport à la ſurface de la feüille, comme ſur un échafaud.

* Fig. 26.

Elle ne ſe tient pourtant pas toûjours ſur ces plans de toile; de temps en temps elle en deſcend, & vient ſur la ſurface de la feüille, quelquefois c'eſt pour s'y repoſer en

mangeant;

mangeant ; quelquefois on l'y voit la tête levée, agiter avec vîtesse ses premiéres jambes ; elles lui servent alors de mains pour briser les toiles des plans inférieurs, qui ne peuvent plus que l'incommoder, lorsqu'elle veut marcher sur la feüille, & qui peuvent même s'opposer à l'effet qu'elle a à faire produire aux toiles des plans supérieurs.

Celles-ci, comme je l'ai assés dit, se contentent de courber une portion de la feüille ; mais celles qui achevent de la plier, ne commencent pas leur ouvrage autrement ; elles commencent par faire prendre de la courbure à la partie qui doit être ramenée à plat, & quand elle en a pris suffisamment, la Chenille passe sous le plan de toile qui la tient courbée, & au dessous de ce plan elle en file d'autres, successivement, qui sont tous de plus proches en plus proches du pli de la partie recourbée. L'effet de ceux-ci dépend de leur position. N'en considérons qu'un, celui qui suit immédiatement l'extérieur. D'un côté les bouts de ses fils ne sont pas attachés à la dentelure, ils le sont un peu au dessous, & par l'autre bout ils sont attachés à partie de la feüille correspondante. D'où il est clair que quand la Chenille charge ce plan de fils, cette toile, qu'elle approche l'une de l'autre les deux parties de la feüille, qu'elle les approchera encore davantage, & qu'elle les conduira à s'appliquer l'une contre l'autre, en filant une seconde, une troisiéme couche de fils, s'il en est besoin, dont les bouts des fils se trouvent toûjours attachés plus près de l'endroit où doit être le pli.

Les couches de fils, les toiles qui précédent la derniére filée, ne produisent presque plus d'effet *. Les fils des premiéres se trouvent en dehors de la dentelure, & la Chenille y pousse ceux des toiles qui la suivent. De-là il arrive que ces fils lâches, entrelassés, & poussés par de-là le bord de la partie pliée, forment une espece de bourlet, qui semble avoir été fait avec plus d'artifice qu'il ne l'a été *.

* Fig. 28.

* Fig. 27.

Au reste, quelque soit la position de la feüille, la Chenille fait toûjours le même usage du poids de son corps pour la courber ou plier. Si une feüille est posée horizontalement,

& que la Chenille la courbe en dessus, alors le plan des fils est plus élevé que la surface de la feüille, & la Chenille va se mettre sur le dessus de cette toile. Mais si la Chenille roule la feüille en dessous, le plan de chaque toile est plus bas que celui de la feüille, & la Chenille charge cette toile, tantôt en se posant sur la surface intérieure, & elle est alors dans une situation naturelle, tantôt en se mettant à la renverse sur la surface extérieure, & tenant ses jambes cramponnées entre les fils de la toile. Il y en a même qui ne travaillent à plier les feüilles de Chêne, qu'en se tenant cramponnés de la sorte.

Des circonstances déterminent quelquefois des Chenilles, qui plient ordinairement des feüilles en dessous, à les plier en dessus, elles profitent des dispositions qu'a la feüille à se contourner plus d'un côté que de l'autre; c'est ce que m'ont fait voir celles que j'ai fait travailler chés moi. Ainsi il ne leur est pas absolument essentiel de ronger la feüille par une de ses surfaces plûtôt que par l'autre. Il y a des feüilles de Chêne qui sont pliées par le moyen de paquets, de liens de fils, pareils à ceux qu'employent les rouleuses, mais on trouve assés ordinairement dans l'intérieur du pli des toiles, qui ont apparemment servi à achever d'approcher les deux parties l'une de l'autre.

Toutes ces Chenilles se métamorphosent en Papillons, mais la plûpart très-petits, ce qui m'a fait négliger de les faire graver.

Diverses especes d'Araignées courbent aussi des feüilles; d'autres les plient, & d'autres les assemblent en paquet. Ce que nous avons vû pratiquer aux Chenilles, met assés au fait des différentes maniéres dont s'y peuvent prendre les Araignées, qui sont de maîtresses fileuses. Au reste si les Araignées plient des feüilles, c'est pour s'y renfermer avec leurs œufs, qu'elles déposent sur ces mêmes feüilles, & qu'elles y enveloppent de soye. Là elles se placent sur le paquet d'œufs, sur lequel elles restent constamment, comme s'il avoit besoin d'être couvé.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA *Figure 1*, repréſente une feüille, dont le bout a été roulé vers le deſſous. La face *AA*, qui paroît ici, eſt celle de deſſous. *BC* le rouleau, dont la partie qui paroît eſt une portion du deſſus de la feüille. *lo, lo, lo*, marquent quelques-uns des liens de ſoye qui tiennent cette feüille roulée.

La *Figure 2*, eſt celle d'une feüille roulée parallelement, ou à peu-près, à ſa principale nervure *N*. La face *AN* eſt le deſſous de la feüille. *BC* le rouleau. *lo, lo, lo*, quelques-uns des liens de ſoye qui conſervent ce rouleau dans ſa forme. Ici il n'y a à peu-près que la moitié de la feüille roulée.

La *Figure 3*, eſt celle d'une feüille roulée en entier, parallelement à ſa principale nervure. *ll, ll*, les liens du rouleau.

La *Figure 4*, fait voir une Chenille, qui profitant de la petite courbure que la feüille a en *A*, va travailler à la rouler parallelement à ſa principale nervure.

La *Figure 5*, & la *Figure 6*, repréſentent des Chenilles en différentes attitudes, qui n'ont encore collé leurs fils que ſur le plat de la feüille, & au deſſous de la partie courbée, ou à ſon bord.

La *Figure 7*, repréſente une Chenille qui colle un fil en deſſus de la feüille, en deſſus de la partie repliée.

La *Figure 8*, eſt celle d'une feüille qu'une Chenille a commencé a rouler par le bout. Elle a déja attaché les liens *lo, lo*, & file actuellement le lien *IK*.

Dans la *Figure 9*, la Chenille a filé trois liens *lo, lo, lo*; & va en commencer un quatriéme.

La *Figure 10*, montre un rouleau, dont le premier tour eſt fini, & dont le ſecond eſt commencé. Les liens *MN* de ce tour ſont au deſſus des liens *lo* du tour précédent.

La *Figure 11*, eſt celle d'une feüille, dont le ſecond tour eſt roulé ſur une plus grande longueur que dans la Fig. 10.

La *Figure 12*, repréſente deux plans de lignes *AB, CD*, qui ſe croiſent en *E*: elle donne en grand une image de la

ſtructure de chaque lien *lo* des autres Figures. Les lignes de chacun de ces plans doivent être regardées comme autant de fils.

Dans la *Figure 13*, une Chenille eſt repréſentée filant le premier plan *AB* des fils, dont un paquet ou lien eſt compoſé.

Dans les *Figures 14* & *15*, la Chenille a changé de côté, & file le ſecond plan, le plan ſupérieur des fils du lien *CD*. Dans la Fig. 14, elle colle le bout d'un nouveau fil en *C*, & dans la Fig. 15, elle colle l'autre bout du même fil en *D*; & pendant qu'elle l'y colle, le poids de ſon corps charge le premier plan.

La *Figure 16*, eſt la coupe d'un rouleau, qui fait environ deux tours; on y voit les fils des liens *lo* lâches & flottants, pendant que les fils ſupérieurs du lien *NM* du ſecond tour ſont ſeuls tendus.

La *Figure 17*, repréſente nôtre Chenille rouleuſe dans la grandeur naturelle. On l'a dans d'autres attitudes dans pluſieurs des Figures précédentes.

La *Figure 18*, eſt celle d'une feüille que la Chenille a roulée, lorſqu'elle étoit prête de ſe métamorphoſer. Les fils qui maintiennent le dernier tour de ce rouleau depuis *p* juſqu'en *q*, ne ſont pas diſpoſés par paquets, ils forment une eſpece de toile. En *r* eſt la coque de la Cryſalide, d'où l'Inſecte eſt ſorti ſous la forme de Papillon.

La *Figure 19*, repréſente une Cryſalide de cette Chenille, vûë par deſſous en *A*, & par deſſus en *B*.

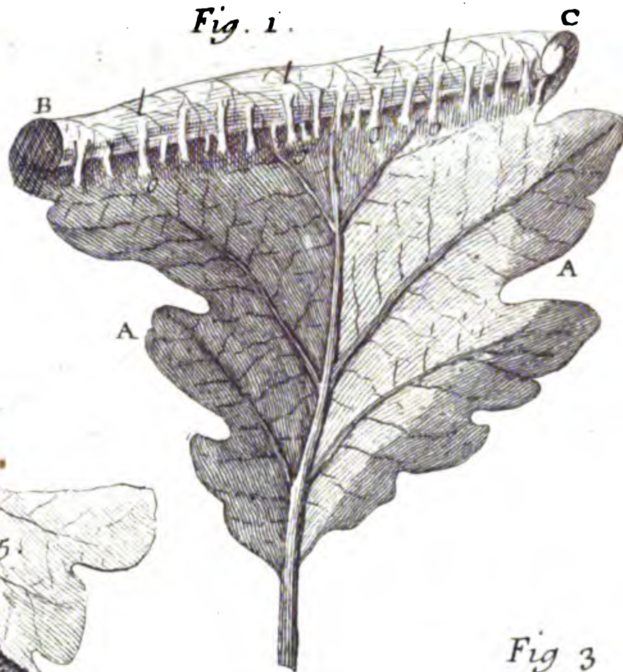
La *Figure 20*, eſt la Cryſalide *A* deſſinée plus grande que nature.

Les *Figures 21* & *22*, ſont celles de deux des Papillons dans leſquels nos Chenilles ſe transforment. Celui de la Figure 21 eſt plus petit que celui de la Fig. 22.

La *Figure 23*, eſt celle d'une feuille de Chêne, dont le bout *bcb* a été plié en deſſous.

La *Figure 24*, repréſente une de ces feüilles de Pommiers que les Chenilles ſe contentent de courber.

La *Figure 25*, fait voir une Chenille qui commence à



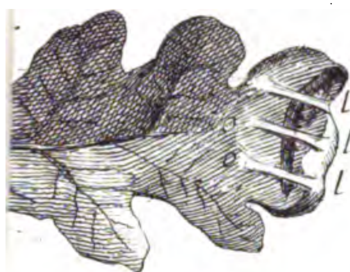


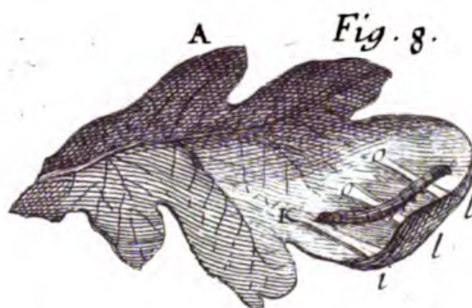






Ph. Simonneau Sculp.





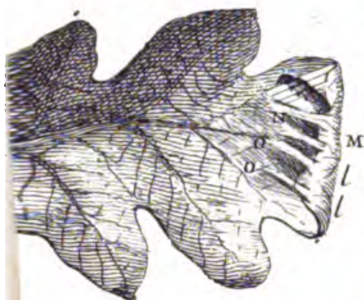
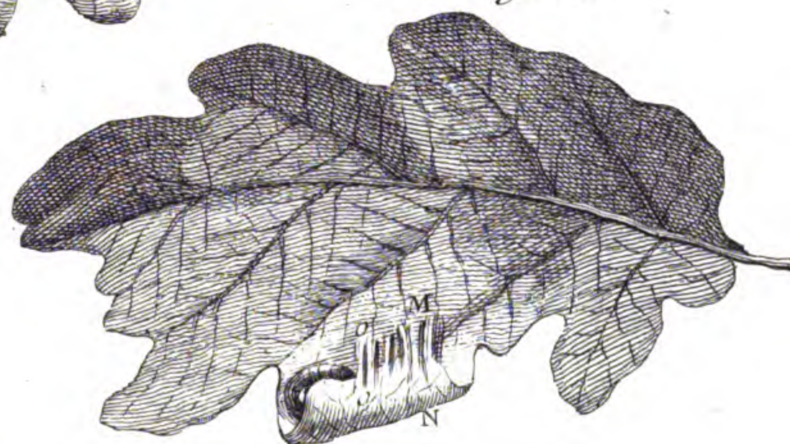
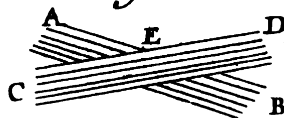
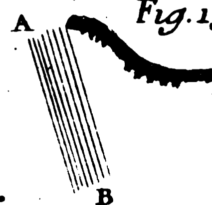


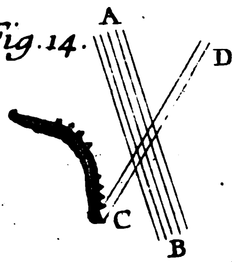
Fig. 10.











Ph. Simonneau Sculp.



Fig. 17.

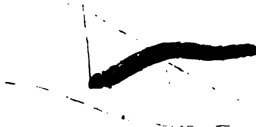


Fig. 17.



Fig. 22.



Fig. 19.





Fig. 20.



Fig. 21.



Fig. 24.



Fig. 23.



Ph. Simonneau Sculp.





Fig. 25.

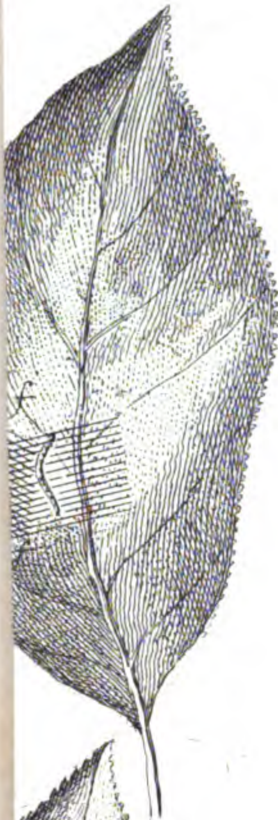
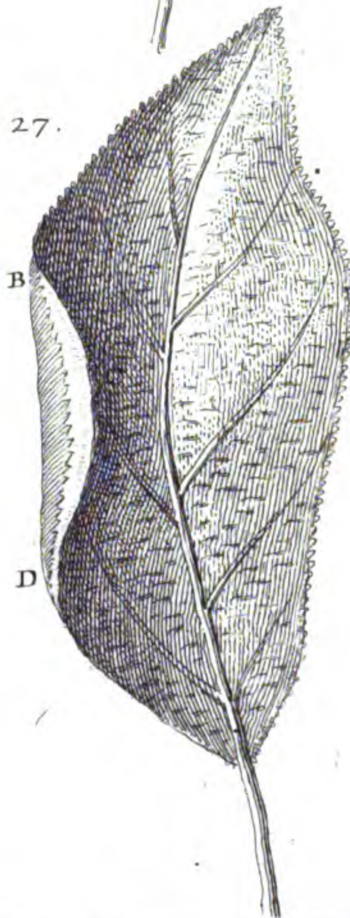




Fig. 27.





Ph. Simonneau Sculp.

attacher des fils à une feüille de Pommier pour la courber : elle a déja fait une espece de toile composée de fils paralleles.

Dans la *Figure 26*, la Chenille a filé une seconde portion de toile ; un des bouts de chacun des fils de celle-ci est attaché sur la toile précédente. Les fils de la derniére croisent les fils de la premiére, leur direction est oblique à celle des autres. Entre *f, f,* on voit que les fils de la seconde toile sont attachés à ceux de la premiére.

La *Figure 27*, est celle d'une feüille de Pommier pliée vers le dessous. *BCD* est un bourlet ou cordon soyeux, qui entoure la dentelure de la partie pliée.

La *Figure 28*, fait voir la feüille précédente dans un temps où elle n'étoit pas entiérement pliée. En *efg* paroissent les toiles, qui plus pressées les unes contre les autres, font le bourlet soyeux, lorsque la portion de la feüille est entiérement pliée.



METHODE

Pour trouver les Tautochrones, dans des Milieux résistants, comme le Quarré des Vîtesses.

Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à Bâle.

AVANT que d'entreprendre la Solution générale, voici quelques considérations nécessaires sur les fonctions semblables composées d'indéterminées proportionnelles.

DÉFINITION I. Si l'on forme une fonction quelconque d'une quantité déterminée a, & d'une indéterminée x, de maniére que a & x fassent ensemble le même nombre de dimensions dans chaque terme ; prenant ensuite une autre déterminée A, & une indéterminée X, proportionnelles aux premiéres a & x, c'est-à-dire, telles que $a . A :: x . X$, si l'on forme de A & X une nouvelle fonction, pareille à celle qu'on a formée de a & x, j'appelle ces deux fonctions, & les autres de cette espece, *fonctions semblables*. Ainsi par ex. $a^3 + faax + gaxx + hx^3$ & $A^3 + fAAX + gAXX + hX^3$ sont des fonctions semblables ; de même $V(a^4 + fx^4)$ & $V(A^4 + fX^4)$; $\frac{aa + fax + gxx}{ha^3 + ix^3}$ & $\frac{AA + fAX + gXX}{hA^3 + iX^3}$; $a + V(ax + fxx)$ & $A + V(AX + fXX)$; $\frac{a+x}{axx + f\sqrt{(a^6 + x^6)}}$ & $\frac{A+X}{AXX + f\sqrt{(A^6 + X^6)}}$; & ainsi des autres, prenant toûjours $f, g, h, i,$ &c. pour des coëfficients numériques.

DÉFINITION II. J'appelle aussi *fonctions semblables transcendentes*, celles des précédentes qui seroient multipliées par dx & dX, & qui seroient supposées intégrées par le signe $\int$. Ainsi par ex. $\int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ & $\int \frac{AdX}{\sqrt{(AA - XX)}}$ sont des fonctions semblables transcendentes, & ainsi des autres.

DÉFINITION III. Les fonctions semblables, soit algébriques, soit transcendentes, sont estimées être d'une telle ou telle dimension, dont l'exposant est le nombre qui reste, quand on retranche l'exposant des termes du dénominateur, de l'exposant des termes du numérateur, en comptant dx ou dX pour une dimension ; & s'il y a des signes radicaux, en divisant d'abord l'exposant des termes par l'exposant du signe. Ainsi $\sqrt{(a^4+x^4)}$ est réputé de deux dimensions ; $\frac{a+x}{axx+f\sqrt{(a^6+x^6)}}$ aura pour dimension $1-3=-2$; $\int\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ est d'une dimension, parce que adx est de deux dimensions, & $\sqrt{(aa-xx)}$ d'une ; ainsi cette fonction $\int\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ a pour exposant $2-1=1$, de même $\frac{a^3+faxx}{gaxx+hx^3}$ & $\int\frac{axdx}{fa^3+gx^3}$ n'ont aucune dimension, parce que $3-3=0$.

THEOREME.

Toutes les fonctions semblables, soit transcendentes, soit algébriques, sont entre elles comme leurs quantités semblables a *&* A, *ou* x *&* X, *élevées au même exposant que ces fonctions. Ainsi par ex.* $aa . AA :: (xx . XX ::) \frac{a^3+faxx}{gx} . \frac{A^3+fAXX}{gX} :: \int dx\sqrt{(aa+xx)} . \int dX\sqrt{(AA+XX)} :: \int\frac{x^3dx}{aa+ax} . \int\frac{X^3dX}{AA+AX}$; *de même* $\frac{1}{a} . \frac{1}{A} :: (\frac{1}{x} . \frac{1}{X} ::) \frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}} . \frac{1}{\sqrt{(AA-XX)}} :: \int\frac{adx}{\sqrt{(a^6-x^6)}} . \int\frac{AdX}{\sqrt{(A^6-X^6)}} :: \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(a^6+x^6)}} . \int\frac{dX}{\sqrt[3]{(A^6+X^6)}}$, *& ainsi des autres.*

COROLL. L'on voit par-là que toutes les fonctions semblables, qui n'ont aucune dimension, sont égales entre elles : car elles sont entre elles comme a^0 à A^0, ou comme x^0 à X^0. Mais $a^0=1=A^0$, ou $x^0=1=X^0$. Ainsi par exemple $\int\frac{adx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}=\int\frac{AdX}{\sqrt{(A^4-X^4)}}$; $\int\frac{aadx+xxdx}{a^3+fx^3}=\int\frac{AAdX+XXdX}{A^3+fX^3}$; $\frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{f\sqrt[3]{(axx)}}=\frac{A+\sqrt{(AA-XX)}}{f\sqrt[3]{(AXX)}}$; $\frac{a+fx}{a-gx}+\frac{aa+hax}{aa-gxx}$

$= \frac{A+fX}{A-gX} + \frac{AA+hAX}{AA-gXX}$, & ainſi des autres.

SCHOLIE. J'ai déja traité ce même ſujet autrefois dans un Mémoire que donna feu mon Fils Nicolas, inſéré dans le VII.e Tome des Suppl. des Act. de Leipſ. pag. 322. La démonſtration ſe préſente d'elle-même, pour peu qu'on y faſſe attention, & eſt plus facile à concevoir qu'à expliquer. Cette conſidération eſt le ſeul moyen de ſe bien conduire dans la recherche des Tautochrones, & des autres Courbes où l'on eſt obligé de conſidérer les fonctions ſemblables, comme l'on verra dans la ſuite.

PROBLEME I, ET PRINCIPAL.

Décrire la Courbe par laquelle un corps deſcendant par ſa peſanteur dans un milieu d'une denſité uniforme, de quelque poinct de la Courbe qu'il commence à deſcendre, parvienne toûjours dans un temps égal au poinct le plus bas. ; & de-là remonte dans le même temps par l'autre branche de la Courbe juſqu'où il pourra remonter, en ſuppoſant la réſiſtance comme le quarré des vîteſſes.

§. I. SOLUT. J'appelle l'Arc total *deſcendu*, celui qui eſt compris entre le poinct le plus élevé d'où le corps commence à deſcendre, & le poinct le plus bas ; l'Arc total *remonté*, celui qui eſt compris entre le poinct le plus bas que je prends pour le *ſommet* de la Courbe, & le poinct juſqu'où il peut remonter avec ſa vîteſſe acquiſe, juſqu'à ce qu'il ait perdu toute ſa vîteſſe ; l'Arc *partial*, ſoit deſcendu, ſoit remonté, eſt une partie quelconque indéterminée d'un Arc total quelconque, priſe depuis le ſommet juſqu'au lieu de la Courbe où ſe trouve le corps, ſoit en deſcendant, ſoit en montant.

II. Soit maintenant la gravité qui anime les corps $= g$; la vîteſſe dans un poinct quelconque de l'Arc total $= v$, l'Arc partial $= r$ (je l'appelle plûtôt r que s, parce que la lettre s ſe confondroit facilement avec le nombre 5) l'Abſciſſe priſe ſur l'Axe élevé verticalement depuis le ſommet de la Courbe, correſpondante à l'Arc partial, $= x$, l'Appliquée correſpondante au même Arc, $= y$, la réſiſtance qu'on ſuppoſe proportionnelle

proportionnelle au quarré de la vîtesse, $=\frac{vv}{n}$, où j'entends par $\frac{1}{n}$, l'intensité de cette résistance, n étant constant pour un arc total quelconque.

III. Par la décomposition de la force de la pesanteur en tangentielle & normale, l'on a la force tangentielle $=\frac{gdx}{dr}$; de laquelle ôtant, lorsque le corps descend, ou à laquelle ajoûtant, lorsque le corps remonte, la force de la résistance $\frac{vv}{n}$, l'on a pour la force accélératrice ou retardatrice $(\frac{gdx}{dr}\mp\frac{vv}{n})$ *Not. B.* (le signe supérieur ayant lieu lorsque le corps descend, & l'inférieur lorsqu'il remonte, ce qu'il faudra aussi toûjours observer dans la suite) l'on aura donc $(\frac{gdx}{dr}\mp\frac{vv}{n})\times\frac{dr}{v}$ $=-dv$; d'où l'on tire cette Equation $gdx\mp\frac{vvdr}{n}$ $=-vdv$ à laquelle il faut satisfaire. En faisant $dr=\frac{dz}{z}$; il vient $ngzdx\mp vvdz=-nzvdv$, ou $-2gzdx$ $=\mp\frac{2}{n}vvdz+2zvdv$; divisant par $z^{\pm\frac{2}{n}+1}$, l'on aura $-2gz^{\mp\frac{2}{n}}dx=(\mp\frac{2}{n}vvdz+2zvdv)z^{\mp\frac{2}{n}-1}$. Pour intégrer cette Equation, il ne suffit pas d'écrire $-2g$ $\int z^{\mp\frac{2}{n}}dx=vvz^{\mp\frac{2}{n}}$, (car cette valeur de $vvz^{\mp\frac{2}{n}}$ exprimée par $-2g\int z^{\mp\frac{2}{n}}dx$, est incomplete, n'appartenant à aucun arc total) mais $2gA-2g\int z^{\mp\frac{2}{n}}dx=$ $vvz^{\mp\frac{2}{n}}$, où je prends A pour quelque chose de constant, à quoi $\int z^{\mp\frac{2}{n}}dx$ devient égal, lorsque x devient l'Abscisse correspondante à quelque arc total, de maniére que A soit

constant pour cet arc total entier, mais différent pour un arc total différent.

IV. L'on a donc $vv = 2gAz^{\pm\frac{2}{n}} - 2gz^{\pm\frac{2}{n}}\int z^{\mp\frac{2}{n}}dx$ $=$ (à cause de $z = c^r$, j'entends par c le nombre dont le logarithme est l'unité) $2gAc^{\pm\frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx$. Et ainsi dt ou le petit temps par l'élément d'un arc total quelconque sera $= \frac{dr}{\sqrt{(2gAc^{\pm\frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx)}}$; ou pour abréger, en multipliant par la constante $\sqrt{2g}$, l'on aura $dt\sqrt{2g} = \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm\frac{2r}{n}} - c^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx)}}$. Afin donc que le temps, que le corps employe à descendre ou à remonter par un arc total quelconque, soit toûjours le même, il faut faire ensorte que la valeur de $\int\frac{dt}{2g}$, qu'on vient de trouver, soit égale à quelque fonction semblable de dimension nulle, comme par ex. $\int\frac{mdP}{\sqrt{(AA-PP)}}$, où j'entends par m un nombre arbitraire constant, & dans laquelle le changement de la lettre A ne change point la valeur de la fonction; car $\int\frac{mdP}{\sqrt{(AA-PP)}}$ donne toûjours un angle droit pris autant de fois que m contient d'unités, de quelque grandeur qu'on prenne A, lorsque PP devient $= AA$.

V. Pour faire donc ensorte que la valeur du temps qu'on vient de trouver $\int\frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm\frac{2r}{n}} - c^{\pm\frac{2r}{n}}\int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx)}}$ soit semblable à la forme qu'on a choisie $\int\frac{mdP}{\sqrt{(AA-PP)}}$, j'écris dans l'expression du temps AA pour A, & je divise l'un & l'autre terme par $c^{\pm\frac{r}{n}}$, & j'ai $\int\frac{c^{\mp\frac{r}{n}}dr}{\sqrt{(AA - \int c^{\mp\frac{2r}{n}}dx)}}$, que je

ſuppoſe $= \int \frac{mdP}{\sqrt{(AA-PP)}}$. La queſtion ſe réduit donc à faire enſorte que $c^{\mp\frac{r}{n}} dr = mdP$, & que de plus $\int c^{\mp\frac{2r}{n}} dx = PP$, car on tirera de-là la relation entre r & x dans laquelle A n'entrera point : ce que je fais ainſi.

VI. Par la premiére Equation, l'on a $\frac{1}{m} c^{\mp\frac{r}{n}} dr = dP$; je l'integre, en obſervant la correction néceſſaire, afin que r & P s'évanoüiſſant, la valeur de P s'évanoüiſſe auſſi, & l'on aura $\mp \frac{n}{m} c^{\mp\frac{r}{n}} \pm \frac{n}{m} = P$; en quarrant, l'on a $\frac{1}{mm} (\mp nc^{\mp\frac{r}{n}} \pm n)^2 = PP$ qui doit être $= \int c^{\mp\frac{2r}{n}} dx$; en différentiant le premier & le dernier, l'on aura $\frac{2}{mm} c^{\mp\frac{r}{n}} dr (\mp nc^{\mp\frac{r}{n}} \pm n) = c^{\mp\frac{2r}{n}} dx$; d'où l'on tire tout d'un coup $dx = \frac{2}{mm} c^{\pm\frac{r}{n}} dr (\mp nc^{\mp\frac{r}{n}} \pm n) = \mp \frac{2n}{mm} dr \pm \frac{2n}{mm} c^{\pm\frac{r}{n}} dr$, ou $mmdx = \mp 2ndr \pm 2nc^{\pm\frac{r}{n}} dr$; en intégrant & faiſant encore la correction néceſſaire, afin que x s'évanoüiſſant, r s'évanoüiſſe auſſi, l'on aura $mmx = -2nn \mp 2nr + 2nnc^{\pm\frac{r}{n}}$; qui eſt l'Equation exponentielle en termes finis, qui détermine la Tautochrone que l'on cherche. Si l'on veut avoir une Equation différentielle ſans quantités exponentielles, on le pourra de la maniére ſuivante : Par l'Equation qu'on vient de trouver, l'on a $2nnc^{\pm\frac{r}{n}} = mmx + 2nn \pm 2nr$; mais par l'Equation différentielle qu'on avoit trouvée auparavant, l'on a auſſi $2nnc^{\pm\frac{r}{n}} = \pm \frac{mmndx}{dr} + 2nn$; donc $mmx + 2nn \pm 2nr = \pm \frac{mmndx}{dr} + 2nn$, qui réduite, donne $mmxdr$

$\pm 2nrdr = \pm mmndx$, ou $\pm mmxdr + 2nrdr = mmndx$.

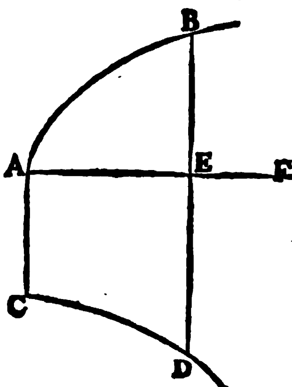
VII. *Coroll. 1.* Lorſque $n = \infty$, c'eſt-à-dire, lorſque $\frac{vv}{n}$ où la réſiſtance eſt nulle, l'on aura $2rdr = mmdx$ & $rr = mmx$; d'où l'on voit que les abſciſſes ſont proportionnelles aux quarrés des arcs correſpondants, & qu'ainſi la Courbe eſt la Cycloïde, comme il doit arriver; car dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne réſiſte point, il n'y a que la Cycloïde qui puiſſe être Tautochrone.

VIII. *Coroll. 2.* Mais ſi n demeurant finie, l'on prend $m = \infty$, l'on trouve $\pm xdr = ndx$, qui eſt l'Equation de la Tractoire de M. Huygens, dont la tangente eſt par-tout $= n$; enſorte que cette Tractoire eſt une des Tautochrones dans un milieu réſiſtant comme les quarrés des vîteſſes; mais comme ici le poinct le plus bas eſt à une diſtance infinie, car c'eſt le poinct où la tangente ſe confond avec l'aſymptote horiſontale, l'on voit que les temps de chaque deſcente, de quelque point de la Courbe qu'on commence à les compter, ſont infinis, mais cependant égaux, car dans certains cas les infinis ont entre eux une raiſon déterminée; paradoxe qui n'a rien de nouveau pour ceux qui ſont verſés dans le Calcul infinitéſimal.

Conſtruction de la Tautochrone.

IX. Voici comme on peut conſtruire la Tautochrone; que nous venons de trouver : Puiſque $dx = \mp \frac{2ndr}{mm} \pm \frac{2nc^{\pm\frac{r}{n}}dr}{mm}$, l'on aura dy ou $\sqrt{(dr^2 - dx^2)} = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm\frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm\frac{2r}{n}})} : mm$; & ainſi $y = \int dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm\frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm\frac{2r}{n}})} : mm$. Et comme l'on a de plus $x = (-2nn$

$\mp 2nr + 2nnc^{\pm \frac{r}{n}}$) : mm, l'on aura les deux valeurs de x & y, en ſuppoſant les quadratures & les logarithmes pour une indéterminée r qu'on prendra.



Ayant donc décrit ſur l'Axe commun AF les deux Courbes AB & CD, telles que prenant l'abſciſſe $AE = r$, l'on ait l'appliquée $BE = \mp \frac{2n}{mm} \mp \frac{2nc^{\pm \frac{r}{n}}}{mm}$, & l'autre $ED = \sqrt{}(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm \frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm \frac{2r}{n}}) : mm$, les aires ABE & $ACDE$ diviſées par une ligne arbitraire L, donneront les coordonnées de la Courbe que l'on cherche ; ſçavoir $\frac{ABE}{L} = x$ & $\frac{ACDE}{L} = y$.

SCHOLIE.

X. m marquant un multiple quelconque arbitraire de l'angle droit, nôtre ſolution donnera toûjours une infinité de Tautochrones particuliéres ſelon la diverſité infinie de m ; ce qu'on voit aſſés, puiſque dans le cas même où $m = \infty$, l'on trouve encore une Tautochrone, qui eſt la Tractoire de M. Huygens (§. 8.) Au reſte l'on tire de nôtre Solution générale pluſieurs autres Problemes utiles & curieux, comme ceux-ci.

PROBLEME II.

XI. *La longueur d'un Arc total quelconque deſcendu dans l'Hypotheſe que nous avons priſe d'une réſiſtance proportionnelle au quarré de la vîteſſe, étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total remonté qui le ſuit immédiatement.*

SOLUTION.

Puiſque nous avons trouvé pour la deſcente (§. 4.) vv

$= 2gAc^{\frac{2r}{n}} - 2gc^{\frac{2r}{n}} \int c^{-\frac{2r}{n}} dx$ & $\int c^{-\frac{2r}{n}} dx = (S. 6.)$
$\frac{1}{mm}(-nc^{-\frac{r}{n}} + n)^2 = \frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1)$
l'on aura $vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+\frac{r}{n}} + c^{+\frac{2r}{n}})$. Supposant maintenant l'Arc total descendu $= a$, il faut qu'au commencement de la descente, vv soit $= 0$, c'est pourquoi il faut faire $2gAc^{\frac{2r}{n}} = \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+\frac{r}{n}} + c^{+\frac{2r}{n}})$, d'où l'on tire $A = \frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1) =$ (lorsque r devient $= a$) $\frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2a}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} + 1)$ $= \frac{nn}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$. Et puisque au point le plus bas de la descente, lorsque $r = 0$, $\int c^{-\frac{2r}{n}} dx$ s'évanoüit, l'on aura vv, ou le quarré de la vîtesse finale du mobile descendant $= 2gAc^{\frac{2r}{n}} =$ (à cause de $r = 0$) $2gA =$ (à cause de $A = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$) $\frac{2nng}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$. Je trouve par un raisonnement semblable, en prenant les signes inférieurs, & nommant l'arc total remonté b, le quarré de la vîtesse initiale du mobile remontant $= \frac{2nng}{mm}(c^{\frac{b}{n}} - 1)^2$. Mais la vîtesse finale du mobile descendant est la même que la vîtesse initiale du mobile remontant; d'où il suit que $1 - c^{-\frac{a}{n}} = c^{\frac{b}{n}} - 1$, & $c^{\frac{b}{n}} = 2 - c^{-\frac{a}{n}} = 2 - \frac{1}{c^{\frac{a}{n}}}$ $= \frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{c^{\frac{a}{n}}}$; prenant les logarithmes du premier & du

dernier, l'on a $\frac{b}{n} = l(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - \frac{a}{n}$, d'où enfin l'on a $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$.

XII. *Scholie.* La valeur de b qu'on vient de trouver, a toûjours lieu pour quelque valeur de n que ce soit; mais si $n = \infty$, c'est-à-dire, si la résistance est infiniment petite ou nulle, l'on devroit trouver $b = a$, parce que le mobile dans le vuide remonte aussi haut qu'il étoit descendu, & l'arc total remonté dans la Cycloïde (qui est la Tautochrone dans le vuide) doit être égal à l'Arc total descendu précédent; cependant nôtre expression ne paroît pas donner $b = a$, car $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ devient $\infty\, l(2c^{\frac{a}{\infty}} - 1) - a = \infty\, l(2c^0 - 1) - a = \infty\, l(2 - 1) - a = \infty\, l(1) - a = \infty \times 0 - a$, ce qui ne fait rien connoître de déterminé, puisque $\infty \times 0$ ou le produit de l'infini par un infiniment petit peut exprimer une quantité quelconque. Pour résoudre cette difficulté, j'ai deux moyens, l'un indirect, l'autre direct, de faire voir que $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ devient effectivement $= a$, lorsque $n = \infty$. En me servant du premier moyen, je supposerai $b = a$, & chercherai ensuite ce qu'il faut prendre pour n, afin que la valeur de b, $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ devienne $= a$; pour cela je fais $a = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, d'où l'on a $2a = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$; & passant des logarith. aux nombres, j'ai $c^{2a} = (2c^{\frac{a}{n}} - 1)^n$ ou $c^{\frac{2a}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$, qui est une Equation quarrée, dont la racine, extraite à l'ordinaire, donne $c^{\frac{a}{n}} = 1 \pm \sqrt{(1 - 1)} = 1 \pm 0$, & prenant les logarithmes, l'on a $\frac{a}{n} = l\,1 = 0$, donc $n = \infty$; d'où il suit que dans le cas où $n = \infty$,

l'on aura b ou $nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)-a=a$.

XIII. Par le moyen direct, voici ce que je fais ; de la quantité $nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)$ je fais cette fraction $l\left(\frac{2c^{\frac{a}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)$ qui lorsque $n=\infty$, devient $\frac{0}{0}$; c'est une fraction dont les deux termes s'évanoüissent, il faut donc chercher sa valeur par la regle donnée dans l'Anal. des Infin. petits, art. 163, en considérant n comme variable, & divisant la différentielle du numerateur par la différentielle du dénominateur ; ce qui étant fait, l'on aura $dl(2c^{\frac{a}{n}}-1)$ divisé par $d\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $-\frac{2c^{\frac{a}{n}}dn\times a}{2nnc^{\frac{a}{n}}-nn}$ divisé par $-\frac{dn}{nn}$, d'où il vient $\frac{2c^{\frac{a}{n}}\times a}{2c^{\frac{a}{n}}-1}=$ (en substituant ∞ pour n) $\frac{2a}{2-1}=2a$; d'où je conclus que lorsque $n=\infty$, l'on aura $nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)=2a$, & qu'ainsi $b=nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)-a=2a-a=a$.

PROBLEME III.

XIV. *Trouver le lieu de la plus grande vîtesse dans un Arc total quelconque de descente.*

SOLUTION. Puisque (§. 11.) $vv=2gAc^{\frac{2r}{n}}-\frac{2nng}{mm}(1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}})=$ (*ibid.*) $\frac{2nng}{mm}(1-c^{-\frac{a}{n}})^2 c^{\frac{2r}{n}}-\frac{2nng}{mm}(1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}})$; qui étant divisé par la quantité constante $\frac{2nng}{mm}$, donnera $c^{\frac{2r}{n}}(1-c^{-\frac{a}{n}})^2$ —

$-(1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}})$, qui doit être un *maximum*; il faut donc faire sa différentielle $=0$, & l'on aura $\frac{2c^{\frac{2r}{n}}dr}{n}$ $(1-c^{-\frac{a}{n}})^2+\frac{2c^{\frac{r}{n}}dr-2c^{\frac{2r}{n}}dr}{n}=0$, ou divisant par $\frac{2c^{\frac{r}{n}}dr}{n}$, l'on aura $c^{\frac{r}{n}}(1-c^{-\frac{a}{n}})^2+1-c^{\frac{r}{n}}=0$, d'où l'on tirera par la réduction & le secours des logarithmes, $r=2a-nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)$. Si donc d'un arc total $=a$, l'on retranche depuis le poinct le plus bas, une partie $=2a-nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)$ l'on aura le poinct de la plus grande vîtesse.

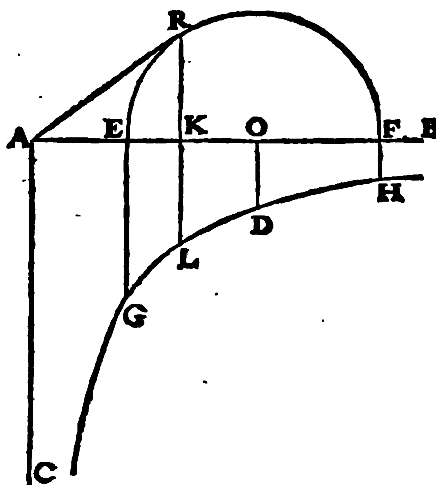
XV. *Coroll. 1.* L'arc intercepté entre le commencement de la descente & le poinct de la plus grande vîtesse, $=a-2a+nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)=nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)-a$. D'où l'on voit *(§. 11.)* que cet arc, depuis le commencement de la descente jusqu'au lieu de la plus grande vîtesse, est égal à l'arc remonté suivant.

XVI. *Coroll. 2.* Ajoûtant l'arc commun compris entre le poinct le plus bas & le lieu de la plus grande vîtesse, l'on aura l'arc total descendu égal à l'arc compris entre le poinct de la plus grande vîtesse, & le poinct où le mobile cesse de remonter; c'est-à-dire, que le mobile, après qu'il est parvenu à sa plus grande vîtesse en descendant, a encore à parcourir jusqu'à ce qu'il cesse de remonter un chemin égal à celui qu'il a parcouru depuis le commencement de sa descente jusqu'au poinct le plus bas.

XVII. *Coroll. 3.* Puisque *(§. 11.)* l'arc total remonté, ou $b=nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)-a$, l'on aura la somme de l'arc total descendu & de l'arc total remonté, ou $a+b=nl(2c^{\frac{a}{n}}-1)$

& ſa moitié $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$; on voit de-là que le poinct qui partage en deux également l'arc entier deſcendu & remonté, eſt éloigné du poinct le plus bas, d'un arc $= a - \frac{1}{2} nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$. Mais puiſque l'arc deſcendu depuis le commencement juſqu'au poinct de la plus grande vîteſſe eſt $= nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, la diſtance de ce poinct au poinct le plus bas ſera $= a - nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1) + a$ $= 2a - nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$; d'où il ſuit que le poinct de la plus grande vîteſſe eſt deux fois plus éloigné du poinct le plus bas que ne l'eſt de ce même poinct, le poinct qui partage en deux également l'arc composé de l'arc deſcendu & de l'arc remonté.

Conſtruction géométrique des deux Problemes précédents.



XVIII. Entre deux Aſymptotes *AB*, *AC*, perpendiculaires l'une à l'autre, ſoit décrite l'Hyperbole équilatere *GDH*, telle qu'ayant pris *AO* $= n$, l'Appliquée *OD* ſoit $= 1$. Soient priſes de l'un & de l'autre côté de *O*, les parties égales *OE*, *OF*, & par les poincts *E* & *F* ſoient tirées les Appliquées *EG*, *FH*, paralleles à l'autre Aſymptote *AC*. Je dis que les Aires *ODGE* & *ODHF* ſont proportionnelles aux Arcs entiers deſcendus & remontés, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $ODGE = a \times OD$, l'aire *ODHF* ſera $= b \times OD$.

Démonstr. D'un poinct quelconque K, soit menée l'appliquée KL, & soit appellée OK, z; l'on aura par la nature de l'hyperbole, $KL = \frac{n}{n-z}$, & partant l'aire $OKLD = \int \frac{ndz}{n-z}$ $= nl(\frac{n}{n-z})$, & l'aire entiére $OEGD = nl(\frac{n}{n-OE})$. L'on trouve de même $OFHD = nl(\frac{n+OF}{n})$. Prenant donc l'aire $OEGD = a \times OD = a \times 1 = a$, l'on aura $nl(\frac{n}{n-OE})$ $= a$. De-là repassant aux nombres, l'on aura $(\frac{n}{n-OE})^n$ $= c^a$, ou $\frac{n}{n-OE} = c^{\frac{a}{n}}$; d'où l'on tire OE ou $OF = n$ $- nc^{-\frac{a}{n}}$, qui étant substitué pour OF dans $nl(\frac{n+OF}{n})$, l'on a l'aire $OFHD = nl(\frac{2n-nc^{-\frac{a}{n}}}{n}) = nl(2-c^{-\frac{a}{n}})$ $= nl(\frac{2c^{\frac{a}{n}}-1}{c^{\frac{a}{n}}}) = nl(2c^{\frac{a}{n}}-1) - a$. Or nous avons trouvé dans l'analyse précédente (*§. 11.*) que cette expression étoit celle de b; donc l'aire $OFHD = b = b \times 1 = b$ $\times OD$.

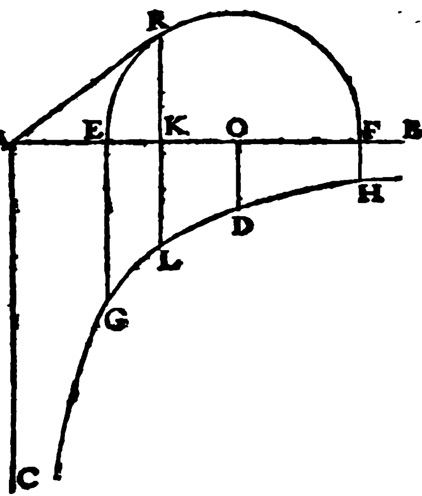
LEMME

Qui sert à déterminer la plus grande vîtesse.

XIX. *Si du centre* O, *& d'un rayon quelconque* OE, *moindre que* OA, *l'on décrit un demi-cercle* ERF *à la circonférence duquel l'on prolonge l'ordonnée* LK, *le rectangle* LK × KR *sera proportionnel à la vîtesse qu'aura le mobile, après qu'il sera descendu depuis le commencement d'un arc total exprimé par l'aire* OEGD, *dans l'instant qu'il acheve un arc exprimé par l'aire* EGLK.

Démonstr. Car ayant pris, comme nous avons fait ci-dessus, l'aire $OEGD$, où l'arc total $= a$, l'on a trouvé $OE = n$ $- nc^{-\frac{a}{n}}$. Si donc l'on fait de la même maniére, l'aire

OKLD, ou l'arc qui reste à parcourir $= r$, l'on aura $OK = n - nc^{-\frac{r}{n}}$. Et ainsi $KL = \frac{AO \times OD}{AK} = c^{\frac{r}{n}}$, & $KR = \sqrt{(OE^2 - OK^2)} = n\sqrt{(2c^{-\frac{r}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} + c^{-\frac{2a}{n}})}$. Si l'on multiplie



KL par *KR*, l'on aura $LK \times KR = nc^{\frac{r}{n}}\sqrt{(2c^{-\frac{r}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} + c^{-\frac{2a}{n}})}$, dont le quarré $= 2nnc^{\frac{r}{n}} - 2nnc^{\frac{2r-a}{n}} - nn + nnc^{\frac{2r-2a}{n}}$, divisé par nn, donne $2c^{\frac{r}{n}} - 2c^{\frac{2r-a}{n}} - 1 + c^{\frac{2r-2a}{n}}$. Mais il est facile de voir que cette quantité est $= c^{\frac{2r}{n}}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2 - (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}})$, ce que nous avons fait voir dans la Solution précédente (*§. 14.*) être proportionnel à vv ou au quarré de la vitesse. Donc $LK \times KR$ est proportionnel à la simple vitesse.

XX. L'on voit par-là que pour déterminer le lieu de la plus grande vitesse, il n'est question que de tirer entre l'hyperbole & le cercle, la ligne *LKR*, ensorte que $LK \times KR$ soit le plus grand de tous les rectangles pareils; ce qui étant fait, l'aire total descendu sera à l'aire compris entre le poinct le plus bas & le poinct de la plus grande vitesse, comme l'aire *EGDO* à l'aire *KLDO*. Or il est évident que le plus grand de tous les rectangles $LK \times KR$ est celui qui se fait

lorſque la ſoutangente de l'hyperbole pour L & la ſoutangente du cercle pour R ſont égales. Mais la ſoutangente de l'hyperbole eſt égale à l'abſciſſe AK par la nature de l'hyperbole; donc la même AK doit auſſi être la ſoutangente du cercle pour le poinct R. On tire de-là une conſtruction facile & élégante. Du centre de l'hyperbole A, ſoit tirée AR tangente au cercle, & du poinct d'attouchement R ſoit abbaiſſée la perpendiculaire RKL; elle partagera l'aire $EGDO$, qui repréſente l'arc total, en deux aires $GEKL$ & $LKOD$, en même raiſon que le poinct de la plus grande vîteſſe partage l'arc total.

XXI. *Coroll.* 1. On voit de-là tout d'un coup, ſans aucun calcul, pourquoi, lorſque $n = \infty$, b devient $= a$, c'eſt-à-dire, pourquoi, dans un milieu qui ne réſiſteroit point, l'arc total remonté doit être égal à l'arc total deſcendu. Car n ou AO étant infini, l'arc hyperbolique GDH peut paſſer pour une droite parallele à l'aſymptote AB, & l'aire $ODHF = EGDO$, c'eſt-à-dire, $b = a$. L'on voit auſſi que la tangente AR, tirée d'une diſtance infinie, peut paſſer pour parallele au diametre du cercle EF, & que partant RL paſſera par le centre O, & ſe confondra avec OD. D'où l'on voit que dans ce cas le lieu de la plus grande vîteſſe eſt le poinct le plus bas, comme il doit arriver dans la Cycloïde, qui eſt la Tautochrone dans le vuide.

XXII. *Coroll.* 2. Puiſque nous avons trouvé ci-deſſus (§. 15.) que l'arc deſcendu, pris depuis le commencement juſqu'au poinct de la plus grande vîteſſe, eſt égal à l'arc total remonté; il ſuit de-là que l'aire $EGLK$ eſt égale à l'aire $DOFH$, & qu'ainſi $AE . AK :: AO . AF$. Ce qu'on voit d'ailleurs, puiſque la tangente AR eſt moyenne proportionnelle tant entre AE & AF, qu'entre AK & AO, comme il eſt clair par la nature du cercle.

XXIII. *Scholie.* Voici quelque choſe d'utile & de digne de remarque ſur nôtre Courbe tautochrone; c'eſt de déterminer juſqu'à quelle hauteur elle peut s'élever, ou quel peut être le plus grand arc total deſcendu; car il eſt certain que

cette Courbe, à prendre son commencement au poinct le plus bas, loin de s'élever à une distance infinie, doit au contraire se terminer, & redescendre ensuite par une espece de pointe ou poinct de rebroussement, comme on sçait qu'il arrive à la Cycloïde elle-même, qui est la Tautochrone dans le cas d'une résistance nulle ou infiniment petite. En effet si quelque Tautochrone s'étendoit à l'infini, l'on voit assés que le temps de la descente par un arc infiniment long ne pourroit pas être fini & déterminé, contre l'hypothese; car une vîtesse toûjours finie dans un temps fini ne sçauroit faire parcourir un espace infini. Afin donc que nous trouvions jusqu'où nôtre Tautochrone doit s'élever, & que nous déterminions le poinct où commence le plus grand arc possible de descente, ou le poinct de rebroussement, voici comme je raisonne: Puisque l'on a trouvé ci-dessus (§. 9.) $dy = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}})} : mm$, l'on voit d'abord qu'au poinct le plus bas, lorsque $r = 0$, $dy = dr$; ce qui fait voir que l'axe est perpendiculaire à la Courbe, comme il doit arriver; autrement ce ne seroit pas le poinct le plus bas: mais ensuite en s'éloignant de ce poinct, la raison de dy à dr décroît jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui arrive lorsque la Courbe est perpendiculaire à l'appliquée. Je dis maintenant que la Courbe ne s'étend pas au de-là de ce poinct, & qu'ainsi c'est le poinct le plus élevé; car si la Courbe s'élevoit davantage, $4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$ seroit plus grand que m^4, & partant dy ou $dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}})}$ seroit imaginaire ou impossible; donc afin que dy soit $= 0$, ce qui termine le plus grand arc, il faut que m^4 soit $= 4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$, ou extrayant la racine, il faut que mm soit $= 2nc^{\frac{r}{n}} - 2n$; d'où l'on tire $\frac{mm+2n}{2n} = c^{\frac{r}{n}}$; & prenant les logarithmes,

$l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = \frac{r}{n}$, c'est-à-dire, $r = n\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) =$ au plus grand arc possible de descente qui termine la Courbe.

XXIV. *Coroll. 1.* Nous avons trouvé en général (§. 6.) pour la descente $mmxdr + 2nrdr = mmndx$; donc pour le plus grand arc total, lorsque $dy = 0$, & qu'ainsi $dx = dr$, l'on aura $mmx + 2nr = mmn$, d'où l'on tire $x = \frac{mmn - 2nr}{mm}$ $=$ (substituant pour r sa valeur) $n - \frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) =$ la plus grande abscisse possible.

XXV. *Coroll. 2.* Si $m = \infty$, mais que n soit fini, l'on aura r ou $n\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = \infty$; mais $\frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = 0$; donc x ou la plus grande abscisse $= n$, ce qui convient à la Tractoire.

XXVI. *Coroll. 3.* Si au contraire m est fini, mais n infini, ce qui est le cas de la Tautochrone ordinaire dans le vuide, l'on aura $r = \infty\, l\, 1 = \infty \times 0$; ce qui ne donne rien de déterminé; il faut donc encore se servir ici de la regle de l'Anal. des Infin. petits, art. 163. En considérant $n\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ sous la forme de cette fraction $\frac{l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}$, dont la différentielle du numérateur, divisée par la différentielle du dénominateur, donne cette autre fraction $\frac{mmn}{mm+2n} =$ (lorsque $n = \infty$) $\frac{1}{2}mm$.

XXVII. *Coroll. 4.* Dans ce même cas la plus grande abscisse $n - \frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ devient $\infty - \frac{2\infty^2}{mm}\,l\,1 = \infty$ $- \frac{2\infty^2}{mm} \times 0$, ce qui encore ne détermine rien; il faut donc, afin d'y pouvoir appliquer la regle dont on s'est déja servi, l'exprimer sous la forme de cette fraction $\frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{nn}}$, & l'on trouve, en opérant bien, $x = \frac{1}{4}mm$; ensorte que le plus grand arc est double de la plus grande abscisse, comme il arrive dans la Cycloïde, où le plus grand arc, depuis le

poinct le plus bas, est double du diametre du Cercle générateur. Ce qui confirme merveilleusement nôtre méthode.

PROBLEME IV.

XXVIII. *La longueur d'un Arc total remonté quelconque étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total descendu qui l'a précédé.*

SOLUTION.

On peut se servir ici de la méthode que nous avons employée dans la Solut. du Probl. 2. *(§. 11.)* En prenant les signes inférieurs dans l'expression du quarré de la vîtesse vv, & opérant ensuite, comme l'on a fait, avec les changements nécessaires. Mais on parviendra plus facilement au but, si l'on fait à l'Equation que l'on a trouvée pour la longueur de l'arc remonté *(§. 11.)* $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, les changements nécessaires, afin d'avoir la valeur de a exprimée par b; ce que je fais ainsi : Puisque $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, l'on aura $a + b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ ou $\frac{a+b}{n} = l(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$, & passant des logarith. aux nomb. l'on a $c^{\frac{a+b}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$; divisant maintenant par $c^{\frac{a}{n}}$, il vient $c^{\frac{b}{n}} = 2 - c^{-\frac{a}{n}}$, & repassant aux logarith. l'on aura $\frac{b}{n} = l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, d'où l'on tire $b = nl(2 - c^{-\frac{a}{n}})$; & ainsi l'on trouve b autrement & plus simplement que l'on n'a fait *(§. 11.)*. Mais comme c'est ici a que l'on cherche, je transpose $c^{\frac{b}{n}}$ & $c^{-\frac{a}{n}}$ en changeant les signes, & j'aurai $c^{-\frac{a}{n}} = 2 - c^{\frac{b}{n}}$, & prenant les logarith. $-\frac{a}{n} = l(2 - c^{\frac{b}{n}})$, d'où l'on tire $a =$

$a = -nl(2 - c^{\frac{b}{n}})$, ou, ce qui revient au même, $a = n$ $l(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$.

XXIX. Puisque $a = nl(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$ & $b = n$ $l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, l'on aura $a + b = nl(\frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}})$; mais par §. 11, l'on a aussi $a + b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$, donc $2c^{\frac{a}{n}}$ $-1 = \frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}}$; & l'on a, en réduisant, $4c^{\frac{a}{n}} - 2c^{\frac{a+b}{n}}$ $+ c^{\frac{b}{n}} + c^{-\frac{a}{n}} = 4$. L'on peut donc trouver, en rétrogradant, par cette Equation exponentielle, quoique fort composée, a par b, & réciproquement b par a, ce qui seroit peut-être fort difficile à trouver *a priori.*

XXX. *Scholie.* Par ce que nous avons démontré *(§. 23.)* l'on pourra encore déterminer le plus grand arc possible remonté, comme aussi la plus grande abscisse qui lui convient. Cela se peut par le moyen de l'Equation trouvée *(§. 11.)* $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, ou de cette autre équivalente dont nous venons de parler, $b = nl(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, substituant dans l'une ou l'autre pour a ce qu'on a trouvé ci-dessus *(§. 23.)* $nl(\frac{mm + 2n}{2n})$ pour le plus grand arc descendu ; car l'on aura b ou le plus grand arc remonté (en se servant de la derniére formule) $= nl(2 - c^{-l(\frac{mm+2n}{2n})})$: mais cette expression étant embarrassée & peu élégante, à cause de l'exposant logarithmique contenu sous un autre signe logarithmique ; voici une maniére particuliére de la réduire à une expression logarithmique simple & ordinaire : je fais

$2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = z$, partant $c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = 2 - z$, & leurs logarith. $-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = l(2 - z)$; d'où repassant aux nombres, à la maniére ordinaire, l'on aura $\frac{2n}{mm+2n} = 2 - z$; donc $z = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $nl\left(2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}\right) = nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) =$ au plus grand arc total remonté.

XXXI. *Coroll.* L'on peut par-là trouver la plus grande longueur de toute la Tautochrone, c'est-à-dire, celle que le mobile peut parcourir pendant une oscillation entiére, en descendant & remontant ensuite. Car le plus grand arc total descendu étant $= nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$, & le plus grand arc total remonté immédiatement après, étant $= nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$, leur somme $nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) + nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$, qui étant réduite, donne $nl\left(\frac{mm+n}{n}\right)$, sera $=$ à la plus grande longueur de la Tautochrone qui puisse être parcourüe par le mobile en descendant & remontant consécutivement.

XXXII. Quant à la plus grande abscisse x, qui répond au plus grand arc remonté; il faut remarquer qu'il n'est plus permis de supposer $dx = dr$, comme nous avons fait pour la descente *(§. 24.)* car le plus grand arc remonté n'est point absolument le plus grand, mais seulement relativement au plus grand arc descendu, par lequel le mobile parvenant au poinct le plus bas, remonte ensuite aussi haut que le lui permet la vîtesse qu'il avoit acquise au poinct le plus bas; mais ce n'est pas à dire pour cela que quelque force externe, indépendamment de la force de la chûte, imprimant au mobile une plus grande vîtesse que celle qu'il acquiert en descendant librement par le plus grand arc de descente, ne pût le faire remonter plus haut, & partant ne pût lui faire décrire un arc plus long. Il faut donc distinguer le cas où le

mobile remonte librement par la seule force qu'il a acquise en descendant, & celui où le mobile remonte, poussé par quelque force étrangere qui agiroit sur lui au poinct le plus bas de la Tautochrone, quand même il ne seroit point descendu. Ici donc nous entendons le plus grand arc remonté librement, dont nous cherchons l'abscisse x, ou la plus grande hauteur verticale à laquelle le mobile puisse s'élever, après être descendu par le plus grand arc. Pour cela je prends l'Equation trouvée (§. 6.) avec les signes inférieurs, $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-\frac{r}{n}}$, dans laquelle, à la place de r, j'écris le plus grand arc total remonté librement, qui (§. 30.) est $= nl(\frac{2mm+2n}{mm+2n})$; & j'aurai $mmx = -2nn + 2nn\, l(\frac{2mm+2n}{mm+2n}) + 2nnc^{-l(\frac{2mm+2n}{mm+2n})} =$ (parce que comme nous avons vû (§. 30.) $c^{-l(\frac{2mm+2n}{mm+2n})} = \frac{mm+2n}{2mm+2n}$) $- 2nn + 2nnl(\frac{2mm+2n}{mm+2n}) + \frac{mmnn+2n^3}{mm+n} =$ (après la réduction) $2nnl(\frac{2mm+2n}{mm+2n}) - \frac{mmnn}{mm+n}$; donc $x = \frac{2nn}{mm} l(\frac{2mm+2n}{mm+2n}) - \frac{nn}{mm+n}$.

XXXIII. Puisque pour la descente, la plus grande abscisse (§. 24.) $= n - \frac{2nn}{mm} l(\frac{mm+2n}{2n})$; si l'on en retranche la plus grande abscisse pour l'ascension libre, le reste sera la quantité, dont la hauteur de laquelle est descendu le corps, surpasse la hauteur à laquelle il est remonté, & cette différence sera $= \frac{mmn+2nn}{mm+n} - \frac{2nn}{mm} l(\frac{mm+n}{n})$; qui s'évanoüit, lorsque $n = \infty$, comme on le trouve par la regle tirée de l'Anal. des Infin. petits; & cela doit être ainsi dans la Tautochrone ordinaire pour le vuide, où le mobile descend & remonte à la même hauteur.

XXXIV. Il nous reste à déterminer aussi le plus grand arc remonté par une force imprimée au mobile au poinct le plus bas, c'est-à-dire, jusqu'où la Tautochrone s'étend du côté

de l'arc remonté, avant que de parvenir au poinct de rebrouſſement, ſi elle en a un, où la Courbe ſe termine & change ſa courbure, comme font les Courbes rebrouſſantes. Pour cela il nous faut recourir à l'Equation (§. 9.) pour l'arc remonté, qui eſt celle-ci, $dy = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{-\frac{r}{n}}} - 4nnc^{-\frac{2r}{n}}) : mm$. Afin donc d'avoir le plus grand arc total remonté par une force étrangere, il faut faire $dy = 0$, & par conſéquent $m^4 = 4nn - 8nnc^{-\frac{r}{n}} + 4nnc^{-\frac{2r}{n}} = (2n - 2nc^{-\frac{r}{n}})^2$; & extrayant la racine, $mm = 2n - 2nc^{-\frac{r}{n}}$, d'où l'on tire $c^{-\frac{r}{n}} = \frac{2n - mm}{2n}$, & prenant les logarithmes $-\frac{r}{n} = l(\frac{2n - mm}{2n})$, ce qui donne $r = -nl(\frac{2n - mm}{2n})$, ou, ce qui eſt la même choſe, $r = nl(\frac{2n}{2n - mm})$ = au plus grand arc total remonté par une force étrangere au de-là duquel la Courbe ne s'étend plus.

XXXV. *Coroll. 1.* Si l'on prend $mm = 2n$, l'on aura $r = nl(\frac{2n}{0}) = \infty$; dans ce cas donc l'arc remonté devient infiniment long, d'où l'on voit encore que les Tautochrones ſe varient ſelon la valeur du nombre arbitraire mm.

XXXVI. *Coroll. 2.* Le plus grand arc remonté par une force étrangere, eſt toûjours plus grand que le plus grand arc remonté librement, quelque ſoit le nombre mm, ce que je démontre ainſi: $2n \times (mm + 2n) = 2mmn + 4nn > 2mmn + 4nn - 2m^4 = (2n - mm) \times (2mm + 2n)$, donc $\frac{2n}{2n - mm} > \frac{2mm + 2n}{mm + 2n}$, & partant auſſi $nl(\frac{2n}{2n - mm})$ ou le plus grand arc remonté par une force étrangere, eſt plus grand que $nl(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n})$, c'eſt-à-dire, plus grand que le plus grand arc remonté librement. (§. 30.)

XXXVII. Enfin il faut trouver la plus grande abſciſſe

pour l'arc remonté par une force étrangere, c'est-à-dire, celle qui répond au poinct de rebroussement de l'arc remonté. Pour cela je me sers de l'Equation (§. 6.) dont je me suis déja servi (§. 32.) pour trouver le plus grand arc remonté librement, sçavoir $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-\frac{r}{n}}$; & maintenant j'y substitüe pour r le plus grand arc total remonté par une force étrangere, qui est (§. 33.) $= nl(\frac{2n}{2n-mm})$; ce qui me donnera $mmx = -2nn + 2nnl(\frac{2n}{2n-mm}) + 2nnc^{-l(\frac{2n}{2n-mm})} = (c^{-l(\frac{2n}{2n-mm})}$ étant $= \frac{2n-mm}{2n}) - 2nn + 2nnl(\frac{2n}{2n-mm}) + 2nn - mmn = 2nnl(\frac{2n}{2n-mm}) - mmn$; d'où l'on tire $x = \frac{2nn}{mm} l(\frac{2n}{2n-mm}) - n =$ à la plus grande abscisse pour l'arc remonté par une force étrangere.

XXXVIII. Si $mm = 2n$, l'on aura $x = nl(\frac{2n}{0}) - n = \infty$; d'où il suit que le poinct de rebroussement de l'arc remonté, dans le cas $mm = 2n$, est infiniment éloigné de l'horizontale tirée par le poinct le plus bas, c'est-à-dire, que l'abscisse devient infiniment longue. Et afin que le mobile puisse remonter dans la Courbe à cette hauteur infinie, il faut qu'il ait au poinct le plus bas une vîtesse initiale infinie; c'est-à-dire, plus grande qu'aucune vîtesse donnée.



DE L'IMPORTANCE DE L'ANALOGIE, & des rapports que les Arbres doivent avoir entre eux pour la réüssite & la durée des Greffes.

Par M. DU HAMEL.

19 Avril 1730.

J'EUS occasion l'année derniére, dans un Mémoire qui avoit pour titre, *Recherche sur les Causes de la Multiplication des Especes de Fruits, &c.* d'examiner en passant l'anatomie de la Greffe, ou l'arrangement organique des fibres de plusieurs especes d'Arbres dans l'endroit de l'application de cette Greffe, & j'y reconnus un changement de direction dans les fibres & un entortillement de vaisseaux, qui imitant fort la méchanique de certaines glandes, ou formant un viscere nouveau, peuvent bien être capables de donner quelques perfections aux Fruits, mais nullement de produire ces changements prompts & essentiels que lui attribüent la plûpart des Auteurs d'Agriculture.

Cet examen des parties de la Greffe ne m'ayant pas paru suffisant pour détruire un sentiment si généralement adopté, à moins que ces observations anatomiques ne fussent soûtenües par des expériences exactes & plusieurs fois réïtérées; je rapportai plusieurs Greffes que l'on pratique tous les jours sur différents sujets, sans qu'il en arrive de changement dans les especes; comme d'une même espece de Pêche sur Amandier, sur différentes especes de Pruniers & sur Abricotiers; d'une même espece de Poires sur Pommier, sur Coignassier, sur Sauvageon-Poirier, ou sur l'Epine blanche; d'une même espece de Prune sur diverses especes de Pruniers, & sur Pêcher de Noyau, même sur Abricotier & sur Amandier; car quoique ces deux derniéres Greffes ne m'ayent point donné de fruit, leurs bois & leurs feüilles m'ont fait suffisamment connoître que les especes n'étoient pas changées.

Je promis outre cela de rendre compte à l'Académie du succès d'un nombre d'autres Greffes & d'Ecussons que j'avois fait executer conformément aux différents procédés qui se trouvent dans presque tous les Traités d'Agriculture, tels que de greffer le Poirier sur le Chêne, sur le Charme, sur l'Orme, sur l'Erable, sur le Prunier, &c. le Meurier sur l'Orme, sur le Figuier & sur le Coignassier, le Cerisier sur le Laurier-Cerise, le Pêcher sur le Noyer, la Vigne sur le Cerisier & sur le Noyer, & une infinité d'autres Greffes & Ecussons de cette nature.

Le peu de succès de ces Greffes n'a pas seulement servi à me persuader que ces Auteurs avoient avancé ces expériences sans les avoir faites, & seulement sur des vrai-semblances; mais outre cela m'a fait faire des réflexions sur un certain rapport & un accord nécessaire qui doivent être entre la Greffe & le sujet, sans lequel, ou elle ne prend point du tout, ou si elle prend, elle ne durera pas long-temps; je crois cependant devoir remarquer que quoique les Greffes que je viens de nommer, ne m'ayent pas réüssi trois années de suite que je les ai fait executer successivement en fente, en écusson, à oeil poussant, à oeil dormant & par approche; cependant la plûpart ne me serviront pas d'exemple dans ce Mémoire, parce que j'entrevois encore quelques espérances de réüssite dans des Expériences que je me propose d'executer l'année prochaine, je m'attacherai seulement à quelques-unes de ces Greffes que j'ai eu lieu d'examiner de plus près, & d'une maniére plus circonstanciée, parce qu'elles m'ont donné occasion de faire plusieurs Remarques & Observations singuliéres, dont la Physique & l'Agriculture pourront, je crois, tirer quelque avantage.

Les voici en peu de mots, séparées des Expériences qui y ont donné naissance. Je réserve pour un autre lieu le détail de ces Expériences.

Il n'est pas besoin de remarquer qu'il y a des Greffes qui reprennent avec une facilité surprenante, c'est une chose trop connüe.

Mais quelques-unes des Greffes que j'ai appliquées, ont péri ſur le champ, & n'ont pas donné la moindre eſpérance de repriſe.

Les autres, après s'être entretenües long-temps vertes, ont par la ſuite également péri; pluſieurs ont pouſſé à la premiére ſéve, & n'ont pû ſubſiſter juſqu'à la ſeconde.

Quelques-unes ſe ſont ſoûtenües les deux ſéves, & n'ont pû paſſer l'Automne. Il y en a eu qui ont fort bien pouſſé deux ou trois ans, & ont dans la ſuite ſubi le même ſort que les précédentes.

Mais ce qui eſt important à obſerver, eſt que quelques-unes ont péri ſans que le ſujet en ſouffrit, & que d'autres n'ont paru périr que par la mort du ſujet.

Ce qu'il y a encore de ſingulier, c'eſt que la plûpart des Arbres greffés ne durent pas ſi long-temps que s'ils ne l'étoient pas, je dis la plûpart, car j'en ai remarqué quelques-uns qui m'ont paru ſubſiſter plus long-temps étant greffés que ne l'étant pas. Mais ce ſecours étant indépendant de l'analogie, comme on le verra dans le détail de cette expérience, il n'en réſulte aucune exception à la regle générale.

Quelquefois même une Greffe appliquée ſur un ſujet qui ne dure que peu d'années de ſa nature, ſubſiſtera plus long-temps que l'étant ſur un autre que l'on regarde comme plus robuſte, & qui eſt d'un naturel à vivre davantage.

Quand on ne feroit aucune attention aux utilités de la Greffe, ces obſervations ne découvrent-elles pas une bizarrerie, ſouvent même une oppoſition d'événements aſſés ſinguliers pour exciter la curioſité d'un Phyſicien, & pour être ſurpris qu'une pratique, d'ailleurs ſi belle, ſi utile & ſi néceſſaire, n'ait été étudiée, & ne le ſoit encore que de très-peu de perſonnes.

C'eſt ce qui m'a fait ſouhaiter depuis long-temps de connoître la Greffe, mais ce n'eſt que depuis quelques années que je me ſuis apperçû de la difficulté qu'il y avoit à y parvenir. Elle peut être pratiquée ſur tous les Arbres; ainſi pour la connoître parfaitement, il faudroit avoir la connoiſſance

non

non ſeulement de tous les Arbres, mais encore de la nature & de l'organiſation des parties dont ils ſont compoſés pour établir les rapports & les contrariétés d'où naiſſent les ſuccès différents que nous remarquons dans les Greffes.

Nos connoiſſances ſont ſi bornées ſur ce point, qu'il eſt preſque impoſſible d'en établir des regles certaines.

Auſſi mes vûës ne ſont-elles point d'indiquer par l'anatomie des Arbres les Greffes qui pourroient réüſſir, mais ſeulement d'expliquer par le peu de connoiſſance que nous avons de cette anatomie, les obſervations qui réſultent d'un nombre d'expériences que j'ai faites à ce ſujet, c'eſt ce qui m'oblige de faire quelques réfléxions ſur l'anatomie des Arbres & de la Greffe avant de paſſer à l'explication de chaque obſervation, à laquelle je joindrai le détail des expériences qui y ont donné lieu.

Une regle générale pour qu'une Greffe réüſſiſſe parfaitement, eſt qu'il faut qu'elle ſe joigne ſi intimement avec le ſujet ſur lequel on l'applique, qu'elle ne faſſe qu'un corps avec lui, & qu'elle devienne comme une de ſes branches.

Si les Arbres ſe reſſembloient tous, que leurs liqueurs fuſſent de même qualité, que la configuration de leurs parties ſolides & de leurs vaiſſeaux fût la même, que leurs diametres fuſſent égaux, leur élaſticité ſemblable, la quantité de leurs trachées pareille, & ces trachées également remplies d'air, la réüſſite des Greffes ſeroit probablement certaine, & la même dans tous les Arbres. Mais cette conformité & ces rapports ſe trouvent-ils entr'eux? c'eſt ce qu'il faut examiner.

L'on ſçait, & il eſt inutile de s'en ſouvenir, que les Arbres ſont compoſés d'une multitude de fibres creuſes; & depuis les obſervations de M.[rs] Malpighi & Grew, l'on ne doute plus que chaque Arbre n'ait ſes fibres de diametres inégaux & de figures différentes. Ainſi (comme je l'ai remarqué dans celui de mes Mémoires que j'ai cité) lorſqu'on applique une Greffe, il ſe doit faire tant aux orifices des fibres de la Greffe que de celles du ſujet, des ſections plus ou moins conſidérables ſuivant la différence des diametres & la diſproportion de figure

qui se rencontre entre les fibres de l'un & de l'autre, & cette disproportion, lorsqu'elle est considérable, est probablement un obstacle à la réüssite des Greffes.

Si nous entrevoyons quelques différences entre les parties solides des Plantes, nous n'en découvrons pas de moins marquées entre les fluides. Les unes ont leur séve blanche comme du lait, d'autres l'ont rousse, d'autres l'ont claire & limpide, les unes l'ont coulante, les autres l'ont visqueuse. Leurs différences se manifestent encore plus par le goût & à l'odorat, puisqu'il y en a de douces, de suaves, d'agréables, d'aigres, d'ameres, d'âcres, de caustiques, de même que quelques-unes sont aromatiques, au lieu que d'autres sont fétides & puantes.

Ces différences s'étendent presqu'à l'infini, & suivant qu'elles sont plus ou moins considérables, elles deviennent des causes de la variété du succès des Greffes.

Suivant ce que je viens d'établir, la différente qualité des séves produit une grande différence entre les Arbres; mais si nous faisons attention à la quantité de cette séve, elle nous donnera une nouvelle cause de différences qui ne sera pas moins essentielle, puisqu'il y a des Arbres, tels que le Saule, qui dans une année font des poussées si considérables, que d'autres, comme les Buis, pourroient à peine les égaler dans l'espace de douze ou quinze années.

Examinons maintenant, pour ne pas s'arrêter à des particularités inutiles, une autre différence plus sensible, & peut-être plus considérable que les précédentes, qui se rencontre cependant entre plusieurs Arbres, c'est celle de leur printemps, ou plûtôt du temps de leur pousse en cette saison: car l'Amandier est en fleur avant que les autres Arbres ayent ouvert leurs boutons; quand les autres Arbres sont en fleurs, il est garni de feüilles, & son fruit est noüé avant que le Meurier ait commencé à pousser.

Que de différences entre les Arbres, me dira-t-on? & comment se peut-il faire que malgré ces oppositions, quantité de Greffes reprennent, qu'un Arbre adopte une branche qui lui est si étrangere, pour la nourrir comme la sienne

propre, & que cette branche qui change ſubitement de nourriture, s'en accommode & profite aſſés ſouvent mieux que ſur ſon propre tronc?

La queſtion eſt embarraſſante, & j'avoüerai qu'il eſt plus aiſé de comprendre comment certains Arbres refuſent de s'allier par la Greffe, que d'expliquer la facilité avec laquelle d'autres reprennent. L'expérience eſt conſtante cependant; & ſi l'on greffe en œil pouſſant un Poirier, par exemple, ſur un autre, ou un Ceriſier ſur le Mériſier, on ſera ſurpris de le voir pouſſer quelques jours après, & acquérir plus de demi-pied de longueur en quinze jours de temps. Je ne chercherai point d'autre explication de cette expérience qu'un grand rapport entre les deux Arbres à tous égards, de même qu'une contrariété manifeſte entre le Prunier & l'Orme que je donne pour exemple des Greffes qui ne donnent aucune marque de repriſe, parce que les ayant greffés pluſieurs fois l'un ſur l'autre, la Greffe a toûjours péri ſur le champ.

Dans le nombre d'expériences que j'ai faites, j'ai remarqué une grande quantité de Greffes qui ſemblent tenir le milieu entre les deux exemples que je viens de donner, en ce qu'elles ne périſſoient pas ſi promptement, car celles qui étoient faites avant l'Automne s'entretenoient vertes tout l'Hiver, comme celles qui ont repris & celles que j'avois fait faire au Printemps s'entretenoient vertes un mois & même plus ſans aucune apparence de pouſſer; il y en a même eu entre les unes & les autres qui ont pouſſé la premiére ſéve, même quelquefois la ſeconde, & qui n'ont pas laiſſé pour cela de périr. La Greffe du Poirier ſur l'Orme, le Charme, l'Erable, celle du Meurier ſur l'Orme, le Figuier, & un grand nombre d'autres, peuvent être donnés pour exemple.

Si l'on recherche les raiſons de ces faits dans l'anatomie de ces Greffes, on trouvera par l'examen particulier des ſujets, qu'ils n'ont eu avec elles qu'une légere communication par le moyen de quelques fibres qui leur ont fourni aſſés de nourriture pour les entretenir dans leur verdeur, même pour, dans le temps de la grande ſéve, leur faire produire quelques

bourgeons; le reste des fibres, & qui assés souvent sont en plus grand nombre sera noir, desséché, ou plûtôt abreuvé, tantôt de gomme, & tantôt d'une séve corrompüe, qui est presque comme de la boüe, ce qui n'arrive que par la disproportion des vaisseaux, ou par la différente qualité des liqueurs; obstacles évidents à l'union parfaite de toutes les fibres & à l'introduction de la séve, qui n'ayant pû enfiler les vaisseaux de la Greffe, a dû nécessairement séjourner & se corrompre dans l'endroit de l'application.

J'ai dit, dans le détail de mes observations, qu'il y avoit des Greffes qui poussoient à merveille la premiére année, & donnoient de grandes espérances de réüssite, que cependant la seconde ou la troisiéme année elles ne manquoient pas de périr.

La Greffe de l'Amandier sur le Prunier, & celle du Prunier sur l'Amandier, m'en ont fourni deux beaux exemples qui méritent bien d'être examinés chacun en particulier.

J'avois fait écussonner à la séve d'Août des Amandiers sur des Pruniers de petit Damas noir sur la foi de plusieurs Auteurs, qui assûrent que par ce moyen on retarde la séve de l'Amandier, ce qui fait qu'il n'est pas tant exposé aux gelées du Printemps; les écussons se collerent à merveille à leurs sujets, conserverent leur verdure pendant tout l'Hiver, pousserent avec force au Printemps & l'Eté, ensorte qu'en Automne ces Amandiers étoient garnis de feüilles, lorsque les autres en étoient tout dépoüillés; on ne peut guere une plus belle espérance. J'en fis lever quelques-uns de la Pépiniére pour mettre en place, mais ceux que j'avois ainsi transplanté, moururent au Printemps, & les autres qui étoient restés dans la Pépiniére, continüerent encore à pousser passablement le reste de l'année, & au Printemps de l'année suivante la plûpart éprouverent le sort des premiers. Je dis la plûpart, car j'en ai encore deux qui ne sont pas entiérement péris, mais à peine les Greffes ont-elles assés de force pour se garnir de feüilles, & les sujets diminüent tous les jours de grosseur, ce qui annonce une mort prochaine.

Des circonſtances eſſentielles à remarquer, c'eſt que le Prunier, dans l'endroit de la Greffe, paroiſſoit appauvri & comme diminué de groſſeur, & que l'Amandier y formoit un gros bourlet, effet de la vivacité avec laquelle il avoit pouſſé.

On ne peut attribuer ce défaut de réüſſite, ni à la diſproportion des fibres de ces deux Arbres, ni à la qualité différente de leur ſéve ; la facilité que cette Greffe a eûë à reprendre, & la vivacité avec laquelle elle a pouſſé, établiſſent au contraire l'analogie des ſujets; de plus on greffe tous les jours, & avec un égal ſuccès, le Pêcher ſur le Prunier & ſur l'Amandier, ce qui ne pourroit pas être, ſi ces deux Arbres étoient d'une nature bien différente.

Pourquoi le Prunier a-t-il donc paru appauvrir, eſt-ce qu'il n'a pas aſſés de ſéve pour nourrir l'Amandier ? Il fait cependant dans nos Jardins un Arbre preſqu'auſſi grand, cela eſt vrai, mais il ne le fait pas en auſſi peu de temps ; les fibres de l'Amandier plus ſouples que celles du Prunier, peut être entrelaſſées d'un plus grand nombre de trachées, remplies d'une ſéve plus éthérée, plus élaſtique, ſont plus ſenſibles aux changements de l'Atmoſphere, entrent plus aiſément en jeu, & par cette raiſon pouſſent de meilleure heure au Printemps. En un mot l'Amandier croît plus vîte que le Prunier.

Si les branches dépenſent donc plus de ſéve que le tronc n'en peut fournir, elles le ſuccent néceſſairement, elles l'affament, & l'empêche par-là de prendre de la groſſeur.

Il n'eſt pas ſurprenant que la Greffe ait ſi bien pouſſé la premiére année, c'eſt que le Prunier étoit en état de ſuffire à la nourriture d'une jeune branche, mais ſi-tôt qu'elle aura pris une certaine groſſeur, il faut néceſſairement que le ſujet périſſe.

Nous avons remarqué que ces Arbres périſſoient plûtôt au Printemps qu'en toute autre ſaiſon, ce qui eſt une ſuite néceſſaire de ce que nous venons de dire, car l'Amandier prenant ſon jeu de reſſort au Printemps plûtôt que le Prunier,

il le ſucce, pour ainſi dire, dans le temps que déja exténué & encore en repos, il n'étoit pas en état de lui fournir de la ſéve, ce qui acheve de le faire périr.

Cette cauſe, qui eſt plus conſidérable au Printemps qu'en toute autre ſaiſon, ſubſiſtera cependant toute l'année, ſi (comme je l'ai prouvé dans un Mémoire que j'ai lû l'année derniére à l'Académie) la condenſation & la rarefaction ſucceſſive de l'air ſont les premiers principes du mouvement de la ſéve.

J'ai remarqué encore que les Arbres que j'avois fait lever pour mettre en place, étoient morts avant ceux qu'on avoit laiſſés dans la Pépiniére, ce qui vient ſans doute de ce qu'un Arbre tranſplanté n'eſt jamais ſi abondant en ſéve que celui dont les racines n'ont point changé de ſituation.

Avant de quitter cette Greffe, il eſt bon d'obſerver que j'ai fait cette experience ſur des Pruniers en plein vent & dans une terre plus ſéche qu'humide, car ſi l'on n'avoit pas égard à ces circonſtances, il pourroit bien arriver de la différence dans la réüſſite.

Si les Greffes des Amandiers ſur Pruniers ont péri, nous allons voir que le Prunier ſur l'Amandier a eu le même ſort. Une conformité ſi exacte d'effets engage à admettre auſſi de la conformité dans les cauſes, auſſi s'y rencontre-t-elle, & quoique l'une de ces Greffes ſoit périe d'inanition, & l'autre d'une ſurabondance de ſubſtance, elles ſe réüniſſent comme nous allons le voir, en ce que la diſproportion d'élaſticité, de ſoupleſſe, de reſſort dans les fibres, ou dans les liqueurs, a produit deux effets ſi contraires.

Le Frere Philippe, habile dans l'art du Jardinage, & qui a la direction des Pépiniéres des RR. PP. Chartreux, fit greffer en couronne le Prunier ſur l'Amandier, les Greffes pouſſerent d'abord à merveille, mais enſuite la gomme s'étant miſe au lieu de l'inſertion, elle les fit périr.

Cette ſeule obſervation découvre la cauſe de la perte de ces Greffes : l'Amandier qui pouſſe plus vîte que le Prunier, & qui entre plus aiſément en jeu, charie à la greffe, qui eſt

encore presque sans action, une grande quantité de séve, & beaucoup plus que la Greffe n'en peut dépenser, ce qui occasionne un dépôt de séve dans l'endroit de l'insertion, l'humidité s'en évapore, cette séve s'y épaissit, & forme la gomme qui successivement obstrüe les vaisseaux, ferme les passages aux liqueurs, d'où s'ensuit la sécheresse & la perte de la Greffe.

Ainsi après avoir vû, dans la premiére expérience, l'Amandier, qui demande à son sujet plus de séve qu'il ne lui en peut fournir, périr d'inanition, nous voyons dans cette expérience le Prunier, qui ne dépense pas tant de séve que lui en fournit l'Amandier, périr, pour ainsi dire, de réplétion & d'engorgement.

C'est ici le lieu de rendre raison d'une autre singularité que j'ai remarquée dans le travail que j'ai fait sur la Greffe, puisque sans sortir de ces principes, & par cette même disproportion de séve entre la Greffe & le sujet, on découvre comment certaines Greffes périssent sans que le sujet en patisse, pendant que d'autres semblent ne périr que par la mort du sujet.

Dans le premier cas il ne paroît pas surprenant qu'une Greffe, qui ne trouve point dans un sujet la quantité ou la qualité de séve qui lui convient, périsse, rien n'est plus naturel : l'Arbre sur lequel elle est appliquée, la regarde comme une branche inutile, il ne lui envoye plus de substance, mais il se forme de nouveaux jets auxquels il fournit de la séve en abondance.

Le contraire arrive cependant, & l'on voit des sujets périr en même temps, souvent même avant leurs Greffes, parce qu'ils ne leur fournissoient pas assés de séve, & quelquefois parce qu'ils lui en fournissoient trop.

Les Greffes de l'Amandier sur le Prunier, & du Prunier sur l'Amandier, que je viens de donner pour exemples, paroissent seules servir à établir ces deux observations, j'y ajoûterai cependant, pour me servir d'exemples connus de tout le monde, ceux de la Greffe du Poirier sur le Coignassier, &

du Pommier sur le Paradis, pratiquées dans une terre séche & légere; car quoique dans ces sortes de terres ces derniéres Greffes durent quelque temps, & ne périssent pas si promptement que celles de l'Amandier sur le Prunier, cependant les sujets ne prennent presque point de corps, ne poussent que peu en racines, la Greffe jaunit, & j'ai presque toûjours remarqué que sa mort est bientôt suivie de celle du sujet.

Nous ne pouvons pas, à la vérité, soupçonner, comme nous avons fait à l'égard de l'Amandier & du Prunier, une grande différence entre l'élasticité des fibres & des liqueurs de ces Arbres, puisqu'ils poussent à peu-près d'aussi bonne heure au Printemps, mais nous reconnoissons bien clairement que le Poirier dépense plus de séve que le Coignassier ne lui en peut fournir, ce qui arrive aussi aux différentes especes de Pommiers, à l'égard de celui de Paradis, puisque les Greffes formoient un gros bourlet à l'endroit de l'insertion, tandis que les sujets ne prenoient presque point de corps, & que les jeunes branches & les feüilles jaunissoient pendant que les racines ne faisoient aucun progrès.

Mais ce qu'il est bon d'observer encore, est que ces Arbres réüssissent fort bien, & durent assés long-temps dans les terres grasses, parce que les sujets sont plus en état de fournir à la Greffe le suc qu'elle demande.

Il est donc constant, par les expériences que je viens de rapporter, que les sujets qui ne sont pas en état de fournir à la Greffe la séve qu'elle leur demande, périssent faute de substance.

Mais il peut aussi se faire, & il est même probable que cela est, qu'il y aura des sujets qui périront par une abondance de séve peu proportionnée à la capacité des branches, car alors il est nécessaire que la séve surabondante soit, ou reportée aux racines selon le systême de la circulation, ou que dans le systême opposé elle reste dans les vaisseaux sans mouvement; or dans l'un & dans l'autre cas il est nécessaire que la Greffe en patisse, plus à la vérité dans celui-ci, parce que cette stase, ce repos, emporte nécessairement la corruption.

Mais

Mais dans le ſyſtême de la circulation, le reflux vers les racines étant conſidérablement augmenté, on conçoit, ſans qu'il ſoit néceſſaire que je l'explique, que l'Arbre en doit beaucoup ſouffrir; de-là peut-être ces galles, ces gourmes, ces chancres & ces écoulements de ſubſtance qui arrivent quelquefois aux Arbres greffés, mais preſque toûjours aux Arbres qu'on étête, comme les Ormes, les Peupliers & les Saules, qui ne manquent gueres au bout d'un temps de tomber en pourriture.

Que d'accord, que de convenance il faudroit entre la Greffe & le ſujet pour qu'elle réüſsît parfaitement. Qu'il eſt rare de le trouver, cet accord! Je ne ſçai même ſi en le cherchant avec beaucoup de peine, nous pouvons eſperer de le trouver, auſſi ne faut-il pas s'étonner s'il y a ſi peu de Greffes qui réüſſiſſent dans cette perfection. Il y en a qui refuſent entiérement de reprendre, d'autres périſſent peu de temps après, mais généralement tous les Arbres greffés ne durent pas, à beaucoup près, ſi long-temps que s'ils ne l'étoient pas.

On ne voit gueres périr de vieilleſſe un Coignaſſier, même dans les terres aſſés séches : cependant dans ces ſortes de terres, lorſqu'on greffe deſſus un Poirier, il ne dure pas long-temps. Je pourrois dire la même choſe du Prunier, lorſqu'on le greffe deſſus un Pêcher, ou lorſqu'on le laiſſe ſans être greffé : il n'y a que le Poirier greffé ſur ſon Sauvageon, l'Orme femelle ſur l'Orme mâle, & d'autres Greffes pareilles qui durent ordinairement très-long-temps. Mais malgré cette raiſon de convenance entre ces ſortes de Greffes & leurs ſujets, la durée de celles-là n'égalera jamais celle du Sauvageon-Poirier, ou de l'Orme mâle, lorſqu'ils ne ſont point greffés; cependant j'ai dit qu'il y avoit quelques Arbres qui m'avoient paru durer plus long-temps étant greffés que ne l'étant pas. Lorſque j'aurai rapporté l'expérience qui a donné lieu à cette obſervation, on ſera en état de juger ſi ces Greffes ont quelque choſe de ſingulier qui mérite faire une exception de la regle générale.

Il y a bien dix-huit ans que nous avons fait greffer dans une terre grasse & auprès de terre des Pruniers de la Reine Claude sur des Pêchers de Noyau : ces Greffes n'ont pas beaucoup poussé en bois, mais elles ont donné de bon fruit, & subsistent encore assés bien à leur maniére, c'est-à-dire, dans leur état languissant, pour esperer qu'elles dureront encore du temps ; cependant c'est un fait que le Pêcher de Noyau ne dure pas si long-temps, & je crois qu'ils seroient péris, s'ils n'avoient pas été greffés.

Pour comprendre le secours que le Pêcher a pû recevoir du Prunier, il faut sçavoir que le Pêcher est fort délicat, qu'il pousse avec une vivacité extrême, qu'il produit beaucoup plus de branches qu'il n'en peut nourrir, ce qui fait qu'il est presque toûjours plein de bois mort, qu'il perd souvent quelques-unes de ses grosses branches, quelquefois même le tronc meurt, & il repousse quelques foibles jets du pied, ce qui oblige presque toûjours à l'arracher, parce que ces sortes de rejets ne sont pas bons à grande chose, aussi le plante-t-on en espalier à cause de la délicatesse de son bois, qui veut être mis à couvert des injures du temps ; c'est aussi dans cette même vûë qu'on lui retranche beaucoup de bois par les différentes tailles qu'on lui fait, afin de le mettre plus en état de nourrir les branches qu'on lui laisse.

Ce sont à peu-près les mêmes avantages qu'il retire de la Greffe du Prunier : à ses branches délicates on en substituë de robustes, & on n'a pas besoin de lui retrancher de son bois, puisque le Prunier ne pousse qu'autant qu'il en peut nourrir ; mais le Prunier fait un plus grand Arbre que le Pêcher, c'est aussi pour cela que nos Greffes ont donné si peu de bois, & elles seroient, je crois, péries, si les sujets n'avoient pas été dans une terre très-grasse & fertile ; de plus les fibres du Pêcher sont un peu plus souples que celles du Prunier, la séve de celui-là est plus éthérée, plus élastique, & c'est peut-être pour cette raison que nos Arbres sont jaunes & languissants.

Malgré ce que je viens de dire de la Greffe du Prunier

sur le Pêcher, je crois qu'on doit regarder comme une regle générale, que les Arbres greffés ne durent pas si long-temps que ceux qui ne le sont pas, & que le plus ou le moins de durée qu'on peut remarquer entre les Arbres greffés dépend du plus ou moins de rapport qui se rencontre entre la Greffe & le sujet.

Enfin j'ai dit avoir remarqué certains Arbres qui duroient plus long-temps greffés sur des sujets, qui de leur nature ne durent que peu d'années, que l'étant sur d'autres qui sont plus robustes, & durent plus long-temps. La Greffe du Pêcher nain sur le Pêcher de Noyau, ou sur Prunier, m'a donné occasion de faire cette observation; car quoique le Prunier vive plus long-temps que le Pêcher de Noyau, cependant le Pêcher nain dure plus long-temps sur le Pêcher de Noyau que sur le Prunier, ce qui est encore un effet bien sensible de l'analogie dont dépend la réüssite des Greffes.

Mais voici encore une expérience qui découvre bien l'effet de ces rapports, nous la devons au Frere Philippe, Chartreux, & elle subsiste encore à Moulinot, Maison de Campagne de son Ordre.

On y voit un Poirier, sur lequel on a appliqué une Greffe de Poirier & une de Pommier. Toutes deux portent du fruit, mais la Greffe de Pommier est chétive & petite, au lieu que celle de Poirier, qui se trouve sur son sujet, est forte & vigoureuse. On voit au contraire dans le même endroit un Poirier greffé sur Pommier. Ce Poirier donne du fruit, & est assés beau, quoiqu'il ne soit pas si vigoureux que sur son Sauvageon. J'ai fait executer l'une & l'autre Greffe dans mon Jardin, mais ce sont de jeunes Greffes, les Arbres sont petits, & ainsi ne peuvent pas encore nous servir à porter un jugement aussi assûré que ceux de Moulinot, qui sont en plein rapport.

Si cette recherche est utile à la Physique, par le détail où l'on est entré des effets que produisent l'analogie & les rapports qui se trouvent entre les Arbres & les explications que l'on a données de quantité de phénoménes qui appartiennent

à la Greffe, l'Agriculture en peut auffi tirer de grands avantages, puifqu'elle peut fervir à détromper de quantité de faits rapportés dans les ouvrages d'Agriculture, & qu'on reconnoîtra que la plûpart des Greffes qu'on nous y propofe ne peuvent réüffir, & que celles qui reprennent, ne produifent point les effets qu'on nous en fait efperer, puifque, comme nous l'avons vû, les efpeces fe confervent, quoique greffées, fur des fujets de nature bien différente, comme le Poirier fur l'Epine, & le Prunier fur le Pêcher.

Pour faire encore plus d'ufage de cette théorie, pour l'avantage de la pratique, nous pourrions faire fentir, par exemple, qu'il eft quelquefois utile que l'analogie ne fe trouve pas dans toute fa perfection. Mais cette réfléxion & bien d'autres nous meneroient trop loin, pour peu qu'on voulût entrer dans le détail à proportion de leur utilité, ainfi je les réferve pour un autre Mémoire.



SECONDE PARTIE DE L'EXAMEN DE LA POUSSÉE DES VOÛTES.

Par M. COUPLET.

J'AI donné à l'Académie en 1729 la premiére Partie de l'Examen de la Poussée des Voûtes, dans laquelle, en considérant les Voussoirs comme polis, je déterminois la forme & la poussée des Voûtes, avec l'épaisseur de leurs pied-droits, & la charge que les Cintres de Charpente souffrent dans la construction des Voûtes uniformes. 15 Mars 1730.

Dans cette hypothese des Voussoirs polis, on est obligé de donner aux Voûtes beaucoup d'épaisseur dans leurs reins, pour qu'elles en ayent une suffisante au sommet, & qu'elles ayent la forme qui leur est nécessaire pour que leurs Voussoirs fassent équilibre entr'eux, ce qui fait que les pied-droits doivent avoir une épaisseur considérable.

Comme dans le Coroll. 3. du Théor. 2. de la premiére Partie, j'ai remarqué que les Voûtes se soûtiennent sans qu'on leur donne la forme nécessaire à l'équilibre de leurs Voussoirs, considérés comme polis, j'ai promis de donner une seconde Partie de l'examen des Voûtes, dans laquelle je considérerois les Voussoirs comme grenus, & assés liés ensemble, ou assés adhérents, pour ne point glisser les uns contre les autres.

Deux raisons m'ont engagé à considérer dans la premiére Partie les Voussoirs comme polis; la premiére, parce que tous ceux qui ont traité de la poussée des Voûtes, les ont regardé comme tels, & la seconde, pour faire voir la différence qu'il y a entre la poussée des Voûtes dont on regarde les Voussoirs

comme polis, & la pouſſée de celles dont on regarde les Vouſſoirs comme grenus, & aſſés adhérents, ou liés enſemble, pour ne pouvoir point gliſſer les uns ſur les autres.

Quand je dis que je conſidere les Vouſſoirs comme aſſés liés pour ne pouvoir point gliſſer l'un ſur l'autre, je ne prétends pas pour cela les conſidérer dans la Voûte comme ne faiſant tous enſemble qu'une ſeule piéce, ou un ſeul corps, j'entends ſeulement, par cette liaiſon, que les faces des Vouſſoirs qui ſe toucheront, ſeront aſſés embarraſſées par l'engrénement de leurs parties, pour ne point gliſſer les unes contre les autres, & que cette liaiſon ne s'oppoſera point à l'écartement des Vouſſoirs dans la rupture de la Voûte, enſorte que ces Vouſſoirs pourront être écartés l'un de l'autre par toutes forces où il n'y aura point de frottement de leurs faces l'une contre l'autre.

C'eſt ſuivant cette nouvelle hypotheſe que j'ai réſolu les Problemes qui compoſent cette ſuite, ou ſeconde Partie de la Pouſſée des Voûtes.

Dans le premier Probleme & ſes Corollaires, je détermine la moindre épaiſſeur uniforme que l'on puiſſe donner à une Voûte circulaire de 180°.

Dans le ſecond Probleme je détermine la plus petite épaiſſeur uniforme d'une Voûte circulaire de 120°.

Dans le troiſiéme Probleme je détermine la pouſſée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados ſont circulaires.

Dans le quatriéme Probleme je détermine la baſe du pied-droit, telle que l'effort compoſé de la peſanteur de la Voûte, de ſa pouſſée horizontale & de la peſanteur dudit pied-droit ſoit dirigé vers un point donné quelconque de ladite baſe.

Enfin les formules que j'ai déduites dans la Solution de ces Problemes, & les moyens dont je me ſuis ſervi pour les réſoudre, pourront facilement être employés pour déterminer les moindres épaiſſeurs que l'on puiſſe donner à une Voûte circulaire & uniforme pour un Arc circulaire quelconque;

comme aussi pour déterminer les épaisseurs nécessaires aux pied-droits, suivant leur hauteur quelconque, pour résister à la poussée des Voûtes dont ils seroient chargés.

THEOREME.

Si l'on suppose que les Voussoirs ne puissent point glisser les uns contre les autres, la Voûte ne cassera point, si la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados, mais qu'elle se trouve dans l'épaisseur de la Voûte.

DÉMONSTRATION.

Soit une Voûte *BMANC*, si la corde *AB* de sa moitié *BMA* ne coupe point l'intrados *IKL*; je dis que la Voûte ne cassera point, car quelle que soit la charge du sommet *A* de cette Voûte, elle se communiquera directement & sans interruption au Coussinet *B*, suivant la ligne droite *AFB* qui se trouve dans l'épaisseur de la Voûte. Figure 1.

Car pour que la Voûte s'écrasât, il faudroit que l'angle *BAC* s'ouvrît, & par conséquent que les Coussinets *B* & *C* s'écartassent, ce qui ne peut point être, puisque nous les regardons comme des obstacles invincibles.

Donc la Voûte ne cassera point, si la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados.

Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Si la corde *AB* de la demi-Voûte coupoit l'intrados *ODEP*, il arriveroit que si le sommet *A* étoit trop chargé, l'angle *DAE* pourroit s'ouvrir, & par conséquent les angles *ADB*, *AEC*, pourroient se fermer, si les parties *BMDO*, *CNEP*, de la Voûte n'étoient pas suffisantes pour résister à l'ouverture qu'elles seroient forcées de faire.

Mais si l'on remplit de Maçonnerie la partie *AMBQ*, suivant la ligne horizontale *AQ*, cette charge, toute grande qu'elle est, qui fait perdre entiérement l'équilibre qui étoit

observé précédemment dans tous les Voussoirs, n'occasionnera cependant point la rupture de la Voûte, puisque nous avons supposé que la Clef *A* ne peut point glisser, & aussi ces constructions se pratiquent-elles dans les Salons voûtés, ou Berceaux de Terrasses, avec tout le succès que l'on peut desirer.

Lorsqu'on ne remplit point les reins de la Voûte, ce qui arrive dans les Edifices publiques très-exhaussés, comme les Eglises, où l'on craint que la poussée ne soit trop grande contre les pied-droits, la partie supérieure de la Voûte tend toûjours à baisser plûtôt que les parties les plus proches des Coussinets, ce qui fait souvent rompre la Voûte.

Or l'on voit que ces Voûtes rompües, dont on n'a que trop d'exemples, manquent toûjours à peu-près à distances égales du Coussinet & du sommet ; d'où l'on peut conclurre que cet endroit est le plus foible de la Voûte.

Il faut donc, suivant cette remarque, donner à la Voûte une épaisseur telle que cet endroit par lequel la Voûte manque presque toûjours, ait une force suffisante pour se soûtenir, & empêcher la Voûte de changer de courbure, c'est pourquoi nous allons chercher dans le Probleme suivant quelle est l'épaisseur qu'il faut donner à cet endroit le plus foible, je veux dire à l'endroit également distant du Coussinet & du sommet, pour que la Voûte se soûtienne dans sa premiére courbure, autant qu'il est possible qu'elle s'y soûtienne ; je dis autant qu'il est possible, car il est constant que quand on décintre une Voûte ou une Plate-bande, elle se surbaisse de plusieurs pouces, sans que pour cela les Voussoirs ou Clavaux glissent les uns sur les autres, parce que pour lors ils ne font que se serrer plus étroitement sur leurs joints.

PROBLEME

PROBLEME I.

Trouver la moindre épaiſſeur que l'on puiſſe donner à une Voûte circulaire de 180°, c'eſt-à-dire, d'un demi-Cercle entier, dont on ſuppoſe l'épaiſſeur uniforme.

SOLUTION.

Soit une Voûte circulaire *RAF*, dont l'intrados *SBE* & l'extrados *RAF* ſoient des demi-Cercles concentriques, il s'agit de déterminer la moindre épaiſſeur *AB* qu'on lui puiſſe donner. Figure 2.

Pour cela je ſuppoſe que la Voûte eſt compoſée de quatre Vouſſoirs égaux, attachés enſemble, comme par des charniéres, aux points *A, T, K,* & aux Couſſinets par les charniéres *F, R.*

Cela poſé, il eſt évident que les Vouſſoirs *AK, AT,* feront effort par leur peſanteur pour s'ouvrir ſur la charniére *A,* & pour ſe fermer ſur les charniéres *K, T,* & par conſéquent pour écarter les Vouſſoirs *KF, TR*, en les faiſant tourner ſur les charniéres *F, R,* par leſquelles ils tiennent aux Couſſinets; & que les Vouſſoirs *KF, TR*, feront par leur poids effort pour tourner à contre-ſens ſur les mêmes charniéres *F, R;* & par conſéquent pour réſiſter aux Vouſſoirs *AK, AT,* qui font effort pour les renverſer. Voyons maintenant quels ſont ces efforts.

Le Vouſſoir *AK*, dont la peſanteur eſt réünie à ſon centre de gravité *H*, laquelle j'exprime par la diagonale *GI*, du parallelogramme *OK*, fera en même temps deux efforts; l'un exprimé par *GO*, pour réſiſter à la pouſſée du Vouſſoir *AT*, qui fait un effort ſemblable, & l'autre exprimé par *GK*, pour pouſſer contre le Vouſſoir *KF*. Mais cet effort *GK* ſe décompoſe auſſi en deux autres efforts, dont l'un eſt horizontal, exprimé par *IK*, & l'autre vertical, exprimé par *XK*, enſorte que ces deux efforts font des effets oppoſés, puiſque l'effort horizontal *IK* tend à renverſer le Vouſſoir *KF*, en le faiſant tourner ſur la charniére *F*, & que l'effort vertical *XK* tend

à affermir ce même Voussoir KF, en le faisant tourner à contre-sens sur la même charniére F, ainsi l'excès de l'énergie de l'effort horizontal IK, sur l'énergie de l'effort vertical XK, sera l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF sur la charniére F.

Il faut donc faire l'épaisseur de la Voûte telle que cet excès soit égal à l'énergie que le Voussoir KF a pour tourner du côté du centre de la Voûte, puisqu'il faut que le Voussoir KF résiste à la poussée du Voussoir AK.

Pour cela soit l'épaisseur AB de la Voûte.... $= x$.
Le rayon BC de l'intrados $= KC = CE$...... $= r$.
Le rayon AC de l'extrados sera................ $= r + x$.
Soit l'arc BK, ou son égal KE............ $= a$.
Soit BZ, ou son égal LE.................... $= d$.
L'on aura CZ ou son égal $CL = ZK$......... $= r - d$.

Du centre de gravité H du Voussoir AK, soit tiré HD perpendiculairement sur AC, & du centre de gravité P de l'autre Voussoir FK soit tiré PQ, perpendiculaire sur CF, pour lors, puisque les Voussoirs sont égaux,

L'on aura $CD = CQ$, & par la propriété des centres de gravité, l'on aura HD, ou son égal $ZI = \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais pour faciliter le calcul, soit fait HD, ou $ZI = z$, puisque $CZ = ZK$, & que le triangle CZK est rectangle.

L'on aura CZ, ou $ZK = \sqrt{\frac{\overline{CK}^2}{2}} = \sqrt{\frac{rr}{2}}$; ou plûtôt comme nous avons fait $BZ = d$, nous aurons CZ, ou son égal $ZK = r - d$.

Et par conséquent $IK = ZK - ZI = r - d - z$.
Et l'on aura GI, ou $XK = AZ = x + d$.

Mais l'effort horizontal $IK = r - d - z$ du Voussoir AK est appliqué au bras de levier $MF = CZ = r - d$, ainsi l'énergie de cet effort horizontal IK, pour faire tourner le Voussoir KF sur la charniére F, est $= rr - 2rd + dd + dz - rz$.

Et en la place de $rr - 2rd + dd$, qui est le quarré

de $r-d=ZK$, si l'on met $\frac{rr}{2}$, qui est aussi le quarré de ZK, puisque nous avons trouvé ci-dessus $ZK=\sqrt{\frac{rr}{2}}$; l'on aura l'énergie de la force horizontale $IK=\frac{rr}{2}+dz-rz$.

Et la force verticale $XK=d+x$ est appliquée au bras de levier $LF=d+x$, ainsi son énergie, pour affermir le Voussoir KF, est $=dd+2dx+xx$.

Et si l'on retranche, comme nous avons dit ci-devant, l'énergie verticale $dd+2dx+xx$ du Voussoir AK, de son énergie horizontale $\frac{rr}{2}+dz-rz$, le reste $\frac{rr}{2}+dz-rz-dd-2dx-xx$ sera l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF autour de la charniére F.

Voyons maintenant quelle est l'énergie du Voussoir KF pour résister.

Puisque le Voussoir KF est égal au Voussoir AK, sa pesanteur sera comme celle du Voussoir $AK=d+x$.

Mais cette pesanteur $d+x$ étant réünie au centre de gravité P, est appliquée au bras de levier $QF=AD$, ainsi son énergie sera $=\overline{d+x}\times AD$.

Maintenant pour trouver le levier $QF=AD$, il faut considérer que CH divisant l'angle ACK ou ZCK en deux parties égales, l'on aura... $CK : CZ :: KV : VZ$.
Et *componendo*..... $CK+CZ : CZ :: KV+VZ : VZ$.
C'est-à-dire......... $2r-d : r-d :: r-d : VZ$.

$$\text{Donc } VZ=\frac{\overline{r-d}\times\overline{r-d}}{2r-d}.$$

$$\text{Mais } VZ : CZ :: HD : CD.$$

C'est-à-dire, $\frac{\overline{r-d}\times\overline{r-d}}{2r-d} : r-d :: z : CD=\frac{2rz-dz}{r-d}$;

Mais AD ou le levier $QF=AC-CD=r+x-\frac{2rz+dz}{r-d}$.

Donc l'énergie $\overline{d+x}\times AD$, que nous avons trouvée

pour le Voussoir KF, est $\overline{d+x} \times \overline{r+x} + \overline{d+x}$ $\times - \frac{2rz+dz}{r-d}$, c'est-à-dire, $dr + dx + xr + xx - \frac{2drz + ddz - 2rzx + dzx}{r-d}$, laquelle énergie du Voussoir KF doit être égale à l'énergie $\frac{rr}{2} + dz - rz - dd - 2dx - xx$ qui reste au Voussoir AK pour le renverser sur la charniére F, ce qui donne cette Equation,

$$dr + dx + xr + xx - \frac{2drz + ddz - 2rzx + dzx}{r-d} = \frac{rr}{2} + dz - rz - dd - 2dx - xx \quad (A).$$

Comme nous avons trouvé $\frac{rr}{2} = rr - 2dr + dd$.

L'on aura $\frac{r}{\sqrt{2}} = r - d$.

Et par conséquent l'on aura $d = r - \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Mettant $\frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$ en la place de z.

Et $r - \frac{r}{\sqrt{2}}$ en la place de d dans l'Equation (A).

Elle se changera en cette Equation ordonnée

$$x^3 + x^2 \times \frac{\left\{\begin{matrix} -3rr \\ -\frac{9}{2}ar \\ +12ra\sqrt{2} \end{matrix}\right\} + x \times \left\{\begin{matrix} -3r^3 \\ -\frac{27}{2}arr \\ +15arr\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -9ar^3 \\ \\ +6ar^3\sqrt{2} \end{matrix}}{3a\sqrt{2} - r} = 0.$$

Maintenant si l'on fait le rayon BC ou r de la Voûte .... $= 14$.

Et que l'on multiplie ce rayon par $3\frac{1}{7}$, qui est à peu-près le nombre de fois que la circonférence contient son diametre, l'on aura la demi-circonfér... $= 44$.

Et l'arc BK ou a, qui est $\frac{1}{4}$ de la demi-circ. sera $= 11$.

Et $\sqrt{2}$ étant $= 1\frac{41421}{100000}$, l'Equation se changera en celle-ci,

$$x^3 + 40.787xx + 257.05x - 475.587\ldots = 0.$$

Mettant $y - \frac{40.787}{3}$ en la place de x, l'on aura cette Equation, qui n'aura point de second terme,

$$y^3 \cdot * - 297.473y + 1043.38618 = 0.$$

Or comme $\overline{\frac{297 \cdot 473}{27}}^{3} > \overline{\frac{1043 \cdot 3618}{4}}^{2}$, & que le troisiéme terme est négatif, il s'en suit que cette Equation est irréductible, & l'on trouvera par approximation la valeur positive de x, qui est celle que nous cherchons entre 1.4866 & 1.4865, qui est la plus petite épaisseur d'une Voûte uniforme en plein Cintre, c'est-à-dire, en demi-cercle, dont le diametre porteroit sur les Coussinets, & seroit, comme nous l'avons supposé, de 28 pieds dans l'intrados.

COROLLAIRE.

Si l'on vouloit que l'effort GK du Voussoir AK fut dirigé vers la charniére F sur le Coussinet, pour lors la pesanteur du Voussoir AK ne pourroit jamais renverser le Voussoir KF, parce que ce Voussoir KF trouveroit sur la charniére F un obstacle invincible. Figure 2.

Et dans ce cas l'épaisseur de la Voûte seroit telle, que l'on auroit cette proportion $GI : IK :: KL : LF$, puisque l'on suppose que la direction GK passe par le point F, & que les triangles GIK, KLF, sont semblables.

Mais dans le Probleme précédent nous avons trouvé $GI = d + x$ aussi-bien que LF, & nous avons trouvé $IK = r - d - z$ & $KL = r - d$.

L'on aura donc cette proportion $d + x : r - d - z :: r - d : d + x$. Donc $dd + 2dx + xx = rr - 2dr + dd - rz + dz$.

Mettant en la place de z sa valeur, que nous avons trouvée, Probleme précédent, $= \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$, & mettant aussi en la place de d sa valeur, que nous avons aussi trouvée dans le même Probleme $= r - \frac{r}{\sqrt{2}}$, l'on aura, en ordonnant l'Equation,

$$\frac{x^3 + xx \times \left\{\begin{matrix} 12ar \\ -rr \\ -3ar\sqrt{2} \\ +rr\sqrt{2} \end{matrix}\right\} + x \times \left\{\begin{matrix} 15arr \\ -3r^3 \\ -9arr\sqrt{2} \\ +3r^3\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -3r^4 \\ +6ar^3 \\ -6ar^3\sqrt{2} \\ +3r^4\sqrt{2} \end{matrix}}{3a} = 0.$$

Mettant, comme dans le Probleme précédent, 11, 14, $1.\frac{41421}{100000}$ en la place de a, r, $\sqrt{2}$, l'on aura
$x^3 + xx \times 38.661 + x \times 251.771 - 826.6125 = 0$.

Et l'on trouvera, par approximation, la valeur positive de x entre 2.3678 & 2.3688 pour la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à la Voûte de 28 pieds de diametre, afin que l'effort GK de la moitié AK de la demi-Voûte soit dirigé vers la charniére F du Coussinet.

PROBLEME II.

Déterminer la plus petite épaisseur uniforme AB *d'une Voûte* RAF *de 120°.*

SOLUTION.

Figure 3. Soit, comme dans le Probleme précédent, la Voûte RAF, divisée en quatre Voussoirs égaux attachés ensemble par trois charniéres T, A, K, & aux Coussinets par deux charniéres R, F.

Cela posé, soient les arcs de l'intrados
BK, KE, &c. .... $= a$.

Soit le rayon BC de l'intrados......... $= r$.

L'épaisseur AB de la Voûte.......... $= x$.

L'on aura le rayon AC de l'extrados... $= r + x$.

L'on aura ZK, ou son égal EV, qui est le sinus de 30°........................ $= \frac{r}{2}$.

L'on aura ZC....................... $= \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Et l'on aura BZ...................... $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Ou, si l'on veut, soit, comme dans le Probleme précédent, BZ............... $= d$.

L'on aura $AZ = d + x = BZ + AB = r - \sqrt{\frac{3rr}{4}} + x$.

Soit H le centre de gravité du Voussoir AK, l'on aura par la propriété des centres de gravité, HD, ou AG, ou ZI $= \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$, comme dans le Probleme précédent.

Et par conſéquent $IK = ZK - ZI = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais la peſanteur du Vouſſoir AK, étant réünie à ſon centre de gravité H, & agiſſant verticalement ſuivant la diagonale GI du parallelogramme YK, ſe décompoſe en deux autres forces, dont l'une agit ſuivant le côté GY du parallélogramme YK, & l'autre ſuivant le côté GK du même parallélogr. enſorte que ſi l'on exprime la peſanteur du Vouſſoir AK par la diagonale $GI = d + x$, l'effort que ce Vouſſoir fera ſuivant GK contre le Vouſſoir KF, ſera exprimé par GK.

Mais cet effort exprimé par GK, que le Vouſſoir AK fait contre le Vouſſoir KF, ſe décompoſe en deux forces ſuivant l'horizontale IK, exprimé par $IK = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$, & l'autre ſuivant la verticale XK, exprimé par XK, ou par la peſanteur GI du Vouſſoir $= x + d$.

Ainſi le Vouſſoir AK fait contre le Vouſſoir KF deux efforts contraires, c'eſt-à-dire, l'un horizontal IK, pour le renverſer ſur la charniére F, & l'autre XK, pour l'affermir.

Donc l'excès de l'énergie de l'effort horizontal IK ſur l'énergie de l'effort vertical XK, ſera l'énergie qui reſte au Vouſſoir AK, pour renverſer le Vouſſoir KF, en le faiſant tourner ſur la charniére F.

Ainſi il faut faire l'épaiſſeur x de la Voûte telle que cet excès d'énergie ſoit égale à l'énergie que le Vouſſoir KF a pour tourner vers le centre de la Voûte, ou pour réſiſter au Vouſſoir AK.

Si l'on multiplie l'effort horizontal $IK = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$ par ſon bras de levier $MF = MN - FN = \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r-x}{2}$ (parce que FN étant le ſinus de 30°, vaut la moitié du rayon $FC = r + x$).

Le produit $\frac{rr}{4}\sqrt{3} - \frac{3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3}}{6ar + 3ax} - \frac{rr}{4} + \frac{3dr^3 + 3drrx + drxx}{6ar + 3ax} - \frac{rx}{4} + \frac{3drrx + 3drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$ ſera l'énergie horizontale du Vouſſoir AK.

Maintenant si l'on multiplie l'effort vertical $XK = x + d$ par son bras de levier $LF = \rho F - \rho L$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical.

Mais $F\rho$ étant le sinus de 60°, est égal $\sqrt{\frac{3}{4}CF^2}$, c'est-à-dire, $\frac{CF}{2}\sqrt{3} = \frac{r+x}{2}\sqrt{3}$, & nous avons trouvé $\rho L = ZK = \frac{r}{2}$. Donc le levier $LF = F\rho - \rho L = \frac{r+x}{2}\sqrt{3} - \frac{r}{2}$.

Multipliant, comme nous avons dit, ce levier par l'effort vertical $XK = x + d$, le produit $\frac{rx\sqrt{3}}{2} + \frac{xx\sqrt{3}}{2} + \frac{dr\sqrt{3}}{2} + \frac{dx\sqrt{3}}{2} - \frac{rx}{2} - \frac{dr}{2}$ sera l'énergie de l'effort vertical.

Et si l'on retranche cette énergie verticale de l'énergie horizontale que nous avons trouvée, le reste

$$- \frac{3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 3drrx + drxx}{6ar + 3ax}$$
$$+ \frac{3drrx + 3drxx + dx^3}{6ar + 3ax} + \frac{rr\sqrt{3} - rr - rx}{4}$$
$$- \frac{rx\sqrt{3} - xx\sqrt{3} - dr\sqrt{3} - dx\sqrt{3} + rx + dr}{2}$$

sera l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF sur la charniére F de son Coussinet, lequel reste étant abrégé, devient

$$= \frac{-3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 6drrx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$$
$$+ \frac{rr\sqrt{3} - rr + rx - 2rx\sqrt{3} - 2xx\sqrt{3} - 2dr\sqrt{3} - 2dx\sqrt{3} + 2dr}{4}.$$

Lequel reste doit être égal à l'énergie du Voussoir KF, que nous allons chercher.

Comme le Voussoir KF est égal au Voussoir AK, sa pesanteur sera comme celle du Voussoir $AK = d + x$.

Mais cette pesanteur étant réünie au centre de gravité P du Voussoir KF, est appliquée au bras de levier OF, qu'il faut trouver.

Nous avons................ $OF = F\rho - O\rho$.

Mais nous avons trouvé.............. $F\rho = \frac{r+x}{2}\sqrt{3}$.

Il ne s'agit donc plus que de trouver.... $O\rho$.

Pour

Pour cela il faut considérer que KS est la différence du sinus de $60°$ au sinus de $30°$, puisque $KS = ZC - EV$, c'est-à-dire, $= \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$.

Mais pour abréger, soit fait $KS = b$, l'on aura, par la propriété du centre de gravité, $P\pi$, ou son égal $O\rho = \frac{6brr + 6brx + 2bxx}{6ar + 3ax}$.

Donc le levier $OF = F\rho - O\rho = \frac{r+x}{2}\sqrt{3} - \frac{6brr - 6brx - 2bxx}{6ar + 3ax}$.

Et multipliant ce levier par la pesanteur $d + x$ du Voussoir KF, le produit $\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2} - \frac{6bdrr - 6bdrx - 2bdxx - 6brxx - 6brrx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$ sera l'énergie du Voussoir KF, laquelle énergie doit être égale à l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF, ce qui donne cette Equation

$$\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2} - \frac{6bdrr - 6bdrx - 2bdxx - 6brrx - 6brxx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$$
$$= \frac{-3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 6drrx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$$
$$+ \frac{rr\sqrt{3} - rr + rx - 2rx\sqrt{3} - 2xx\sqrt{3} - 2dr\sqrt{3} - 2dx\sqrt{3} + 2dr}{4}.$$

Mettant $r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$ en la place de d, & $\sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$ en la place de b. Et ordonnant l'Equation, l'on aura

$$x^3 + xx \times \frac{\left\{\begin{matrix} 24ar\sqrt{3} \\ -3rr\sqrt{3} \\ -\frac{21}{2}ar \end{matrix}\right\} + x \times \left\{\begin{matrix} 30arr\sqrt{3} \\ -3r^3\sqrt{3} \\ -\frac{63}{2}arr \end{matrix}\right\} \begin{matrix} +12ar^3\sqrt{3} \\ -21ar^3 \end{matrix}}{6a\sqrt{3} - r\sqrt{3}} = 0.$$

Maintenant si l'on fait $r = 14$; a étant un arc de $30°$ sera $= 7\frac{1}{3}$, & substituant 14 & $7\frac{1}{3}$ en la place de r & a, dans cette Equation l'on aura

$$x^3 + 40.227xx + 291.5959x - 83.416 = 0.$$

D'où l'on tirera par approximation la valeur positive de x

entre 0.276 & 0.275, qui est la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à une Voûte de 120 degrés. Ce qui donne x approché à $\frac{1}{1000}$ près.

REMARQUE.

Nous avons trouvé dans le Probleme 1er, qu'une Voûte en plein Cintre, d'une épaisseur uniforme de 14 pieds de rayon, ou de 28 pieds de diametre, devoit avoir son épaisseur entre 1.4866 & 1.4865 pour être en équilibre & conserver sa figure.

Nous avons aussi trouvé dans le Probleme 2, qu'une Voûte circulaire de 120°, d'une épaisseur uniforme, & de 14 pieds de rayon, devoit avoir une épaisseur entre 0.276 & 0.275 pour se soûtenir en équilibre & ne point changer de figure.

Si l'on veut comparer l'épaisseur de la Voûte en plein Cintre avec la Voûte de 120°, il faut réduire ces Voûtes à une même largeur, comme, pour exemple, à une même largeur de 28 pieds.

La Voûte en plein Cintre ayant, dans l'hypothese du Probleme 1er, 28 pieds de diametre, a aussi 28 pieds de largeur.

La Voûte de 120°, ayant dans l'hypothese du Probl. 2, 14 pieds de rayon, a pour sa largeur $14\sqrt{3}$, & nous avons trouvé que cette Voûte devoit avoir son épaisseur entre 0.276 & 0.275.

Si l'on prend 0.276 pour l'épaisseur de cette Voûte, l'on aura l'épaisseur d'une Voûte semblable de 120° sur 28 pieds de largeur par cette analogie $14\sqrt{3} : 28 :: \text{ou } \sqrt{3} : 2 :: 0.276$ est à l'épaisseur de la Voûte de 120° de 28 pieds de large, laquelle épaisseur est égale $\frac{0.552}{\sqrt{3}} = 0.184\sqrt{3} = 0.3187$.

Mais nous avons trouvé 1.4866 pour l'épaisseur uniforme d'une Voûte en plein Cintre & de 28 pieds de diametre; d'où l'on voit que l'épaisseur d'une Voûte de 120° doit être près de cinq fois plus petite que l'épaisseur d'une Voûte en plein Cintre de pareille largeur de 28 pieds.

Si l'on veut réduire en lignes l'épaisseur 1.4866 de la

Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre, l'on fera cette analogie 10000 : 14866 :: 144 lignes : 214 lignes environ $\frac{1}{14}$, dont le quatriéme terme 214 lignes $\frac{1}{14}$ ou 1 pied 5 pouces 10 lignes $\frac{1}{14}$ est l'épaisseur d'une Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre.

L'on aura, par une analogie semblable, l'épaisseur de la Voûte de 120° de 14 pieds de rayon 1000 : 276 :: 144 lignes : 39 $\frac{744}{1000}$, ou 3 pouces 3 lignes environ $\frac{3}{4}$.

L'on aura pareillement l'épaisseur d'une Voûte de 120° de 28 pieds de largeur par cette analogie 10000 : 3187 :: 144 lignes : 45 lign. $\frac{8928}{10000}$, ou 3 pouces & près de 10 lignes.

Comme toutes les épaisseurs que nous venons de trouver sont très-petites, il n'est pas étonnant que l'on trouve aujourd'hui des Voûtes très-minces qui subsistent depuis plus de cinq cents ans.

Cependant il faut bien se garder de donner à une Voûte de 120° & de 28 pieds de corde une épaisseur qui soit, comme nous la venons de trouver, seulement de 46 lignes; car les charniéres ou points d'appuis des Voussoirs se trouveroient dans les surfaces de la Voûte, ensorte que ces Voussoirs qui porteroient sur leurs arrêtes, écraseroient bien-tôt ces Arrêtes, & par conséquent la Voûte périroit, ou changeroit de figure, c'est pourquoi il faut au moins doubler l'épaisseur que la formule nous donne, & pour lors les points d'appuis des Voussoirs seront de la quatriéme partie de l'épaisseur totale, car pour lors l'épaisseur de la Voûte que la formule donne se trouvera au milieu de l'épaisseur totale, & comme elle en occupera la moitié, il y aura un quart de l'épaisseur totale au dessus de l'extrados que donne la formule, & un quart au dessous de l'intrados de la formule, & par conséquent les charniéres qui se trouvent dans l'intrados & l'extrados de la formule, se trouveront au quart de l'épaisseur totale, & dans ce cas la corde appartiendra à un arc pris au quart de l'épaisseur de la Voûte du côté de l'intrados. Il faut remarquer que ceci n'est qu'à peu-près, & n'est pas exactement

vrai dans la rigueur géométrique, parce que les centres de gravité des Vouſſoirs changent en augmentant leur épaiſſeur.

L'épaiſſeur de la Voûte étant ainſi doublée, les charniéres ou points d'appuis ſeront en état de réſiſter, enſorte que cette Voûte de 28 pieds de corde auroit 92 lignes, ou 7 pouces 8 lignes, & les points d'appuis des Vouſſoirs en auroient le quart, c'eſt-à-dire, auroient 1 pouce 11 lignes, ce qui n'eſt encore qu'une trop foible épaiſſeur, ſi la Voûte doit ſouffrir quelque charge. En un mot il faut augmenter l'épaiſſeur trouvée par la formule de la quantité néceſſaire à deux appuis, & cette néceſſité doit ſe régler ſur la bonté des matiéres dont on doit conſtruire la Voûte.

Ainſi pour que l'épaiſſeur réſultante de nôtre formule, qui eſt de près de 3 pouces 10 lignes, ſoit au milieu de l'épaiſſeur, il faudroit tripler cette épaiſſeur réſultante 3 pouc. 10 lignes, ce qui donneroit 11 pouc. 6 lign. pour l'épaiſſeur que l'on doit donner à la Voûte demandée de 14 pieds de rayon, & formée ſur un arc de 120 degrés.

PROBLEME III.

Déterminer la pouſſée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados ſont circulaires, en ſuppoſant que les Vouſſoirs ne ſont point polis, & ne peuvent pas par conſéquent gliſſer les uns ſur les autres.

SOLUTION.

Figure 4. Soit le rayon MC de l'intrados.......... $= r$.
L'épaiſſeur AM de la Voûte............... $= m$.
L'on aura le rayon AC de l'extrados......... $= r + m$.

Soit en P le centre de gravité de la demi-Voûte ANM.
Et ſoit l'arc MN de l'intrados............. $= a$.
La hauteur MO de l'intrados.............. $= d$.

L'on aura, par la propriété des centres de gravité, la diſtance Pp du centre de gravité P de ladite Voûte AN à la fléche MO de la Voûte $= \frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$.

Maintenant puisque la pesanteur de la demi-Voûte est réünie à son centre de gravité P; si par ce centre de gravité P, l'on tire la verticale LR, & que par le point S, milieu de AM, l'on tire l'horizontale SL, & que du point L, où elle rencontre la verticale LR, l'on tire LX au milieu du Coussinet, & que du point X, l'on tire XR parallele à LT, & que l'on fasse RT parallele à LX, l'on aura un parallelogramme TX, dont la diagonale LR exprimant la pesanteur de la demi-Voûte AN, la ligne LT exprimera l'effort que cette demi-Voûte AN fait horizontalement pour résister à l'effort semblable de l'autre demi-Voûte, & la ligne LX exprimera l'effort que cette même demi-Voûte AN fait suivant cette direction LX contre le Coussinet.

Mais l'effort LX n'étant point perpendiculaire sur le rayon BC, ou, ce qui est le même, sur le joint BN, & faisant un angle obtus LXB, glisseroit sur ce joint BN du côté de B, si le joint étoit parfaitement poli; mais si le joint BN n'est point poli, la force LX y trouvera un appui solide, malgré son obliquité, attendu l'engrénage des parties.

Il faut donc nécessairement supposer que les joints d'une Voûte circulaire sont graveleux, ensorte que les Voussoirs ne puissent point glisser les uns sur les autres.

Cela posé, il faut chercher quel est l'effort LX que le Voussoir AN fait contre le Coussinet BN.

Mais cette force LX se décomposant en deux forces ZX, RX, dont la verticale ZX exprime la pesanteur du Voussoir, & l'horizontale RX exprime l'effort horizontal qui se fait contre le pied-droit, il vaut mieux chercher quelle est cette force verticale ZX, & cette force horizontale RX, comme ci-après.

Comme le secteur XCS est semblable au secteur NCM.

L'on aura .... $CM : CS :: MO : SQ$.

C'est-à-dire .... $r : r + \frac{m}{2} :: d : SQ = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r}$.

Mais $SQ = LR$. Donc $LR = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r} = \frac{2dr + dm}{2r}$.

L'on aura aussi.......... $CN : CX :: NO : XQ$.

C'est-à-dire............... $r : r + \frac{m}{2} :: NO : XQ$.

Mais.................... $NO^2 = CN^2 - CO^2$.

Et... $CO^2 = rr - 2dr + dd$, parce que $CO = r - d$.

Et... $CN^2 = rr$. Donc $NO^2 = CN^2 - CO^2 = 2dr - dd$.

Donc $r : r + \frac{m}{2} :: \sqrt{2dr - dd} : XQ = \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$.

Maintenant si de XQ, que nous venons de trouver $= \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$, l'on retranche RQ, ou son égal $P\rho$, que nous avons trouvé $= \frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$, le reste $\frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}$ sera la valeur de XR, qui exprime l'effort horizontal que la Voûte fait contre le pied-droit ou pilier butant.

Maintenant si l'on exprime la pesanteur de la demi-Voûte par sa surface ANM, au lieu de l'exprimer par LR, comme nous l'avons fait ci-devant, l'on aura cette surface ANM de la maniére suivante.

Puisque l'arc MN de l'intrados $= a$, l'on aura l'arc $A\varepsilon$ de l'extrados par cette analogie,

$$CM : CA :: MN : A\varepsilon.$$

C'est-à-dire........ $r : r + m :: a : A\varepsilon = \frac{ar + am}{r}$.

Et si l'on multiplie ces deux arcs $MN = a$ & $A\varepsilon = \frac{ar + am}{r}$ par la moitié de leur distance AM, c'est-à-dire, par $\frac{m}{2}$, le produit $\frac{ma}{2} + \frac{amr + amm}{2r} = \frac{2amr + amm}{2r}$ sera la surface de la demi-Voûte $A\varepsilon NM$, c'est-à-dire, sera la pesanteur de cette demi-Voûte.

Mais la pesanteur de cette demi-Voûte est à l'effort horizontal RX comme LR est à RX; l'on aura donc l'effort horizontal qui se fait suivant RX par cette analogie LR, que nous avons trouvée $= \frac{2dr + dm}{2r}$.

est à $RX = \frac{r+\frac{m}{2} \times \sqrt{2dr-dd}}{r} - \frac{6drr-6drm-2dmm}{6ar+3am}$ comme la pesanteur $\frac{2amr+amm}{2r}$ de la demi-Voûte est à l'effort horizontal de la Voûte suivant RX, que l'on trouvera

$$= \frac{2amr+amm}{2dr+dm} \times \overline{\frac{r+\frac{m}{2}\sqrt{2dr-dd}}{r} - \frac{6drr-6drm-2dmm}{6ar+3am}}$$

$$= \frac{am}{d} \times \overline{\frac{r+\frac{m}{2} \times \sqrt{2dr-dd}}{r} - \frac{6drr-6drm-2dmm}{6ar+3am}}$$

$$= \frac{2arm+amm}{2dr} \times \sqrt{2dr-dd} - \frac{6mrr-6rmm-2m^3}{6r+3m}$$ qui est la poussée horizontale qu'il falloit trouver.

PROBLEME IV.

Lorsque les Voussoirs ne sçauroient glisser les uns sur les autres, trouver la base EF *du pied-droit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de sa poussée horizontale, & de la pesanteur dudit pied-droit, soit dirigé vers un point donné quelconque* H *de ladite base* EF. Figure 4.

SOLUTION.

Pour abréger le calcul, soit regardé le trapeze $BIFN$ comme un parallelogramme, dont la hauteur soit GV, moyenne entre BI & NF.

Quoique dans ce changement, où les surfaces sont égales, le centre de gravité D du trapeze se trouve transporté au centre de gravité K du parallelogramme, & que l'on donne par conséquent à la surface $BIFN$, regardée comme un parallelogramme, plus d'énergie qu'elle n'en auroit en la regardant comme un trapeze, ce changement est si léger, qu'on le peut regarder comme zero, puisque l'on est obligé de faire aux pied-droits des changements beaucoup plus considérables, comme d'y percer des Fenêtres & des Portes, auxquelles cependant on ne fait aucune attention.

Soit donc la hauteur moyenne VG du pied-droit $= p$.

La base IF du trapeze regardé comme parallelogramme .... $= q$.

Puisque $BIFN$ est regardé comme un parallelogramme, nous aurons sa surface .... $= pq$.

Soit la base entiére EF du pied-droit .... $= x$.

La base EI de son fruit sera .... $= x - q$.

Si l'on fait la hauteur $BI = VG = p$, l'on aura la surface du talus $BIE = \frac{px - pq}{2}$.

Comme nous exprimons la pesanteur de la Maçonnerie par son profil ou surface de sa coupe, nous aurons la pesanteur de la partie $BIFN = pq$, & nous aurons la pesanteur de la partie $BIE = \frac{px - pq}{2}$.

Maintenant soit le point d'appui H, placé de maniére que l'on ait................. $EF : EH :: f : g$.

C'est-à-dire, que l'on ait... $x : EH :: f : g$.

L'on aura ... $EH = \frac{gx}{f}$.

Comme la pesanteur du parallelogramme $BIFN$ est réünie à son centre de gravité, ou son milieu K, elle est appliquée au bras de levier HG.

Mais $HG = EF - GF - EH = x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$.

Ainsi en multipliant la pesanteur pq par ce bras de levier $HG = x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$, le produit $pqx - \frac{pqq}{2} - \frac{pqgx}{f}$ sera l'énergie de la partie $BIFN$ du pied-droit.

De même si l'on multiplie la pesanteur de la partie $BIE = \frac{px - pq}{2}$ par son bras de levier HZ, le produit sera son énergie, mais $HZ = EZ - EH = \frac{2x - 2q}{3} - \frac{gx}{f}$.

Donc l'énergie de la partie BIE du pied-droit sera $= \frac{2pxx - 4pqx + 2pqq}{6} - \frac{pgxx + pqgx}{2f}$.

Et si l'on ajoûte ensemble l'énergie de la partie $BIFN$ & celle de la partie BIE, leur somme $pqx - \frac{pqq}{2} - \frac{pqgx}{f}$

+

$+ \frac{2pxx - 4pqx + 2pqq}{6} - \frac{pgxx + pqgx}{2f}$ sera l'énergie du pied-droit entier sur le point d'appui *H*.

Laquelle énergie étant abrégée, devient $\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6} - \frac{pqgx - pgxx}{2f}$.

Voyons maintenant l'énergie de la Voûte qui doit faire équilibre avec le pied-droit sur le point d'appui *H*.

Nous avons trouvé, dans le Probleme précédent, que l'effort de la Voûte, suivant LX, se décomposoit en deux autres, l'un suivant ZX, égal à la pesanteur de la Voûte, & l'autre suivant RX.

Mais dans le même Probleme précédent nous avons trouvé la pesanteur de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2r}$, & l'effort horizontal suivant $RX = \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}$.

Ainsi en multipliant la pesanteur ou l'effort vertical suivant ZX par son bras de levier $HY = HF - YF$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, laquelle énergie sert à affermir le pied-droit.

Mais $HF = EF - EH = x - \frac{gx}{f}$.

Et l'on peut, pour abréger, faire YF égale à la moitié de l'épaisseur de la Voûte, c'est-à-dire, $= \frac{m}{2}$.

Donc le levier $HY = x - \frac{gx}{f} - \frac{m}{2}$, lequel levier étant multiplié par la pesanteur $\frac{2amr + amm}{2r}$ de la Voûte, le produit $\frac{2amrx + ammx}{2r} - \frac{2amrgx - ammgx}{2fr} - \frac{2ammr - am^3}{4r}$ sera l'énergie de l'effort vertical que la Voûte fait pour affermir le pied-droit.

Et si l'on multiplie l'effort horizontal RX de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}$ par son bras de levier $\pi H = VG = p$, le produit

$$\frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m}$$

ſera l'énergie de l'effort horizontal que la Voûte fait pour renverſer le pied-droit.

Comme l'effort vertical que la Voûte fait, ſert à affermir le pied-droit, & que l'effort horizontal tend à le renverſer, ſi l'on retranche l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, de l'énergie de ſon effort horizontal, le reſte ſera la véritable énergie que la Voûte employe pour renverſer le pied-droit ſur le point d'appui H, & ce reſte ſera

$$\frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m}$$
$$- \frac{2amrx - ammx}{2r} + \frac{2amrgx + ammgx}{2fr} + \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$

Maintenant puiſque, ſuivant l'hypotheſe, l'effort compoſé de la peſanteur de la Voûte, de ſon effort horizontal, & de la peſanteur du pied-droit doivent être dirigés vers le point d'appui H, il faut que l'énergie du pied-droit & l'énergie de la Voûte ſoient en équilibre, c'eſt-à-dire, égales ſur ce point d'appui H, ce qui donne cette Equation

$$\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6} - \frac{pqgx - pgxx}{2f} = \frac{2ampr + ammp}{2dr}$$
$$\times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m} - \frac{2amrx - ammx}{2r}$$
$$+ \frac{2amrgx + ammgx}{2fr} + \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$ D'où l'on tire

$$x = \sqrt{\left(\begin{array}{l} \frac{qqf}{2f - 3g} + \frac{6amfr - 3ammf}{2fdr - 3gdr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ - \frac{12mrrf - 12mmrf - 4m^3f}{4rf + 2mf - 6rg - 3gm} + \frac{6ammrf + 3am^3f}{4prf - 6pgr} \\ + \left\{\frac{q}{2} + \frac{6amrf + 3ammf - 6amrg - 3ammg}{4pfr - 6pgr}\right\}^2 \end{array}\right)}$$
$$- \frac{q}{2} - \frac{6amrf - 3ammf + 6amrg + 3ammg}{4pfr - 6pgr}.$$

Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

Si l'on vouloit que le point d'appui H, vers lequel eſt

dirigé l'effort composé de la Voûte & du pied-droit fut dans la surface extérieur du pied-droit, il faudroit faire $EH = 0$; & comme nous avons fait $EF : EH :: f : g$, l'on aura $EF : 0 :: f : g$, & par conséquent l'on aura $g = 0$.

Substituant donc 0 en la place de g dans la formule du Probleme, l'on aura une autre Equation qui nous donnera la base x du pied-droit, telle que l'effort composé de la poussée de la Voûte & de la pesanteur du pied-droit sera dirigé vers l'extrémité extérieure de la base, & cette formule sera

$$x = \sqrt{\frac{qq}{2} + \frac{6amr - 3amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{2r+m} + \frac{6ammr + 3am^3}{4pr} + \left\{\frac{q}{2} + \frac{6amr + 3amm}{4pr}\right\}^2} - \frac{q}{2} - \frac{6amr - 3amm}{4pr}.$$

Application du Probleme précédent à une Voûte, dont les dimensions & la hauteur du Pied-droit soient données, & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF *du Pied-droit.*

Soit une Voute, dont l'intrados soit un arc de 120°, & dont la corde soit de 28 pieds, la moitié de cette corde sera le sinus de 60°, ainsi l'on aura le rayon r de la Voûte par cette analogie, Figure 4.

Le sinus de 6°, qui est de .... 86602.

Est au rayon ou sinus total.......... 100000.

Comme la moitié de la corde de Voûte, c'est-à-dire 14, Est au rayon de ladite Voûte, lequel rayon se trouve par l'opération de $16\frac{17}{100}$.

Soit l'épaisseur de la Voûte $= \frac{2}{3}$.

Puisque l'arc MN est de 60 degrés, l'on aura MO, c'est-à-dire, la hauteur de la fléche de l'intrados au-dessus du pied-droit égale à la moitié du rayon, c'est-à-dire, égale 8,085.

Mais nous avons fait $MO = d$, donc l'on aura $d = 8.\ 085$

Puiſque le rayon de la Voute.....	=	16. 17.
Son diametre ſera..............		32. 34.
Multipliant ce diametre par.....		3. $\frac{1}{7}$.
		97. 02.
		4. 62.
Le produit..................		101. 64.

donnera la circonférence, dont la ſixiéme partie 16. 94 ſera la valeur de l'arc de 60 degrés, c'eſt-à-dire, ſera la valeur de la moitié de l'intrados, laquelle moitié nous avons appellée a.

Maintenant ſoit la hauteur p du pied-droit $= 20$
la baſe q de la partie parallelipipedale du pied-droit.......................... $= \frac{2}{3}$ de même que l'épaiſſeur de la Voute.

Enfin le point H, où l'on veut que ſoit dirigé l'effort compoſé de tous les efforts, ſoit éloigné de la face extérieure dudit pied-droit de la valeur de $\frac{1}{3}$ de ſa baſe, c'eſt-à-dire, de maniére que l'on ait $EF : EH :: 3 : 1$.

Mais nous avons dans le Probleme précédent $EF : EH :: f : g$, donc nous avons $f = 3$, & $g = 1$.

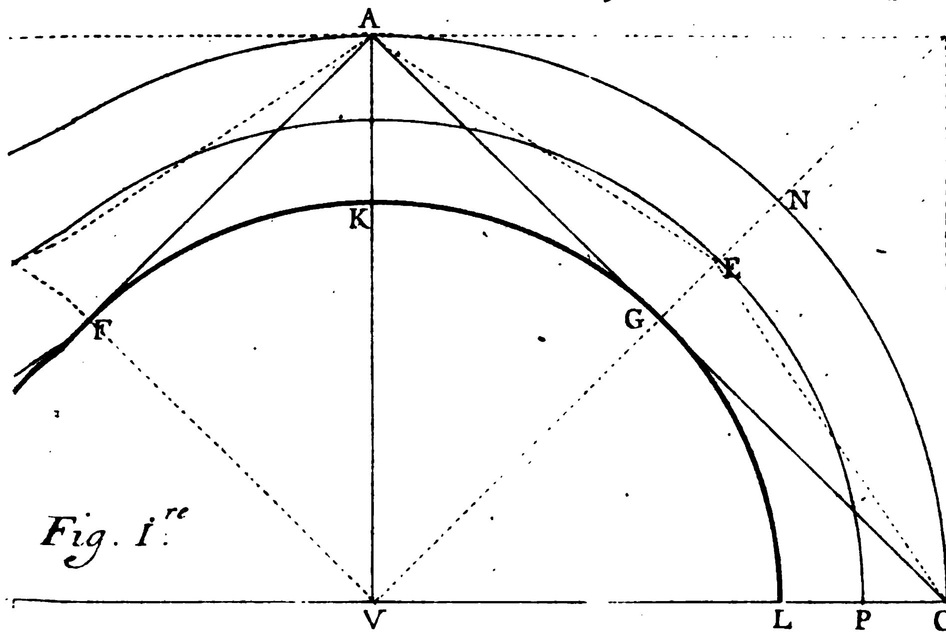
Et ſi l'on ſubſtituë dans l'Equation qui donne la valeur de x

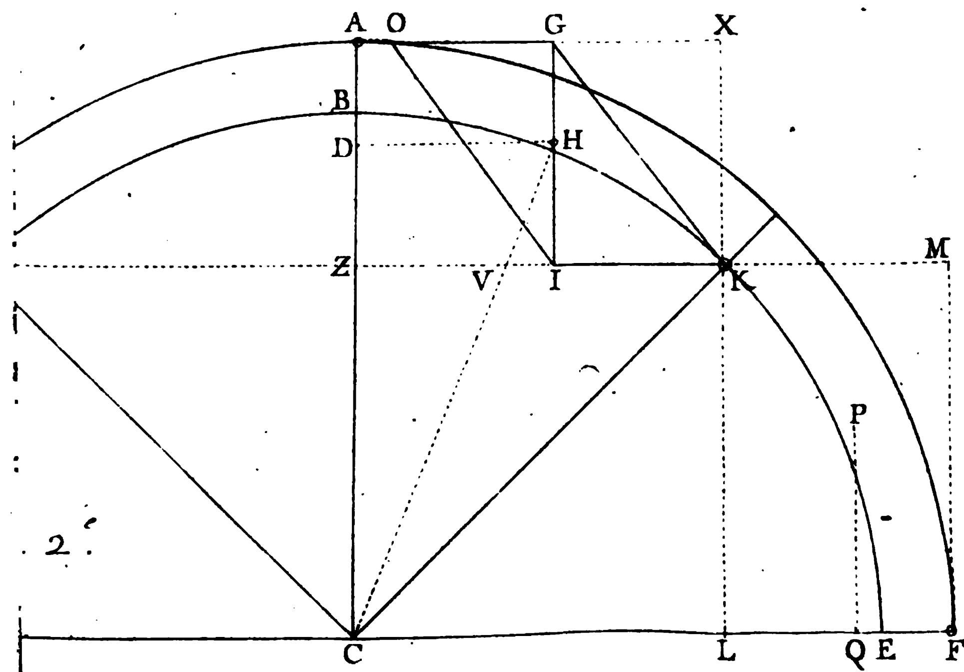
ces grandeurs	16. 17	8. 085	16. 94	20	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	1
en la place de	r	d	a	p	q	m	f	g

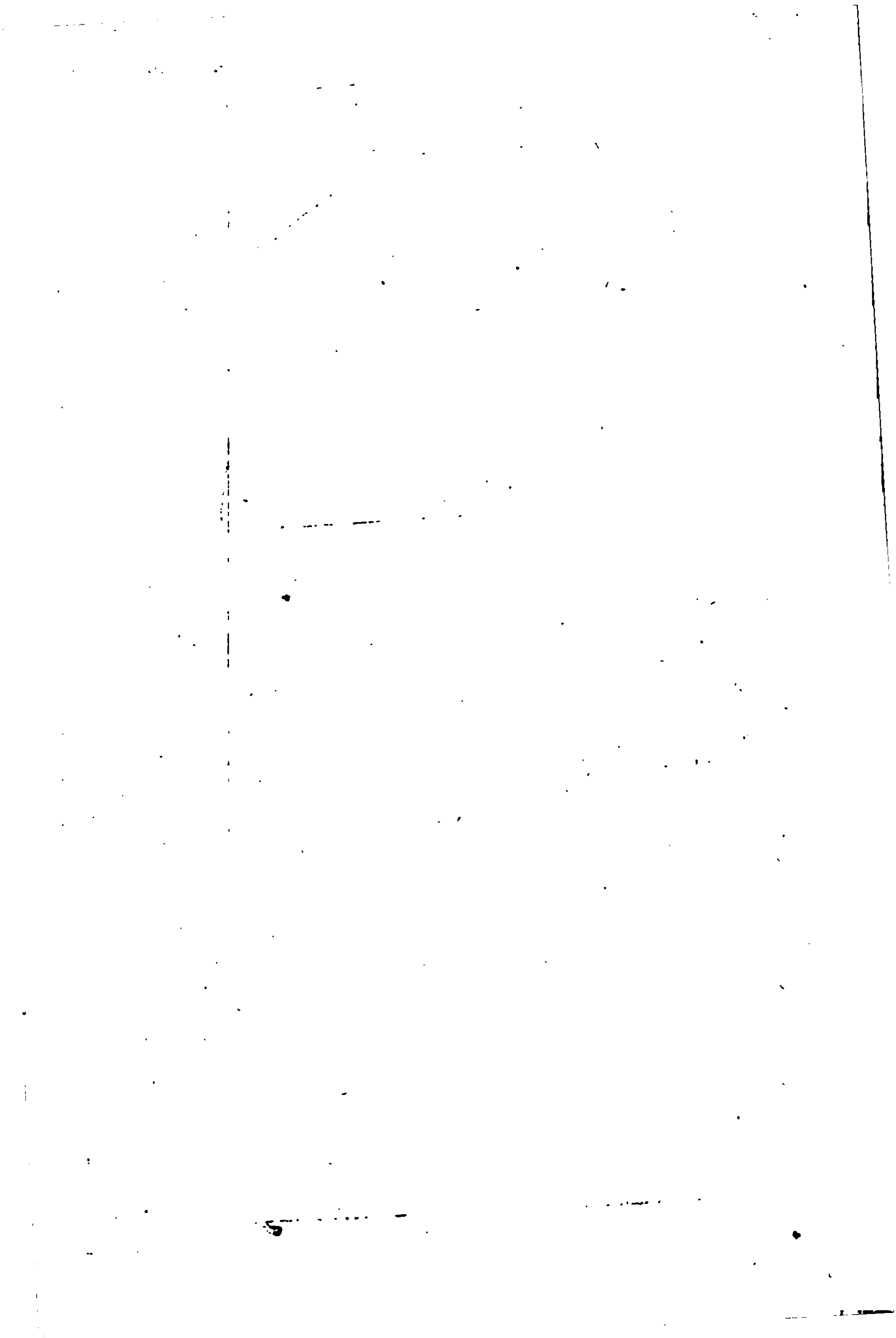
L'on trouvera $x = 5$ pieds $\frac{1}{2}$ pour la baſe du pied-droit cherchée, ſur laquelle baſe $x = EF$, le point d'appui H eſt au tiers de ladite baſe, enſorte que HF ſera de 3 pieds $\frac{2}{3}$.

Application du Corollaire du Probleme précédent à une Voûte, dont les dimenſions ſont comme celles du Probleme, & dans laquelle il s'agit de trouver la baſe EF, *telle que la pouſſée de la Voûte & de la peſanteur du pied-droit ſoient dirigées vers l'extrémité extérieure* E *de ladite baſe.*

Comme les dimenſions de la Voûte ſont toûjours les


A
K
N
E
G
F
V
L
P
C
Fig. 1.re


A
O
G
X
B
D
H
Z
V
I
K
M
P
C
L
Q
E
F
2.e
Ph. Simonneau Sculp.



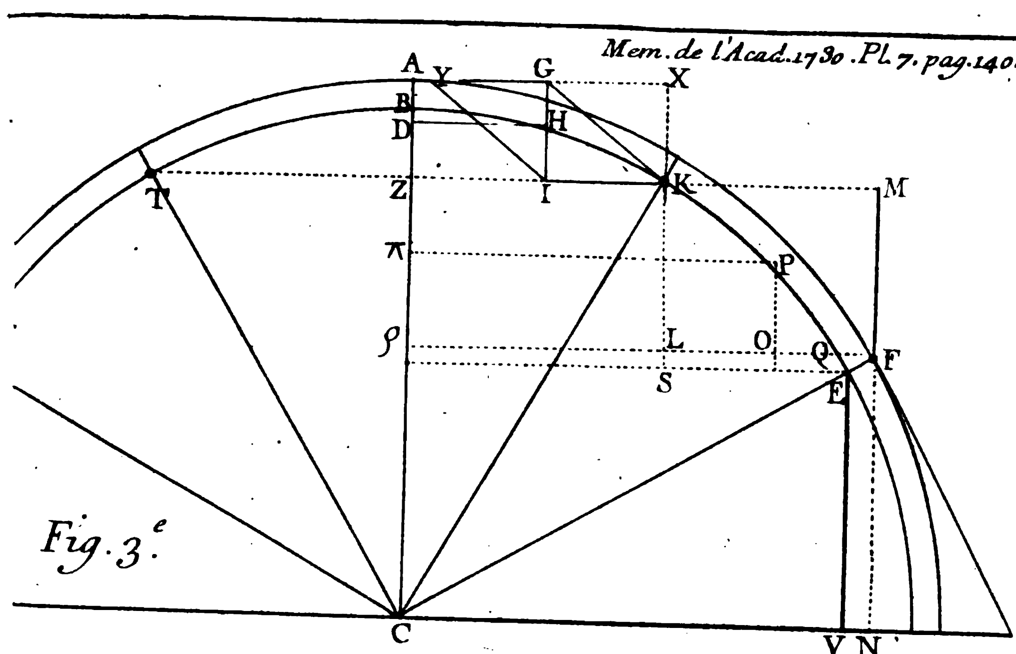


Fig. 3.e

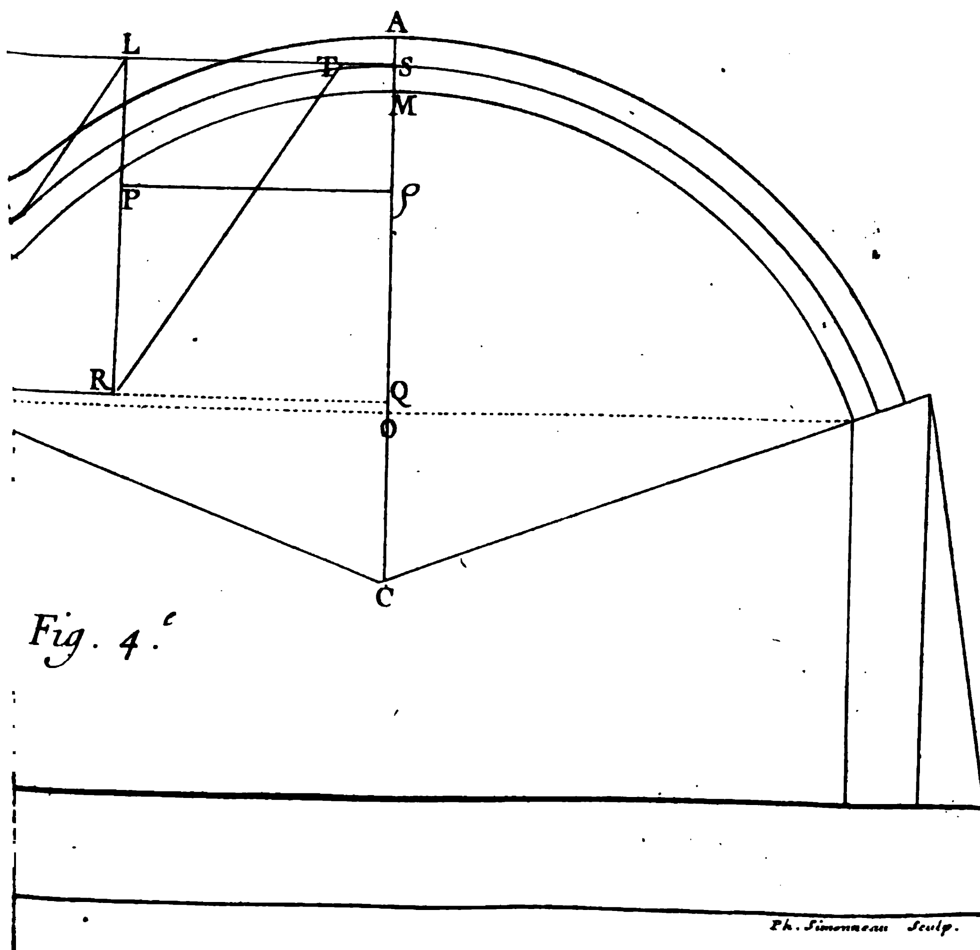


Fig. 4.e

Ph. Simonneau Sculp.

mêmes, l'on aura, comme dans l'application du Probleme,

	16. 17	8. 085	16. 94	20	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
pour	*r*	*d*	*a*	*p*	*q*	*m*

Substituant ces grandeurs déterminées en la place des lettres dans l'Equation du Corollaire, l'on aura la base $x = 3. \frac{66}{100}$, c'est-à-dire $= 3$ pieds $\frac{2}{3}$.

Comme le pied-droit ou son profil est composé de deux parties, dont l'une est parallelogrammique, & que l'épaisseur ou base de la partie parallelogrammique est égale à l'épaisseur de la Voûte qui est de $\frac{2}{3}$, il restera 3 pieds pour le fruit ou base de l'autre partie qui est triangulaire, & si l'on ajoûte $\frac{1}{3}$ à ces 3 pieds pour prévenir l'écrasement des parties, la base totale du pied-droit sera de 4 pieds, & comme la hauteur du pied-droit est de 20 pieds, cette base totale de 4 pieds sera égale à la cinquiéme partie de sa hauteur.

Si l'on faisoit l'épaisseur de la muraille au pied-droit de 2 pieds par en haut, c'est-à-dire, au Coussinet, pour lors l'on trouvera la base entiére $EF = x = 3. 597$, c'est-à-dire $= 3$ pieds 7 pouc. 2 lignes, en dirigeant l'effort composé à l'extrémité extérieure E de la base EF. On pourra faire de semblables applications pour toutes sortes de Voûtes circulaires, dont l'épaisseur & la grandeur seront données avec la hauteur du pied-droit.



SUITE DES OBSERVATIONS SUR L'AIMANT.

Par M. DU FAY.

19 Avril 1730.

DANS le Mémoire que je lûs en 1728, je rapportai plusieurs expériences qui tendoient à prouver que si l'on veut aimanter un morceau de Fer, ensorte que sa direction soit déterminée, il ne faut que le rompre, le frapper, le frotter, enfin donner par quelque moyen que ce soit un ébranlement à ses parties, tel que les petites branches, pointes ou poils, que j'ai supposés, après Descartes & la plûpart des Physiciens, remplir les pores du Fer, puissent être abbattus ou renversés vers celle des extrémités qu'on veut faire diriger vers le Nord. J'ai varié ces expériences d'un grand nombre de façons, & il me paroît qu'il peut demeurer pour constant qu'un Fer n'est aimanté que lorsque tous ses poils, ou du moins la plus grande partie, sont couchés en un même sens.

Je ne dois pas obmettre une objection qui m'a été faite sur l'extrême mobilité que je suppose dans ces petites branches ou poils; ils doivent être si déliés que leur pesanteur sera, dit-on, regardée comme nulle, & qu'il est impossible qu'ils tombent par leur seul poids, suivant les différentes situations ou les ébranlements qu'on peut donner à la barre de Fer. Quoique cette objection semble forte, il est très facile d'y répondre. On sçait que les corps n'ont de pesanteur que relativement au milieu dans lequel ils se trouvent, & qu'une plume mise dans un tuyau vuidé d'air, y tombe avec la même vîtesse, c'est-à-dire, y a la même pesanteur qu'un morceau de bois : or, il est certain que les pores du Fer ne sont pas remplis d'air; par conséquent, quelques déliés que soient ces petits poils, ils ont une pesanteur relative au milieu dans lequel ils se trouvent, une pesanteur réelle qui fait qu'ils se

renverſent d'un côté ou de l'autre, ſuivant les mouvements qu'on donne à la barre.

Si l'on a frotté un morceau de Fer ſur une Pierre d'Aimant, & que le tenant dans une ſituation perpendiculaire, on frappe ſur l'extrémité qui ſe dirige au Sud, on ne fera qu'augmenter ſa vertu, parce qu'on ne fait qu'abbattre un plus grand nombre de poils vers le côté où ils doivent être, mais ſi on frappe ſur l'autre bout, les poils ſe redreſſent, le paſſage ſe ferme à la matiére magnétique, ſa vertu du Fer diminuë, & ſi l'on continuë de frapper, elle ſe perd entiérement, paſſe à l'autre bout du Fer, & lui donne une direction contraire à celle qu'il avoit auparavant.

Ces faits qui ſont fondés ſur l'expérience, étant une fois bien établis, il ſuit aſſés naturellement qu'il n'y a qu'un ſeul courant de la matiére magnétique, & qu'elle entre dans le Fer aimanté par le côté qui ſe dirige vers le Sud, puiſque les poils qui ſont couchés vers l'autre extrémité la laiſſent entrer & ſortir ſans peine lorſqu'elle va dans ce ſens, mais qu'ils s'oppoſeroient à ſon entrée en lui preſentant leurs pointes, ſi elle alloit dans le ſens oppoſé. Cette hypotheſe, & celle du renverſement des poils, étant admiſes, tous les phénomenes de l'Aimant s'expliquent avec une facilité infinie. J'ai donné dans mon premier Mémoire l'explication de ceux qui ſont le plus connus, mais ſi l'on veut ſe donner la peine d'en faire l'application à tous les autres, en y joignant l'unité du courant, j'oſe aſſûrer que l'on en trouvera l'explication plus facile que dans aucun autre ſyſtême.

Je dois avertir ici que pour éviter l'obſcurité ou l'équivoque, je ne déſignerai point les poles de l'Aimant par les noms de Boreal & d'Auſtral, parce que, quoiqu'il ſoit reçû que le pole qui ſe dirige vers le Sud ſoit le Boreal, il m'a paru que cette définition ne ſe preſentoit pas toûjours bien nettement à l'eſprit, & j'ai crû qu'il valloit mieux les déſigner par celui qui ſe dirige au Nord, & celui qui ſe dirige au Sud.

Une particularité très-connuë de l'Aimant & du Fer aimanté, eſt que le pole qui ſe dirige vers le Nord, leve plus

de Fer que l'autre ; Descartes & presque tous les Physiciens qui l'ont suivi, ont supposé, premierement que cela n'arrivoit que dans les Pays septentrionaux, sans se fonder sur aucune expérience, que je sçache, & ils ont expliqué ce fait, en disant que le pole boréal de la Terre, considéré comme un grand Aimant, fortifioit le pole Austral des Pierres d'Aimant, ou du Fer aimanté, de même qu'il arrive à deux Aimants qu'on approche l'un de l'autre par les poles de différent nom.

Il y a plusieurs choses à considérer dans cette explication, 1.° Quoiqu'il soit certain que dans ce Pays-ci le pole de l'Aimant qui se dirige vers le Nord leve plus de Fer que l'autre, & qu'il n'y ait qu'à plonger une Pierre d'Aimant dans la limaille pour en être convaincu, il est néantmoins très-douteux que cela n'arrive pas de même dans les Pays méridionaux, & il sera du moins permis d'en douter jusqu'à ce qu'on en ait fait quelques expériences. 2.° L'expérience qui est apportée en comparaison n'est vraye que dans un cas qui n'est assûrement pas celui de la Terre à l'égard d'un Aimant, & il est très aisé de s'en éclaircir de la maniére la plus convaincante, il ne faut qu'approcher l'un de l'autre deux Aimants à peu-près d'égale force, par les poles de différent nom, sans qu'ils se touchent cependant, parce qu'alors ils ne feroient plus l'effet que d'un seul Aimant; on plongera ensuite dans la limaille le pole de l'un des Aimants qui se dirige vers le Nord, ensorte qu'il se charge de tout ce qu'il en pourra porter. S'il étoit vrai que la proximité du pole de l'autre Aimant augmentât sa force, il n'est pas douteux que lorsqu'on viendra à éloigner le second, une partie de la limaille ne dût se détacher, il doit même en tomber encore davantage si on le retourne, & que l'on presente le pole du Nord à la place de celui du Sud, car si l'un augmentoit la force du pole du premier Aimant, l'autre doit certainement la diminuër; il n'arrive cependant rien de tout cela, & il ne tombe point de limaille du premier, soit que l'on en éloigne l'autre, ou qu'on l'en approche par l'un ou l'autre de ses poles.

J'ai

J'ai observé de prendre deux Aimants à peu près d'égale force, parce que si l'un des deux est de beaucoup plus fort que l'autre, comme il est environné d'un tourbillon de matiére très-étendu, il fortifie necessairement le tourbillon de l'Aimant foible, de même qu'un Fer reçoit en presence de l'Aimant une vertu magnétique qu'il perd lorsqu'on l'en éloigne; c'est aussi l'explication que donna M. de Reaumur en 1723, de ce qu'un outil foiblement aimanté enlevoit plusieurs clous posés sur une grosse enclume, tandis qu'il en enlevoit un avec peine lorsqu'on les mettoit sur une table : mais si la force des deux Aimants dans nôtre expérience n'est pas bien différente, leur vertu n'est point du tout augmentée par l'approche des poles de différent nom.

C'est cependant sur cette supposition qu'est fondée l'explication de Descartes, mais on peut aller plus loin, & dire que quand l'expérience seroit vraïe dans le cas de deux Aimants d'une force à peu près égale, cela ne suffiroit pas pour en conclurre qu'il arrive la même chose à l'égard de la Terre, car le peu d'effet que pourroit faire la proximité du pole boréal de la Terre, ne peut être comparé à celui de deux Aimants que l'on met l'un auprès de l'autre, & l'on ne peut pas raisonnablement regarder l'un comme une conséquence de l'autre : l'explication donnée jusqu'à present ne peut donc pas se soûtenir, & il faut necessairement en chercher une autre; elle se trouve naturellement dans le systême d'un seul courant.

Presque tous les Physiciens ont supposé que la matiére magnétique se meut avec plus de facilité dans l'Aimant & dans le Fer aimanté que dans l'air. M. de Reaumur a cependant fait contre ce principe quelques difficultés, qui lui semblent prouver que la matiére magnétique trouve peut-être plus de difficulté à se mouvoir dans le Fer que dans les autres corps, & qu'on pourroit expliquer par-là tous les phénoménes de l'Aimant. Cette idée est très-ingénieuse, & mérite fort d'être approfondie, j'espere même que M. de Reaumur voudra bien nous la donner quelque jour plus en détail : mais comme l'opinion contraire est aujourd'hui presque universellement

reçûë, je crois devoir en faire la base de mon systême, d'autant plus même que l'opinion de M. de Reaumur étant précisément l'inverse de celle que j'admets, mon explication s'accordera également avec la sienne, en changeant seulement l'application.

M'en tenant donc à l'ancienne opinion, & supposant l'hypothese d'un seul courant suivant laquelle la matiére n'entre que par un des poles, & ne sort que par l'autre, on verra qu'elle doit non-seulement entrer par l'extrémité *S* dont j'ai supposé les poils couchés de façon à lui donner un passage libre, mais aussi par tous les points voisins de ce pole, comme *B, C, D, E*; mais la matiére étant une fois dans le Fer, elle y reste le plus long-temps qu'il lui est possible par la difficulté qu'elle trouve à pénétrer les parties de l'air, & par conséquent la plus grande partie n'en sort que par l'extrémité *N* qui est la plus éloignée. C'est donc vers ce seul point que se trouvent réünis tous les torrents de matiére qui sont entrés par divers points du pole opposé. Ce pole se trouvera donc avoir plus de vertu que l'autre par la réünion & l'abondance de la matiére. Voilà où nous mene le raisonnement, & l'expérience nous prouve en effet que c'est ce pole qui enleve le plus de Fer.

Figure 1.

Il faut encore quelque chose cependant pour que l'esprit soit entiérement satisfait; il faut voir, & toucher, pour ainsi dire, cette différence entre la densité du torrent de matiére à l'entrée & à la sortie de la Pierre; il ne faut pour cela qu'examiner avec attention la plus commune de toutes les expériences de l'Aimant, qui est de poser sur une table une Pierre d'Aimant, ou une lame d'Acier aimantée, de mettre une feüille de papier par dessus, & de jetter avec un poudrier de la limaille de Fer sur le papier. On sçait qu'elle s'arrange en tourbillon, & trace exactement la route de la matiére magnétique autour de la Pierre; mais si l'on y prend bien garde, on verra que les filets de limaille sont toûjours un peu plus resserrés, & plus proche les uns des autres autour du pole *N*, qui se dirige vers le Nord, qu'autour de l'autre, comme on le

voit dans les Fig. 1 & 2. Si l'on n'a pas fait cette attention jusqu'à present, c'est qu'il n'est pas facile de trouver un Aimant, ni même une lame d'Acier, dont les deux poles soient d'égale bonté; le mêlange de parties hétérogénes dans l'Aimant, & la façon de toucher les lames, peuvent causer de si grandes variétés, qu'il n'est pas étonnant qu'on ne se soit point apperçû jusqu'à present de cette disposition du tourbillon, qui n'est pas infiniment remarquable, mais que l'on trouvera toûjours constante, si l'on se sert d'une lame touchée bien également, avec les précautions que je rapporterai à la fin de ce Mémoire, & que l'on ait soin de répandre la limaille le plus également qu'il sera possible.

Il me semble que cette observation est une nouvelle preuve de l'unité du courant, & de la direction de son mouvement. J'en ajoûterai encore une qui mérite quelque attention, quoiqu'à dire le vrai, elle doive être regardée comme une convenance avec le systême plûtôt que comme une preuve. M. Halley & plusieurs autres Physiciens depuis lui ont dit que la matiére magnétique pouvoit avoir quelque part aux Lumiéres boréales. Sans entrer dans le détail de leurs opinions particuliéres, je dirai simplement qu'on pourroit les expliquer en cette sorte. Les exhalaisons inflammables, ou même dont quelques-unes sont déja enflammées, étant répandües dans l'air, si leur degré de densité ou de pesanteur les amene à la distance de la Terre où la matiére magnétique circule en plus grande abondance, ce torrent qui coule vers le Nord, rassemble ces exhalaisons éparses dans toute l'Athmosphere, & les réünit vers le pole; celles qui sont déja enflammées embrasent les autres, ou la seule collision les allume, & le courant de matiére les dispose en forme de rayons, tels que nous les voyons. On peut encore ajoûter, que suivant les observations les plus exactes, le centre auquel aboutissent ces rayons, décline presque toûjours vers l'Oüest de 14 ou 15 degrés, ce qui est à peu-près la quantité dont l'Aiguille décline présentement. Si ce centre des rayons des Aurores boréales venoit à suivre à l'avenir les variations de l'Aimant,

cela pourroit nous mener à quelque chose de plus positif, mais je ne pousserai pas maintenant plus loin cette explication, qui n'est qu'une conjecture, quoiqu'elle ne soit pas absolument sans vrai-semblance, & qu'elle puisse devenir beaucoup plus forte, si jamais nous sommes assûrés par de bonnes observations, qu'on ne voit pas de pareilles lumiéres vers le pole méridional.

Ce n'est pas assés d'avoir tâché d'établir le systême d'un seul courant par les diverses preuves que j'ai pû en trouver, il faut à présent répondre aux objections qu'on peut y faire. Celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit, est que s'il n'y avoit qu'un seul courant de matiére magnétique, une Aiguille aimantée étant posée librement sur la surface de l'eau, seroit portée par le mouvement de la matiére vers l'un des poles, & que pour que cela n'arrive point, il faut qu'elle soit poussée par deux courants d'égale force, dont l'un fasse équilibre à l'autre, & qui ne lui permettent que de tourner sur elle-même pour se diriger vers les poles, sans la pousser plûtôt vers l'un que vers l'autre.

Avant que de répondre à cette objection, on peut dire qu'elle seroit presque aussi forte contre le systême des deux courants; car comme le pole qui se dirige vers le Nord est plus fort que l'autre, il s'ensuivroit que le courant du Sud au Nord auroit plus de force, & que par conséquent l'Aiguille devroit être emportée vers le Nord; ainsi l'objection est à peu-près la même dans tous les systêmes, mais elle n'en est pas plus solide, & il est facile d'y répondre; il ne faut pour cela que se souvenir du principe reçû dans presque toutes les hypotheses, qui est que la matiére se meut avec plus de facilité dans l'Aimant, ou dans le Fer aimanté que dans l'air. Ce principe établi, l'Aiguille posée sur l'eau ne doit point avoir de mouvement processif vers le Nord, car pour qu'elle fût entraînée par le courant de la matiére, il faudroit que la matiére trouvât plus de résistance à pénétrer les pores de l'Aiguille, que l'Aiguille même n'en trouve à vaincre le frottement des parties de l'eau; mais comme la matiére passe

très-librement dans les pores de l'Aiguille ſuivant ſa longueur, il n'y a aucune partie de ſa force employée à porter l'Aiguille vers le Nord, & cette force ne doit tendre qu'à la faire tourner, enſorte que ſes pores ſe préſentent le plus avantageuſement qu'il eſt poſſible au courant de la matiére, ainſi l'Aiguille ne peut avoir que le mouvement de direction.

La ſeconde objection eſt priſe d'un Mémoire préſenté à l'Académie par M. de Créquy, dont l'objet étoit de prouver qu'il y a deux courants de matiére dont les directions ſont oppoſées. Il employe d'abord l'objection à laquelle nous venons de répondre, & qui a été faite plus d'une fois, & il ſe ſert enſuite de l'expérience ſuivante. Il a fait faire une Aiguille dont l'un des bouts depuis la chape eſt de Cuivre, & l'autre eſt d'Acier; cette Aiguille eſt par rapport au torrent de matiére magnétique, dans le même cas que ſi la moitié du Cuivre n'y étoit point, & en effet elle ne ſert qu'à faire équilibre à l'autre. M. de Créquy prétend que ſi l'on touche une pareille Aiguille, enſorte que le bout d'Acier ſe doive diriger vers le Sud, il eſt impoſſible qu'elle s'y dirige en cas que la matiére vienne du Sud, de même qu'une giroüette ou une banniére ne dirigera jamais ſa pointe vers le côté d'où vient le vent; il dit la même choſe à l'égard du Nord, d'où il conclut qu'il y a néceſſairement deux courants, dont l'un chaſſe l'Aiguille vers le Nord, & l'autre vers le Sud. Voilà les raiſons & l'exemple ſur lequel il ſe fonde; mais pour peu qu'on y faſſe d'attention, on verra que rien n'eſt ſi différent que le cas de la giroüette & celui de l'Aiguille. Dans le premier, l'effort du vent eſt continuellement appliqué ſur les parties extérieures de la giroüette, & la doit pouſſer par conſéquent juſqu'à ce qu'il l'ait placée dans la direction de ſon courant. Mais il n'en eſt pas de même de l'Aiguille, le courant qui l'entraîne, n'agit en aucune façon ſur ſes parties extérieures; au contraire, la matiére pénétre l'intérieur de l'Aiguille, & ce n'eſt que ſuivant la direction des parties internes du Fer que le courant doit agir. Nous avons ſuffiſamment établi dans le premier Mémoire, qu'il ne falloit

qu'abbattre les pointes que l'on ſuppoſe dans les pores du Fer, vers celle des extrémités que l'on veut faire diriger vers le Nord. Si l'on tourne l'Aiguille, enſorte que les pointes ſe préſentent au courant, il eſt certain que la matiére qui n'agit que ſur elles, puiſque ce ſont ces pointes ſeules qui réſiſtent à ſon paſſage, les heurtera toutes, enſorte qu'elle ſera tourner l'Aiguille juſqu'à ce qu'elle lui préſente le pole oppoſé par lequel elle doit entrer. La figure extérieure de l'Aiguille n'y fait rien, & il ſuffit qu'elle ſoit mobile ; car quand on toucheroit l'Aiguille d'un ſens contraire, ce qui renverſeroit les pointes vers la chape, il arriveroit encore la même choſe, l'Aiguille ſera toûjours portée par le courant dans le ſens que ſes pointes ſeront tournées, & ſans que ſa figure extérieure y entre pour rien, puiſque dans aucun cas la force du courant de la matiére ne peut y être appliquée, ainſi on voit qu'il n'y a nulle parité entre l'exemple de la giroüette & celui de l'Aiguille qui n'a qu'une moitié d'Acier, & que par conſéquent l'objection tombe d'elle-même.

On peut ajoûter que quand on voudroit ſuppoſer qu'une pareille Aiguille fut abſolument dans le cas de la giroüette, il ſeroit impoſſible d'expliquer ſa direction par le moyen de deux courants ; car ſi une giroüette étoit expoſée à deux vents, dont les directions fuſſent préciſément oppoſées, la force de l'un des deux vents ſeroit ſupérieure à l'autre, ou elles ſeroient égales. Dans le premier cas, la giroüette ſeroit certainement entraînée par celui dont la force eſt la plus grande, & elle ſera comme ſi elle n'étoit expoſée qu'à un ſeul vent, dont la force ſera exprimée par l'excès de l'un ſur l'autre. Dans le ſecond cas, les deux forces ſe feront équilibre, & laiſſeront la giroüette indifféremment dans toutes les ſituations où elle ſe trouvera ; ainſi le ſyſtême des deux courants eſt encore moins favorable que l'autre à l'explication de la direction de l'Aiguille qui n'a qu'un des bouts d'Acier, & nous venons de voir qu'il n'y a nulle difficulté en ſuppoſant un ſeul courant, puiſque la matiére n'agit que ſuivant l'inclinaiſon des parties intérieures de l'Aiguille auſquelles

feules elle eſt applicable, & nullement ſuivant ſa forme extérieure.

Je ne crois pas qu'il y ait d'autre objection contre l'unité du courant qui mérite attention. Je ne parle point ici de la déclinaiſon qui n'a rien de plus difficile dans ce ſyſtême que dans tous les autres, & qui n'a aucun rapport avec les propriétés de l'Aimant, dont j'ai entrepris de parler dans ces deux Mémoires. Pour ne me pas borner dans celui-ci à l'établiſſement d'un ſyſtême qui n'eſt qu'une recherche purement ſpéculative, je vais ajoûter quelques remarques ſur la maniére d'aimanter les Aiguilles & les lames de Fer ou d'Acier, & d'armer les Pierres d'Aimant pour produire l'effet le plus avantageux. Ces obſervations tendent toutes à confirmer l'unité du courant, ou du moins elles s'accordent mieux avec ce ſyſtême qu'avec tout autre.

On peut réduire à deux les différentes maniéres de toucher les Aiguilles ſur la Pierre d'Aimant. L'une eſt de les paſſer ſur une des armures de la Pierre, & l'autre de les paſſer ſur toutes deux. Il eſt certain que la maniére la moins avantageuſe eſt de ne les paſſer que ſur une ; car premiérement pour toucher en cette ſorte, il faut que l'Aiguille faſſe avec la direction du courant de la matiére un angle aſſés grand, ce qui fait que les poils ne peuvent pas être couchés bien exactement dans le ſens de la longueur de l'Aiguille. En ſecond lieu, le torrent de matiére ſe trouve néceſſairement partagé, parce qu'il y en a une partie qui tend à couler dans l'Aiguille, & le reſte à paſſer dans l'autre pole de l'Aimant. Enfin l'Aiguille touchée de cette maniére ſur le pole de la Pierre qui ſe dirige au Sud, ſera encore moins aimantée que ſi on la touche ſur l'autre, parce que la matiére ſortant par ce dernier, eſt plus réünie, & a plus de force, comme nous l'avons prouvé au commencement de ce Mémoire. Ces conjectures ſont confirmées par l'expérience, & il eſt aiſé à chacun de les vérifier.

L'autre maniére de toucher, eſt de gliſſer l'Aiguille ſur les deux armures, la tenant parallele à l'axe de la Pierre, ce

qui ſe peut encore faire en deux façons, car on verra que rien n'eſt à négliger dans une matiére auſſi ſuſceptible des plus petites délicateſſes. On peut retirer l'Aiguille de deſſus les armures, en continuant de la gliſſer d'un bout à l'autre, enſorte que la partie qui a d'abord touché un des poles de l'Aimant, vienne enſuite à toucher l'autre. Pour peu qu'on réfléchiſſe, on verra bien que cette maniére n'eſt pas la meilleure, puiſque le même bout de l'Aiguille qui avoit poſé d'abord ſur le pole par lequel la matiére ſort de la Pierre, & dont les parties ſeront par conſéquent diſpoſées de façon à l'y laiſſer entrer, venant à paſſer enſuite ſur le pole oppoſé, la matiére qui entre dans la Pierre par ce pole doit néceſſairement détruire une partie de l'arrangement qui s'étoit fait lorſque ce même bout étoit ſur l'autre pole de la Pierre.

Il réſulte donc de-là que la meilleure maniére de toucher une Aiguille, eſt de la poſer ſur la tête des armures d'un Aimant, & ſi l'Aiguille eſt plus longue que l'axe de l'Aimant, on la gliſſera un peu, enſorte que chaque partie de l'Aiguille touche les armures, mais en la retirant, on la détachera parallelement à l'axe, ſans la gliſſer toute entiére ſur les deux poles, parce que, comme nous venons de l'obſerver, ſa vertu diminuëroit, ſi le bout qui a été d'abord ſur un des poles venoit à paſſer ſur l'autre. L'expérience confirme parfaitement cette théorie, & l'Acier touché en cette ſorte a beaucoup plus de vertu magnétique que des deux premiéres maniéres, qui ſont cependant preſque les ſeules qui ſoient en uſage.

Je rapporterai à cette occaſion une expérience qui ne ſe trouve dans aucun des Auteurs qui ſont venus à ma connoiſſance; c'eſt que ſi l'on gliſſe une Aiguille à la diſtance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, ſans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la gliſſe du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un inſtant à quelque diſtance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction ſemblable à celle qu'elle auroit, ſi on la poſoit ſimplement ſur les armures de la Pierre, & qu'on la retirât enſuite parallelement à l'axe,

&

& toute opposée à celle qu'elle auroit contractée, si on l'avoit glissée d'un bout à l'autre sur les deux armures de la Pierre.

Il ne faut que jetter les yeux sur la Figure 3.e pour voir que tout cela doit arriver ainsi, sur-tout dans le systême d'un seul courant ; car, supposé qu'il suive la direction désignée par les petites fléches, on voit que si l'on glisse l'Aiguille, ou qu'on la tienne seulement dans l'étenduë du tourbillon *OP*, les petits poils doivent se coucher du sens que vont les fléches, c'est-à-dire, que la matiére sortira par le bout *P*, qui par conséquent se dirigera vers le Nord. Il arrivera encore la même chose, si on pose l'Aiguille sur les armures, parce que le cours du tourbillon ne fera que se rapprocher de la Pierre, & la matiére passera toûjours par l'Aiguille en sortant d'un pole & rentrant dans l'autre; mais si l'on vient à glisser l'Aiguille sur les armures, il est nécessaire qu'elle prenne une direction opposée, puisque le bout de l'Aiguille qui étoit d'abord sur le pole *N*, vient ensuite sur le pole *M*, & que ce n'est pas de celui qu'il a touché le premier, mais du dernier, qu'il contracte la vertu qu'il conserve dans la suite. Figure 3.

J'ai voulu essayer s'il ne séroit pas possible de déterminer à peu près la vîtesse du courant de la matiére magnétique, mais quoique j'aye fixé un degré de vîtesse qu'elle excede de beaucoup, il s'en faut bien encore que je n'aye pû la déterminer au juste ; voici quelle étoit mon idée.

Supposant toûjours un seul courant qui circule dans la Pierre, & qui en sortant, va de *N* en *M;* si je parviens à faire passer une Aiguille en ce sens dans le tourbillon avec autant ou plus de vîtesse que n'en a le courant, elle ne doit point s'aimanter, parce qu'alors la matiére ayant une vîtesse égale, est comme en repos à l'égard de l'Aiguille, & par conséquent ne peut pas agir sur ses poils, ni les coucher en aucun sens. Pour tâcher d'y parvenir, j'ai ajusté une Aiguille à angles droits à l'extrémité d'une Tringle de bois de deux pieds, attachée par son autre bout à une goupille, ensorte que l'extrémité à laquelle étoit l'Aiguille, pût décrire un arc de cercle; j'ai lié vers ce bout une corde qui faisoit plusieurs

tours ſur un tambour de Montre. Ayant diſpoſé le tout ſur une planche, lorſque j'amenois vers moi la petite tringle, je bandois le reſſort du tambour ; venant enſuite à la lâcher ſubitement, la tringle partoit avec beaucoup de vîteſſe, & emportoit l'Aiguille, qui par ce moyen traverſoit très-rapidement le tourbillon d'un Aimant que j'avois diſpoſé à cet effet ſur la planche. J'ai recommencé cette expérience un grand nombre de fois, tantôt faiſant aller l'Aiguille dans le ſens du courant, tantôt dans le ſens oppoſé, & quoique j'aye crû remarquer qu'elle étoit plus vivement aimantée, lorſqu'elle alloit à contre-ſens du courant, la différence étoit néantmoins ſi peu conſidérable, qu'il en réſulte toûjours que le mouvement de la matiére magnétique eſt infiniment plus rapide que celui qui peut être cauſé par le débandement d'un reſſort.

Pour aimanter une lame d'Acier, on doit obſerver les mêmes choſes que nous avons dites à l'égard des Aiguilles; on la paſſera ſur les deux armures d'un Aimant, & lorſque le bout par lequel on veut finir ſera proche de l'armure, on détachera la lame parallelement à l'axe de la Pierre ; on la frottera cinq ou ſix fois de la même maniére, & elle ſera auſſi-bien aimantée qu'elle peut l'être. Si l'on veut compoſer un Aimant artificiel avec pluſieurs de ces lames, il y a quelques précautions à prendre. A meſure qu'on les aura aimantées, il faut les poſer contre une muraille, le bout qui ſe doit diriger au Nord en embas, & les éloigner les unes des autres aſſés pour que les poles de même nom ne puiſſent pas ſe nuire mutuellement. Lorſqu'elles ſeront toutes aimantées, on les raſſemblera le plus ſubitement qu'il ſera poſſible, mettant enſemble les poles de même nom, & on les ſerrera bien avec les anneaux qui doivent avoir été préparés auparavant. Voilà la maniére qui m'a paru la meilleure pour faire un Aimant artificiel auſſi fort & auſſi bon qu'il le peut être.

Il y a encore quelque choſe à obſerver ſur le choix de la matiére qui ſe peut le mieux aimanter, & je fis quelques remarques à ce ſujet, lorſque je travaillois à mon premier

Mémoire; car les expériences qui y sont rapportées, ne réüssissent pas à beaucoup près si parfaitement avec une lame d'Acier, & moins encore avec l'Acier trempé. Dans ces deux derniéres, les petits poils ne sont pas si fléxibles, ni si faciles à renverser que dans le Fer ordinaire, ainsi le seul renversement de la lame, ou des coups légerement donnés sur une de ses extrémités, ne peuvent en abbattre qu'un très-petit nombre, mais il doit résulter de cette difficulté, que lorsque les petits poils sont une fois couchés en un même sens, c'est-à-dire, lorsque l'Acier est aimanté, il doit perdre sa vertu plus difficilement, c'est aussi ce que l'expérience nous montre.

Comme les Auteurs varient extrêmement sur ce qui s'aimante le mieux du Fer, de l'Acier, ou de l'Acier trempé, j'ai voulu m'en assûrer par des expériences exactes, & ayant fait faire quatre lames égales, l'une de Fer, l'autre d'Acier, la troisiéme d'Acier trempé & la quatriéme de Fer fondu, toutes polies, je les ai toutes aimantées de la même maniére. On sent, en les frottant, que celle de Fer s'attache à l'Aimant plus fortement que toutes, celle d'Acier plus que celle d'Acier trempé, & celle de Fer fondu moins que les trois autres. Les présentant à une Aiguille aimantée, la lame d'Acier l'attiroit de bien plus loin que les autres; celle d'Acier trempé l'attiroit de plus loin que celle de Fer fondu, & celle de Fer avoit beaucoup moins de vertu magnétique que toutes les autres; celle d'Acier en avoit le plus, & leur enlevoit l'Aiguille, quoiqu'elle en fût plus éloignée. Ces expériences ne varient point, & l'explication en est facile.

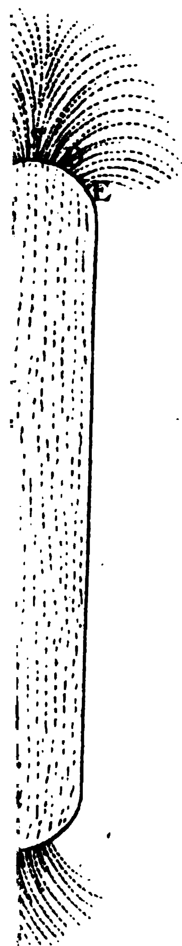
Le Fer s'aimante aisément par la grande souplesse de ses poils, leur mobilité, & la facilité qu'ils ont à être couchés en tout sens; ces propriétés lui font aussi perdre la vertu magnétique avec presque autant de facilité qu'il l'a acquise, c'est ce que nous voyons par le changement de ses poles, lorsqu'on renverse la barre, qu'on la chauffe, qu'on la frappe, &c. c'est ce qui fait aussi qu'ayant été aimanté, ses parties conservent moins l'arrangement qu'elles ont reçû par la présence de l'Aimant. L'Acier dont les poils sont moins fléxibles,

s'aimante plus difficilement par le renverſement, par les coups; mais lorſqu'en le paſſant ſur un Aimant, ils ont été une fois inclinés & forcés à donner paſſage à la matiére magnétique, ils demeurent bien plus conſtamment dans cet état, & la même réſiſtance que leur manque de ſoupleſſe apportoit à l'arrangement néceſſaire pour être aimantés, s'oppoſe auſſi à leur dérangement.

Si par quelque moyen on pouvoit renverſer de la même maniére les poils qui ſont dans l'Acier trempé, ou dans le Fer fondu, ils conſerveroient certainement encore plus de vertu que l'Acier ordinaire, mais leurs parties ſont trop inflexibles, & cédent trop difficilement au torrent de matiére magnétique, ils ne s'aimantent donc pas ſi-bien, & acquiérent moins de vertu que l'Acier ordinaire.

Enfin je conclüerai de toutes ces conſidérations & ces expériences, que les armures & le portant d'un Aimant doivent être de Fer, parce qu'étant toûjours proches de l'Aimant, ſes poils ſont facilement retenus dans la même ſituation, & que ſe prêtant à toutes les diſpoſitions, il n'y a aucune partie de la force de l'Aimant employée à les y contraindre; l'Acier dont les parties ſont plus de réſiſtance, ſera moins bon, & l'Acier trempé ſera encore plus mauvais. Comme c'eſt à l'expérience à achever de convaincre dans les choſes qui en ſont ſuſceptibles, je me ſuis aſſûré par des épreuves exactes que le raiſonnement ne m'avoit point trompé, & ayant fait faire à la même Pierre des armures de Fer, d'Acier & d'Acier trempé, les plus égales qu'il a été poſſible, j'ai éprouvé que celles de Fer pur & doux étoient les meilleures, & que les moins bonnes étoient celles d'Acier trempé, la même Pierre ayant conſidérablement moins de force avec ces derniéres qu'avec les premiéres.

Au reſte, s'il y a dans cette opinion quelque hypotheſe qui paroiſſe difficile à admettre, c'eſt l'exiſtence des branches ou poils repandus dans les pores du Fer, mais cela n'eſt point particulier à mon ſyſtême; Deſcartes, & preſque tous les Phyſiciens après lui les ont admis; il eſt vrai que ce n'eſt



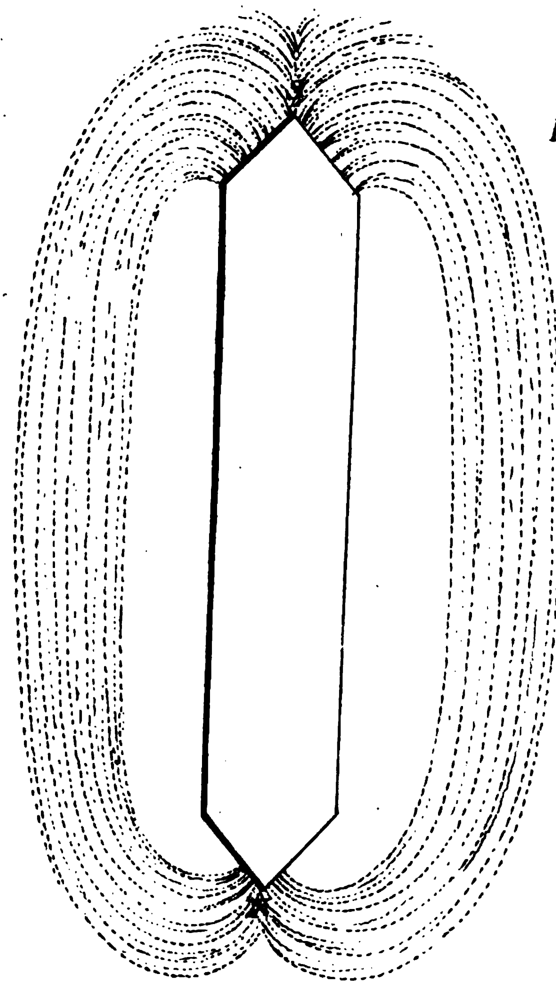
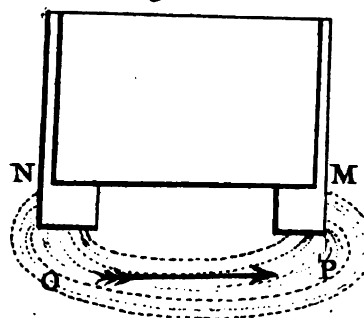


Fig. 2.

Fig. 3.



Cette planche doit être à la page 157. des Mem. de 1730.

Ph. Simonneau Sculp

qu'une petite portion du ſyſtême de Deſcartes, mais c'eſt la plus ſimple, & celle qui a été le moins combattuë. Ce n'eſt certainement pas rendre cette hypotheſe plus composée, ni moins vrai-ſemblable, que de ſuppoſer ces poils aſſés mobiles pour que leur propre poids, ou des ſecouſſes réïtérées les abbattent vers un des bouts du Fer. C'eſt cependant la ſeule ſuppoſition dont j'ai beſoin pour expliquer un grand nombre d'expériences tant anciennes que nouvelles, qui ne l'avoient point été, ou du moins qui l'avoient été très-imparfaitement. Je vais plus loin dans ce ſecond Mémoire, & je déduis de ces expériences, & de mes explications, l'unité du courant de la matiére magnétique; mais ce n'eſt point encore là une ſuppoſition trop hardie, ni même une opinion nouvelle, pluſieurs Phyſiciens l'ont admiſe, à la vérité plûtôt par l'embarras qu'ils trouvoient dans le ſyſtême oppoſé, que par les preuves qu'ils en ont apportées, car je ne crois pas même qu'aucun ait entrepris de déterminer de quel côté alloit le courant; je donne donc ici un nouveau jour à cette hypotheſe, je la fortifie de nouvelles preuves, je réponds aux objections qu'on y a faites, & je détermine que le courant unique de la matiére magnétique doit aller du Sud au Nord. On voit que ce n'eſt point un ſyſtême nouveau que je haſarde; c'eſt celui de tous qui eſt le plus univerſellement reçû que je ne fais que débarraſſer de ce qu'il avoit de plus impliqué, & qui, par l'extrême ſimplicité à laquelle je le réduis, acquiert un nouveau degré de vrai-ſemblance, & je dirois même quelque choſe de plus, s'il étoit permis de ſe ſervir en Phyſique du terme de Démonſtration.



EXAMEN DES LIGNES DU QUATRIE'ME ORDRE OU COURBES DU TROISIE'ME GENRE,

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON ne sçauroit disconvenir que la connoissance des Lignes courbes ne soit un des objets des plus utiles de la Géométrie. Les progrès que les Anciens firent dans les Mathématiques, après avoir reconnu les propriétés des quatre Sections coniques, en sont des preuves convaincantes. Si ces grands Hommes n'ont pas poussé leurs recherches plus loin, s'ils se sont bornés à quatre ou cinq autres Courbes d'un genre plus élevé que les Sections coniques, ce n'est pas une preuve qu'ils ayent crû la connoissance des Courbes plus composées, inutile & infructueuse : il paroît au contraire, qu'ils en ont senti tout le mérite, & qu'ils ont même fait de temps en temps de grands efforts pour y parvenir ; mais ils manquoient de secours, je veux dire d'une Méthode qui, portant la lumiére dans les routes obscures & inconnües qu'il falloit parcourir, conduisît l'esprit humain sans lui laisser la moindre appréhension de s'égarer.

L'application de l'Algébre à la Géométrie, dont on est redevable au grand génie de M. Descartes ; le Calcul de l'Infini, & toutes les nouvelles découvertes qui y ont rapport, dont les illustres Auteurs ont été presque tous Membres de cette Académie, en faisant changer de face au Monde géometre, lui ont fourni successivement des secours qu'il attendoit depuis si long-temps ; enfin un des plus illustres Membres de cette Compagnie * vient de dévoiler ce qui pouvoit rester encore d'inconnu ou de mystérieux dans la théorie des nouvelles Méthodes : en faisant connoître l'Infini dès

* M. de Fontenelle.

V

son origine, en le suivant dans ses différentes modifications, en l'obligeant, pour ainsi dire, de manifester ses effets les plus cachés, il a non seulement affermi les secours que la Géométrie avoit déja reçûs, mais il lui en a encore procuré de nouveaux.

Entreprendre un détail de tous les avantages que la Géométrie a reçû depuis près d'un Siécle, ce seroit m'écarter de mon sujet : ainsi, en me renfermant dans les bornes que je me suis prescrites, je me contenterai de rappeller dans la mémoire des Personnes qui me font l'honneur de m'entendre, que dès que la Géométrie de M. Descartes eût paru, comme elle apprenoit l'art de renfermer dans une seule Equation les principales propriétés d'une ou de plusieurs Courbes, on s'accoûtuma aisément, avec ce grand homme, à distinguer les Courbes en Géométriques, qu'on a nommées depuis *Courbes algébriques* ou *rationnelles*, & en Méchaniques, qu'on a nommées ensuite *Courbes transcendantes* ou *algébriquement irrationnelles*.

Les premiéres furent dès-lors distinguées en différents ordres, selon le degré d'élévation auquel leur Equation se trouve élevée. Cette distinction est connüe de tout le monde, elle a été adoptée par tous les Géometres, & personne n'ignore aujourd'hui que la Ligne droite est la seule Ligne du premier ordre, parce qu'elle est la seule dont l'Equation ne monte qu'au premier degré ; que les quatre Sections coniques sont les seules Lignes du second ordre, parce qu'elles sont les seules dont les Equations ne montent qu'au second degré.

Il y a cinquante ans qu'on ne connoissoit qu'un très-petit nombre de Lignes du troisiéme ordre ; les deux Paraboles cubiques, la Cissoïde de Dioclès, le *Folium* de M. Descartes, la Paraboloïde du même M. Descartes, & une sixiéme Courbe, qu'on peut nommer le *second Hyperbolisme parabolique,* étoient, je crois, les seules Lignes du troisiéme ordre dont on eût quelque connoissance, lorsque M. le Chevalier Newton publia son *Enumération des Lignes du troisiéme ordre*, l'un des plus beaux & des plus grands spectacles que la Géométrie eût

produit depuis long-temps, dans lequel on vit paroître sur la scene soixante & douze Courbes jusqu'à lors inconnües aux Sçavants, à l'exception des six dont on vient de parler.

Le célébre Géometre Anglois ayant supprimé l'Analyse qui lui avoit ouvert le chemin de cette belle découverte; M. Stirling, autre Géometre de la même Nation, entreprit treize ans après de développer cette Analyse; il en donna les Principes fondamentaux dans un Ouvrage, intitulé *Illustratio Tractatus D. Newtonii de Enumeratione Linearum tertii ordinis*, imprimé à Oxfort en 1717, dans lequel l'Auteur, en faisant paroître une grande connoissance de la Géométrie la plus profonde, & une vaste étendüe de génie, découvre plusieurs choses curieuses & utiles qui peuvent contribuer infiniment à la théorie des Courbes d'un genre plus élevé.

Enfin M. Nicole a commencé de lire à l'Académie un Traité de ces mêmes Courbes du second genre, ou Lignes du troisiéme ordre, dans lequel il répand un nouveau jour sur ce qui fait l'objet de son ouvrage, & le traite avec cette dextérité avec laquelle il manie les matiéres les plus épineuses de la Géométrie.

Je ne ferai pas difficulté d'avoüer ici que j'ai travaillé quelque temps sur le même sujet, que mon dessein étoit de donner un Traité complet des Lignes du troisiéme ordre, en suivant le plan de celui des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, & d'y ajoûter une énumération des Lignes du quatriéme ordre. Mais ce Traité ne devant plus avoir les agréments de la nouveauté, après les ouvrages des trois grands Géometres que je viens de nommer, j'ai crû que le seul examen des Lignes du quatriéme ordre, ou Courbes du troisiéme genre, étant une matiére toute nouvelle, pourroit être agréable à l'Académie, & de quelque utilité au Public. Je me suis déterminé d'autant plus volontiers à le donner, qu'il m'a paru que pour entendre ce que j'ai à dire sur les figures, les contours, les différents points, les différentes branches, & les autres propriétés des Lignes du quatriéme ordre, il n'est pas absolument nécessaire d'avoir une connoissance parfaite
de

de celles du troisiéme, mais qu'il suffit d'en connoître les plus simples, & de sçavoir seulement l'application de l'Algebre à la Géométrie, & les premiers principes du Calcul différentiel.

Parmi les Courbes dont j'ai à parler dans ce Traité, il y en a quelques-unes, mais en très-petit nombre, qui sont connües de tous les Géometres : telles sont trois ou quatre Paraboles & autant d'Hyperboles du quatriéme ordre, dont il est parlé dans différents ouvrages des Géometres modernes : telle est la Conchoïde de Nicomede, qui est en usage depuis plusieurs Siécles : telle est la Lemniscate de M.rs Bernoulli, ces deux illustres Freres, dont les noms semblent devoir subsister aussi long-temps que la Géométrie : telle est enfin une espece d'Hyperbole du quatriéme ordre que M. Stirling a décrit dans l'ouvrage que j'ai déja cité.

On a encore quelque chose de plus sur cette matiére, je veux parler du sçavant Traité de M. Mac-Laurin, Professeur de Mathématique dans le nouveau College d'Abreden, & Membre de la Société Royale de Londres, auquel trois Théoremes, publiés par M. Newton à la fin de son Enumération des Lignes du troisiéme ordre, ont donné naissance.

Cet illustre Géometre annonça au Public en 1704 une Méthode pour décrire par un mouvement continu, non seulement les quatre Sections coniques, mais encore toutes les Lignes algébriques qui ont ce qu'on appelle des *points doubles*, c'est-à-dire, des points par lesquels la Courbe passe deux fois : M. Newton nommoit particuliérement les Lignes du troisiéme & du quatriéme ordre, qui ont des points doubles, mais il se contentoit d'annoncer cette belle Méthode sans en donner la démonstration ni par l'analyse, ni par la synthese. Quelques personnes, pour lesquelles j'avois une extrême déférence, m'engagerent en 1708 à chercher ce que M. Newton avoit jugé à propos de cacher aux yeux du Public : j'eus le bonheur de réüssir, & l'on fit imprimer mon Analyse dans le Supplément du Journal des Sçavants du dernier Septembre 1708. Mais en donnant la démonstration analytique de la Méthode de M. Newton, pour décrire par un

mouvement continu les Courbes algébriques qui ont des points doubles, je me contentai de faire voir que par le moyen des deux formules générales, auxquelles se réduisoit ma démonstration, on pouvoit trouver aisément les Equations des Lignes du troisiéme & du quatriéme ordre qui ont des points doubles, & je n'entrai dans aucun détail : les Etudes & les occupations auxquelles j'étois obligé de vaquer par rapport à mon état, ne m'ayant pas laissé le loisir de développer les conséquence de cette Analyse, qui m'auroient fourni la matiére d'un juste volume.

Ce que je n'avois pû exécuter en 1708, l'a été depuis, par M. Mac-Laurin, d'une maniére si avantageuse à la Géométrie, qu'on peut dire qu'elle y a gagné considérablement : car en travaillant sur cette matiére en 1708, je ne pensois qu'à la description des Courbes qui ont des points doubles ou triples, n'ayant alors d'autres vûës que de découvrir le secret de M. Newton, au lieu que M. Mac-Laurin, dans son Traité imprimé à Londres en 1720, sous le titre de *Geometria organica*, s'est attaché non-seulement à donner les démonstrations analytique des Théoremes de M. Newton, mais encore à imaginer une méthode de décrire par des mouvements continus les Lignes algébriques qui n'ont pas des points doubles, & principalement celles du troisiéme & du quatriéme ordre, ce que M. Newton avoit jugé très-difficile à exécuter commodément : *Nam Curvam aliquam*, disoit ce grand Géometre, *secundi vel tertii generis punctum duplex non habentem commodè describere Problema est inter difficiliora numerandum.*

Ainsi on doit regarder M. Mac-Laurin comme le Géometre qui a le plus manié les Lignes du quatriéme ordre, sans cependant avoir eû le dessein de les faire connoître en détail, d'examiner leurs especes particuliéres, & de faire remarquer en quoi elles différent les unes des autres : il semble même avoir voulu prévenir sur cela les Lecteurs les moins attentifs ; car à la fin de la troisiéme Section de sa premiére Partie, après avoir dit que le nombre des Lignes du quatriéme ordre est très-considérable, & qu'il y a bien du travail à

essuyer pour les faire connoître, il ajoûte qu'il y a lieu néantmoins d'espérer qu'elles ne resteront pas inconnuës aussi longtemps que celles du troisiéme ordre, vû le grand nombre d'habiles gens qui s'appliquent aujourd'hui à la Géométrie: *Sed his sæculis, quibus felicissimo virorum doctorum studio artes ac disciplinæ omnes elegantiores ac præsertim Geometria, ad perfectionem summam properare videntur, sperare licet Lineas quarti ordinis non tam diù latere posse, extra definitos Geometriæ limites, quam priùs latuerunt eæ ordinis proximè inferioris, non ita pridem ab ipso Geometrarum principe in lucem proditæ.*

J'ai donc crû pouvoir me flater que cet examen des Lignes du quatriéme ordre auroit au moins les agréments de la nouveauté, & cela avec d'autant plus de raison que ce Traité n'a nul rapport avec l'ouvrage de M. Mac-Laurin, ni avec l'Analyse que je donnai en 1708 des Théoremes de M. Newton. En effet il ne s'agit pas ici d'examiner les Lignes particuliéres du quatriéme ordre qui naissent de tel ou tel mouvement continu & organique, mais d'aller, pour ainsi dire, chercher les Lignes de cet ordre jusques dans leurs sources, d'en faire connoître les différentes classes & les différentes especes, & ensuite d'en déduire les principales propriétés par le moyen de l'Analyse ordinaire aidée de l'Analyse de l'Infini.

J'aurois souhaité pouvoir abréger cet examen, mais la crainte de devenir obscur, en voulant être court, m'a retenu: outre cela il auroit fallu supprimer quantité de Théoremes nouveaux, utiles & curieux. Ainsi mon ouvrage étant beaucoup plus long que ne sont ceux qu'on lit ordinairement dans les Assemblées de l'Académie, je me vois dans la nécessité de le diviser en plusieurs Sections, & les Sections en différents Mémoires propres à être lûs dans les Assemblées de l'Académie. La premiére, qui sera divisée en quatre ou cinq Mémoires, contiendra les Principes fondamentaux de tout l'ouvrage.

SECTION PREMIERE.

Principes fondamentaux de l'Examen des Lignes du quatriéme ordre.

PREMIER MEMOIRE.

DÉFINITIONS ET EXPLICATIONS.

I.

I. TOutes les Courbes algébriques, de quelque genre qu'elles puissent être, rentrent en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini. Celles qui rentrent en elles-mêmes peuvent être appellées *Ovales*, d'un nom générique dont je demande la permission de me servir, quoique quelques-unes de ces Courbes ne ressemblent gueres à des Ovales ordinaires, mais c'est afin de pouvoir les distinguer par un seul mot de celles qui s'étendent à l'infini. Ces *Ovales* sont ou simples comme l'Ellipse ordinaire, qui est une Ovale du premier genre, ou composées comme sont presque toutes les Lignes du quatriéme ordre qui rentrent en elles-mêmes, & parmi ces Ovales composées il y en a qui se noüent en forme de ruban, & on les appelle des *Lemniscates*, nom qui leur a été imposé par les illustres Géometres de Bâle dont j'ai parlé ci-devant.

II.

II. Les Courbes qui s'étendent à l'infini, peuvent être nommées par abréviation *Courbes* ou *Lignes infinies*, & parmi celles-ci il y en a que j'appelle *Courbes simples*, & d'autres *Courbes composées*. Les premiéres sont celles qui n'ont que des branches infinies en nombre pair : les *composées* sont celles qui outre leurs branches infinies, toûjours en nombre pair, ont encore des *Ovales* simples ou composées, ou des *Lemniscates*, qui font partie des mêmes Courbes, lesquelles quoique séparées, sur le plan, des branches infinies dont nous venons de parler, ne laissent pas de leur être unies par les liens secrets de l'Equation algébrique qui exprime la nature de la

totalité de la Courbe ; ces portions ainsi détachées, sur le plan, des branches infinies de la Courbe à laquelle elles appartiennent, seront nommées ici *Ovales* ou *Lemniscates conjuguées.* Il y a des cas où ces Ovales deviennent infiniment petites, & se réduisent en un point, alors on le nomme par la même raison le *Point conjugué :* dans d'autres cas l'Ovale, au lieu d'être conjuguée, est unie avec deux des branches infinies de la Courbe, alors on la nomme le *Folium* de cette Courbe, & le point où se fait cette union est dit le *Nœud,* & ce Nœud est toûjours un *point double* de la Courbe.

III.

III. Les Courbes infinies, soit qu'elles soient simples, soit qu'elles soient composées, sont ou *Paraboliques,* ou *Hyperboliques,* ou *Parabolo-hyperboliques :* les premiéres sont celles dont toutes les branches infinies n'ont point d'*Asymptotes rectilignes ;* les secondes, celles dont toutes les branches ont des Asymptotes rectilignes ; & les derniéres, celles dont certaines branches infinies, toûjours en nombre pair, n'ont pas d'Asymptotes rectilignes, tandis que les autres branches infinies de la même Courbe, aussi en nombre pair, ont des Asymptotes rectilignes.

REMARQUE.

IV. Je me sers ici du nom d'*Asymptotes rectilignes* pour éviter un équivoque qui pourroit causer quelque obscurité dans la suite, si je ne prenois la précaution d'en avertir. Toutes les Courbes qui s'étendent à l'infini, ont toûjours des Asymptotes, mais ces Asymptotes sont ou des Lignes courbes ou des Lignes droites, & on en trouve la nature & la position, en réduisant l'équation de la Courbe qu'on examine en une ou plusieurs suites d'autant plus convergentes que l'Abscisse est grande ; & cette Méthode, qui est une des plus belles découvertes de ces derniers temps, est d'une très-grande utilité pour découvrir les différentes branches infinies des Courbes d'un genre élevé par le moyen des Courbes d'un genre moins élevé, ou au moins plus simple.

Les Branches infinies, dont les Aſymptotes ſont rectilignes, ſont donc nommées *Branches hyperboliques*, & celles qui ont des Aſymptotes curvilignes, ſont nommées *Branches paraboliques*. Un ſeul exemple éclaircira ceci : La Paraboloïde de M. Deſcartes, qui eſt une Ligne parabolo-hyperbolique du troiſiéme ordre, eſt compoſée, comme tout le monde ſçait, de quatre branches infinies, dont deux ſont hyperboliques, puiſqu'elles ont une Ligne droite pour Aſymptote, les deux autres ſont paraboliques, n'ayant pas d'Aſymptotes rectilignes ; mais ces deux branches paraboliques ont pour Aſymptote une *Parabole conique*, ou Parabole ordinaire, de laquelle elles s'approchent toûjours de plus en plus en allant à l'infini, de même que les branches hyperboliques s'approchent toûjours & à l'infini de la Ligne droite, qui eſt leur Aſymptote.

DÉFINITIONS.

IV.

* Figure 1. V. Si l'on tire une ligne *AP* *, parallele à la tangente *NT* d'une parabole ou d'une hyperbole conique quelconque *MNGm*, dont *GH* (par exemple) ſoit l'axe, la courbe *MNGm*, après s'être approchée de la ligne droite *AP* de *M* en *N*, s'éloigne pendant tout le reſte de ſon cours, qui eſt infini, de la ligne droite *AP*, en allant de *N* en *G* & en *m* : cela eſt démontré. Il n'en eſt pas de même des lignes d'un ordre ſupérieur, il y en a, qui après s'être approchée de la ligne droite *AP* * de *M* en *N*, s'éloignent de cette même droite, en allant de *N* en *O*, & enſuite s'en rapprochent une ſeconde fois, en allant de *O* en *q*, après quoi elles s'éloignent une ſeconde fois, en allant de *q* en *V*, puis s'en rapprochent une troiſiéme fois, & cela à pluſieurs repriſes, ſuivant le degré auquel elles ſont élevées : c'eſt ce que l'on voit arriver ſouvent aux lignes du quatriéme ordre ; ainſi pour exprimer par un ſeul mot ces différents contours, je les nomme des *ſinuoſités*, enſorte que *MNO* eſt une ſinuoſité, *NOq* eſt une ſeconde ſinuoſité, *OqV* une troiſiéme ſinuoſité, & ainſi des

* Fig. 2.

autres : d'où il suit que les points *N, O, q*, seront nommés les sommets des sinuosités, *N* le sommet de la première, *O* le sommet de la seconde, & *q* le sommet de la troisiéme.

V.

VI. Lorsqu'une ligne courbe *ZMN** est en partie concave & en partie convexe vers une même ligne droite *AP*, le point *N* de cette courbe qui sépare la partie concave de la partie convexe est nommé, comme tout le monde sçait, le *point d'inflexion de la courbe.* * Fig. 3.

VI.

VII. Par les définitions donnés du *folium* & du *nœud*, il est évident que si le *folium* d'une courbe devient infiniment petit, le nœud de ce *folium* se change en un point que les Géometres modernes ont nommé *point de rebroussement*. En effet, soit *ZMmDMN** une courbe foliée quelconque, dans laquelle la droite *MD* soit ce que je nomme la mesure du *folium*, & *M* le nœud : il est visible que ce nœud demeurant fixe en *M*, si la droite *MD* diminüe continuellement jusqu'à devenir infiniment petite, il est visible, dis-je, que le *folium* diminüe continuellement jusqu'à devenir infiniment petit, & enfin que tout le *folium* se confond avec le point *M*, & que la courbe *ZMmDMN* prend la figure de la courbe *ZMN* qui a un point de rebroussement en *M**. D'où il suit que tout point de rebroussement peut être considéré comme le nœud d'un *folium* infiniment petit. * Fig. 4. * Fig. 5.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos d'avertir ici de deux choses. 1.° *Que nous nommons* point de rebroussement *ce que M. Newton & les autres Géometres Anglois ont nommé* cuspis : *que ces Geometres appellent* nodus *ce que nous nommons le* folium, *& qu'ils donnent le nom de* decussatio *au point que nous appellons le* nœud. *J'ai crû devoir retenir les dénominations qui étoient en usage parmi les Géometres François avant que M. Newton eût écrit sur cette matiére.*

2.° *Que quoique nous considérions ici le point de rebroussement*

comme le nœud d'un folium infiniment petit, nous ne prétendons pas dire qu'il ne puisse être considéré que de cette façon, car il est bien certain qu'on peut le regarder comme la réünion de deux
* Fig. 6. *points d'infléxion* N *&* M, *dont l'intervalle* NM* *est devenuë infiniment petite. En effet soit la parabole campaniforme de M. Newton* ZNDMX, *dont la nature est exprimée par l'équation* $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$ *(dans laquelle* $DP = x$ *&* $PZ = y$) *il est constant que cette courbe a deux infléxions* N *&* M, *qui se font parallelement à l'ordonnée principale* DL; *si l'on prend sur cette ordonnée principale la portion* $DR = a$ *&, sur l'axe* DP *de part & d'autre du point* D *les portions* DB, Db, *égales l'une & l'autre à* $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, *& que par les points* B *&* b *on mene les droites* BN, bM, *paralleles à* DL, *les points* N *&* M *où ces droites seront rencontrées par une autre droite* RN, *menée parallelement à l'axe par le point* R, *& de part & d'autre de ce point; ces points, dis-je,* N *&* M *seront les deux points d'infléxion de la courbe* ZNDMX; *mais si l'on suppose maintenant* DR (a) $= 0$, *il est visible que cette courbe* ZNDMX
* Fig. 7. *se change en une seconde parabole cubique* ZNX*, *puisque son équation* $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$, *par la supposition de* $a = 0$, *devient* $y^3 = bxx$, *qui est celle qui convient à la courbe qu'on nomme* seconde parabole cubique, *laquelle a un point de rebroussement à son sommet* N.

REMARQUES.

* Fig. 2. VIII. Le rapport entre les abscisses *AC* & les ordonnées *EC* d'une ligne droite quelconque *SEMe*, dont *AP* est l'axe, étant donné en termes analytiques, il est constant 1.° que si cette droite coupe en *m* & en *M* & en tout autre point la courbe *ZMN*, dont *AP* soit l'axe, & dont les ordonnées *MP* soient paralleles aux ordonnées *EC* de la droite *SEMe*, il est constant, dis-je, que le point d'intersection *M* étant commun à la droite & à la courbe, l'abscisse *AB* qui lui correspond est commune à la droite & à la courbe, à cause de l'axe commun *AP*. Il en est de même de tout autre

autre point d'interſection *M* de la droite *SMe* & de la courbe *ZMN*, l'abſciſſe *AP* qui lui correſpond eſt commune à la droite & à la courbe.

2.° Tous les Géometres conviennent que le ſimple point d'attouchement *M** eſt équivalent à deux points d'interſection infiniment près l'un de l'autre; ainſi, la droite *SMe* étant ſuppoſée tangente en *M* de la courbe *ZMN*, il eſt clair que l'abſciſſe *AP* eſt deux fois commune à la drôite *SMe* & à la courbe *ZMN*. * Fig. 3.

3.° Puiſqu'il eſt évident * qu'une tangente *SN* en un point d'infléxion *N* * touche & coupe la courbe *MN* en ce même point *N*, il eſt viſible qu'en abbaiſſant de ce point *N* ſur l'axe *AP* l'ordonnée *NB*, l'abſciſſe *AB* correſpondante au point d'infléxion, doit être trois fois commune à la droite *SNe* & à la courbe *MN*. * Art. 8. * Fig. 8.

4.° Soit ſuppoſée la droite *SNM*, tangente au point d'infléxion *N* d'une courbe *ZMNX**, & en même temps ſécante de cette courbe en un autre point *M*, diſtant du point d'infléxion de la grandeur *NM*; ſi cette diſtance *NM* devient infiniment petite, la droite *SNM* redevient ſimple tangente de la courbe au point *N**, mais ſon attouchement eſt équivalent à quatre points d'interſection, ou à deux points d'attouchement infiniment près l'un de l'autre, & l'infléxion ne paroît plus, quoiqu'elle exiſte réellement dans un eſpace infiniment petit, ce qui pourroit faire donner à ces ſortes de points le nom d'*infléxion inviſible*, ou celui d'*infléxion de la ſeconde eſpece*. * Fig. id. * Fig. 9.

5.° Soit ſuppoſée la droite *SN2Me*, tangente en une infléxion de la ſeconde eſpece *N* d'une courbe *Z2MNX*, & en même temps ſécante de cette courbe en un autre point *2M*, diſtant du point d'infléxion inviſible de la grandeur *2MN*; ſi cette diſtance *2MN* devient infiniment petite, il eſt évident que la droite *SN2M**, de ſimple tangente qu'elle étoit, redevient tangente & ſécante de la courbe *ZNX* en un même point *N*, & par conſéquent qu'en ce point *N* il y a une infléxion inviſible & une infléxion viſible : * Fig. 10.

pour le distinguer des autres points d'infléxions dont on a parlé dans l'article 6, je le nommerai *infléxion de la troisiéme espece.*

* Fig. 10. 6.° Si la droite $SN3M$* est supposée tangente de la courbe ZNX en une infléxion de la troisiéme espece N, & sécante de la même courbe en un autre point $3M$, distant de l'infléxion N de la grandeur $3MN$; il est clair, que cette distance $3MN$ devenant infiniment petite, la droite

* Fig. 11. $SN3M$ redevient simple tangente de la courbe au point N*, mais son attouchement est équivalent à six points d'intersection infiniment près les uns des autres, ensorte qu'en ce point N il y a consécutivement deux infléxions invisibles dans un espace infiniment petit : pour la distinguer de celle du nombre 4 de cet article, je la nomme *infléxion de la quatriéme espece.*

7.° On peut s'assûrer ainsi que les courbes ont des infléxions de la 5me, 6me, 7me & 8me espece, &c. qui sont alternativement visibles & invisibles ; ensorte que toutes les fois qu'un attouchement est équivalent à un nombre d'interfections impair, cet attouchement se fait en une infléxion visible : mais lorsque l'attouchement est équivalent à un nombre d'interfections pair, plus grand que deux, cet attouchement se fait en une infléxion invisible.

COROLLAIRE I.

IX. Il suit des nombres 4, 5 & 6 de l'article précédent, qu'en abbaissant des points d'infléxion N* de la seconde, troisiéme ou quatriéme espece sur l'axe AP des ordonnées comme NB, il suit, dis-je, que l'abscisse AB qui en résulte, est 1.° une abscisse quatre fois commune à la tangente SN & à la courbe $XN2MZ$, si le point N est une infléxion de la seconde espece. 2.° Que cette abscisse AB est cinq fois commune à la droite & à la courbe, si le point N est une infléxion de la troisiéme espece. 3.° Que cette abscisse AB est six fois commune à la droite & à la courbe, si le point N est une infléxion de la quatriéme

* Fig. 9. 10. & 11.

espece, & ainsi des autres infléxions d'especes supérieures.

COROLLAIRE II.

X. Si d'un point simple N*, ou d'un point d'infléxion N** d'espece quelconque, on abbaisse sur l'ordonnée principale AL une droite NE parallele à l'axe AB, qui soit sécante de la courbe en N, il est visible que l'abscisse AE n'est qu'une seule fois commune à la sécante BN & à la courbe $XN2MZ$, & que l'abscisse AB n'est qu'une seule fois commune à la sécante EN & à la courbe $XN2MZ$, soit que le point N soit une infléxion de la premiére, seconde, troisiéme & quatriéme espece, ou d'une espece supérieure. * Fig. 3. ** Fig. 9. 10. & 11.

DÉFINITIONS.

VII.

XI. Lorsqu'une courbe ne passe qu'une seule fois par un point quelconque M du plan sur lequel elle est décrite, ce point, en tant qu'il appartient à la courbe, n'est qu'un *point simple*. Ainsi toutes les infléxions visibles & invisibles, soit qu'elles soient de la premiére, seconde, troisiéme ou quatriéme espece, &c. ne sont jamais que des points simples.

VIII.

XII. Lorsqu'une courbe, soit qu'elle s'étende à l'infini, soit qu'elle rentre en elle-même, passe deux fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M, en tant qu'il appartient à la courbe, est un *point double*. Ainsi, 1.° Tous les simples nœuds, ou points d'intersection de deux branches, sont des points doubles. 2.° Puisque le point de rebroussement* peut être pris pour le *nœud* d'un *folium* infiniment petit, il s'ensuit que le rebroussement d'une courbe est un point double. 3.° Le point conjugué n'étant autre chose qu'une ovale infiniment petite, il s'ensuit que le point conjugué doit être mis au rang des points doubles. * Fig. 4. & 5. * Art. 7.

IX.

XIII. Lorsqu'une courbe passe trois fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M, * Fig. 12. & 13.

en tant qu'il appartient à la courbe, eſt un *point triple.* Ainſi, 1.° tous les nœuds d'une courbe par leſquels il paſſe une troiſiéme branche de la même courbe ſont des points triples. 2.° Le rebrouſſement d'une courbe étant le nœud d'un *folium* infiniment petit*, il eſt évident que le rebrouſſement d'une courbe quelconque devient un point triple, lorſqu'il paſſe par ce point de rebrouſſement une troiſiéme branche de la même courbe. 3.° L'ovale infiniment petite étant un point double, lorſqu'une ovale infiniment petite eſt adhérante à une branche de la courbe, il eſt évident qu'elle doit former un point triple dans l'endroit où elle eſt adhérante à la courbe. Cette derniére eſpece de point triple ſera nommé *point triple inviſible*, parce que l'on ne voit point, lorſque la courbe eſt décrite ſur le plan, ce qui cauſe ſa *triplicité*, l'ovale infiniment petite étant, pour ainſi dire, inviſible.

* *Art. 7.*

X.

XIV. Lorſqu'une courbe paſſe quatre fois par le même point *M** du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M* eſt nommé *point quadruple.* Si elle paſſe cinq fois par le même point *M* du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M*, en tant qu'il appartient à la courbe, eſt nommé *point quintuple*, & ainſi des autres points multiples à l'infini.

* Fig. 16.

X I.

XV. S'il arrive qu'une des branches *DMN**, qui forment en *M* un point double, a une infléxion en ce même point *M*, ce point double eſt nommé *point double de la ſeconde eſpece.* Si les deux branches *DMN*, *DMZ**, qui forment le point double *M*, ont l'une & l'autre une infléxion au point *M*, ce point double eſt nommé *point double de la troiſiéme eſpece;* au lieu que le point double *M**, auquel les branches *DMN*, *DMZ*, n'ont aucune infléxion, eſt nommé *point double de la premiére eſpece.*

* Fig. 14.
* Fig. 15.
* Fig. 4.

X I I.

XVI. Lorſqu'une des trois branches, dont l'interſection forme le point triple, a une infléxion au point *M*, où ſe fait cette interſection, ce point triple eſt nommé *point triple de*

la seconde espece *. Lorsque deux de ces branches ont chacune une inflexion en M, où se fait l'intersection des trois branches ce point triple est nommé *point triple de la troisiéme espece* *. Enfin lorsque les trois branches, dont l'intersection commune forme le point triple, ont les unes & les autres un point d'inflexion en M, où se fait cette intersection, ce point triple est nommé *point triple de la quatriéme espece* *, au lieu que le point triple M *, auquel les branches DMN, DMm, ZMV, n'ont aucune inflexion, est nommé *point triple de la premiére espece.* * Fig. 17. * Fig. 18. * Fig. 19. * Fig. 12.

SCHOLIE.

XVII. Il est aisé de conclurre des définitions précédentes, 1.° Que, parmi les points quadruples, il y a cinq especes d'intersections. *La premiére espece* est lorsque les quatre branches, qui se coupent en M, n'ont aucune inflexion en ce même point M. *La seconde espece* est celle où une seule des quatre branches a une inflexion au point M où se fait l'intersection. *La troisiéme espece* est celle où deux des quatre branches ont chacune une inflexion au point même de l'intersection. *La quatriéme espece* est celle où trois branches ont chacune une inflexion précisément au point où se fait l'intersection. Enfin les points quadruples *de la cinquiéme espece* sont ceux où les quatre branches, qui se coupent en M, ont les unes & les autres des inflexions en ce même point M.

2.° On peut connoître aussi facilement ce que c'est qu'un point quintuple, & voir en même temps qu'il y a *six especes* d'intersections parmi les points quintuples, les unes sans inflexion, les autres avec une seule inflexion, les *troisiémes* avec deux inflexions, les *quatriémes* avec trois inflexions, les *cinquiémes* avec quatre inflexions, & les *sixiémes* avec cinq inflexions.

COROLLAIRE I.

XVIII. Il suit des définitions données des points doubles, triples, quadruples, & des autres points multiples, qu'après avoir mené par un point multiple quelconque M deux secantes Fig. 4. & 5.

12. 13. 14. *MB, ME,* faiſant entr'elles un angle quelconque *BME*;
15. 16. 17. & prolongées juſqu'à ce qu'elles rencontrent en *B* & en *E*
18. & 19. des droites, comme *AP* & *AL*, priſes la premiére pour l'axe, & la ſeconde pour l'ordonnée principale de la courbe à laquelle le point multiple *M* appartient ; il ſuit, dis-je, des définitions précédentes, 1.° Que l'abſciſſe *AB* eſt deux fois commune à la ſecante *EM* & à la courbe *ZMDMN*, & l'abſciſſe *AE* auſſi deux fois commune à la ſecante *BM* & à la même courbe *ZMDMN*, ſi le point *M* eſt un point double. 2.° Que *AB* eſt une abſciſſe trois fois commune à la ſecante *EM* & à la courbe *NMDMmZMV*, & *AE* une abſciſſe trois fois commune à la ſecante *BM* & à la même courbe *NMDMmZMV*, ſi le point multiple *M* eſt un point triple. 3.° Que *AB* eſt une abſciſſe quatre fois commune à la ſecante *EM* & à la courbe *VMDMNZM3VZM2V*, & *AE* une abſciſſe quatre fois commune à la ſécante *BM* & à la même courbe *VMDMNZM3VZM2V*, ſi le point multiple *M* eſt un point quadruple, & ainſi des autres points multiples ſupérieurs.

COROLLAIRE II.

XIX. Toutes choſes demeurant les mêmes comme dans l'article précédent, ſi par un point multiple quelconque *M*, on mene une tangente *MT*, il eſt viſible, 1.° Que l'abſciſſe *AB* ſera trois fois commune à la tangente *TM* & à la courbe *ZMDMN*, ſi le point *M* eſt un point double de la pre-
* Fig. 4. miére eſpece*, ou un point double accompagné de rebrouſſe-
* Fig. 5. ment*. 2.° Que *AB* eſt une abſciſſe quatre fois commune à la tangente *TM* & à la courbe, ſi le point multiple *M*
* Fig. 12. eſt un point triple de la premiére eſpece*, ou un point triple
* Fig. 13. accompagné de rebrouſſement*, ou un point triple inviſi-
* Fig. 40. ble*, ou un point double de la ſeconde ou troiſiéme eſ-
* Fig. 14. & 15. pece*. 3.° Que *AB* eſt une abſciſſe cinq fois commune à la tangente *TM* & à la courbe**, ſi le point multiple *M* eſt
** Fig. 16. un point quadruple de la premiére eſpece, ou un point quadruple accompagné de rebrouſſement, ou un point triple de la

ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece *, & ainſi des autres points multiples d'un ordre ſupérieur. * Fig. 17. 18. & 19.

COROLLAIRE III.

XX. Il n'eſt pas moins évident, 1.° Qu'en un point double *M*, formé par l'interſection de deux branches finies ou infinies d'une même courbe *, il doit y avoir deux tangentes *MT, Mt,* faiſant entr'elles un angle quelconque *TMt*. 2.° Qu'en un point double formé par le rebrouſſement *M* d'une courbe *ZMN* *, il ne ſçauroit y avoir qu'une ſeule tangente *MT*. En effet ſi la droite *TM* eſt tangente en *M* de la branche *ZM*, elle doit être tangente en ce même point *M* de la branche *NM*, quand *M* eſt un point de rebrouſſement : car les deux derniers éléments ou côtés infiniment petits des branches *ZM, NM,* ſont exactement poſés l'un ſur l'autre au point de rebrouſſement, ainſi que M. de Fontenelle l'a démontré, art. 835, 836 & ſuivants, *des Eléments de la Géométrie de l'Infini.* D'où il ſuit que la tangente de l'extrémité de la branche *ZM* ſe confond avec la tangente de l'extrémité de la branche *NM*, & par conſéquent qu'en un point double *M*, formé par le rebrouſſement d'une courbe *ZMN*, il ne ſçauroit y avoir qu'une ſeule tangente *TM*. 3.° Il ſuit encore des définitions & des corollaires précédents, qu'en un point double * formé par une ovale infiniment petite, il ne ſçauroit y avoir de tangente : car les tangentes n'étant que des prolongements de côtés infiniment petits du premier ordre d'une branche de courbe quelconque, ſi par le point double *M* d'une courbe *ZNCnZ* il ne paſſe aucune branche finie ou infinie de cette courbe *ZNCnZ*, mais ſeulement une ovale infiniment petite, il eſt clair qu'il ne ſçauroit y avoir en ce point *M* de prolongement d'un côté infiniment petit du premier ordre d'une branche quelconque finie ou infinie, & par conſéquent que l'expreſſion générale des ſoûtangentes de la courbe *ZNCnZ* ne doit fournir que des valeurs imaginaires au point double *M*, quand ce point double eſt une ovale infiniment petite.

* Fig. 4.
* Fig. 5.
* Fig. 20.

REMARQUES.

XXI. De-là naît la différence qui eſt entre les points doubles qui ſont formés par l'interſection de deux branches d'une même courbe *ZMDMN*, ceux qui ſont formés par le rebrouſſement *M* d'une courbe *ZMN*, & ceux qui ſont formés par une ovale infiniment petite, ou point conjugué
* Fig. 4. *M* d'une courbe *ZNCnZ*; les points d'interſection * ont toûjours deux tangentes *TM*, *tM*, faiſant entr'elles un angle
* Fig. 5. fini *TMt*: les points de rebrouſſement * n'en ont qu'une, &
* Fig. 20. les ovales infiniment petites * ou points conjugués *M* n'en
* *Art. préced.* ont que d'imaginaires *.

On peut voir encore la différence qui eſt entre les points doubles d'interſection de la premiére, ſeconde & troiſiéme
* Fig. 4. eſpece. Ceux de la premiére eſpece * ſont tels que l'abſciſſe *AB* n'eſt que trois fois commune à la courbe *ZMDMN* & à la tangente *TM*, auſſi-bien qu'à cette courbe & à la
* *Art. 19. n. 1.* tangente *tM**. Ceux de la ſeconde eſpece ** ſont tels que
** Fig. 14. l'abſciſſe *AB* n'étant que trois fois commune à la courbe & à une des tangente comme *tM*, cette même abſciſſe eſt quatre fois commune à la même courbe & à l'autre tangente comme
* *Art. id. n. 2.* *TM**. Les points d'interſection de la troiſiéme eſpece ** ſont
** Fig. 15. tels que l'abſciſſe *AB* eſt quatre fois commune à la courbe
* *Art. id. n. 2.* & aux deux tangentes *TM* & *tM**.

COROLLAIRE IV.

* Fig. 12. XXII. Il eſt viſible, 1.° Qu'en un point triple *M**, formé par l'interſection des trois branches de la courbe *NMDMmZMV*, il doit y avoir trois tangentes *TM*, *tM*, θM.
* Fig. 13. 2.° Qu'en un point triple *M* d'une courbe *NMmZMV**, où il y a un point de rebrouſſement, il ne ſçauroit y avoir que deux tangentes *TM*, *tM*, puiſque les tangentes au point *M* des branches *NM*, *mM*, ſe confondent en une. 3.° Qu'en un point triple *M*, formé par l'adhéſion d'une
* Fig. 40. ovale infiniment petite ſur une branche *ZMA** d'une courbe *VNAMZ*, il ne ſçauroit y avoir qu'une ſeule tangente *TM*, les

les deux autres devenant imaginaires à cause de l'ovale infiniment petite.

REMARQUES.

XXIII. De-là naît la différence qui est entre un point triple formé par l'interfection de trois branches, le point triple accompagné de rebroussement, & le point triple formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite.

On voit aussi la différence qui est entre les points triples de la premiére, seconde, troisiéme & quatriéme espece. Dans les points triples de la premiére espece*, l'abscisse *AB* est quatre fois commune à la courbe *NMDMmZMV*, & à chacune des tangentes *TM*, *tM*, *θM*, prises séparément*. * Fig. 12. * Art. 19. n. 2.

Dans les points triples de la seconde espece*, l'abscisse *AB* est cinq fois commune à la courbe *NMDMmZMV**, & à une des trois tangentes comme *TM*, à cause du point d'infléxion *M* de la branche *DMN*, tandis que cette même abscisse *AB* n'est que quatre fois commune à la courbe *DMNMmZMV*, & aux deux autres tangentes *tM*, *θM*, prises séparément. * Fig. 17. * Art. id. n. 3.

Dans les points triples de la troisiéme espece*, l'abscisse *AB* est cinq fois commune à la courbe *NMDMmZMV*, & à deux des tangentes au point *M* comme *TM* & *tM*, à cause du point d'infléxion *M* de la branche *DMN*, & du point d'infléxion *M* de la branche *DMm*, tandis que cette même abscisse *AB* n'est que quatre fois commune à la courbe *NMDMmZMV*, & à la troisiéme tangente *θM**. * Fig. 18. * Art. id. n. id.

Dans les points triples de la quatriéme espece*, l'abscisse *AB* est cinq fois commune à la courbe *NMDMmZMV* & aux trois tangentes *TM*, *tM*, *θM*, puisque chaque branche qui passe par le point triple *M*, a une infléxion en ce même point *M**. * Fig. 19. * Art. id. n. id.

AVERTISSEMENT.

De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une Théorie générale pour les autres points multiples, tels que sont les

points quadruples, quintuples, sextuples, &c. Mais comme les lignes du quatriéme ordre dont j'ai à traiter ici, ne sçauroient avoir ni points triples de la seconde, troisiéme & quatriéme espece, ni points quadruples, ni points quintuples ; en un mot, comme les lignes du quatriéme ordre ne peuvent avoir que des points simples, ou des points doubles de la premiére, seconde & troisiéme espece, ou au plus un seul point triple de la premiere espece, je m'abstiens de pousser cette recherche plus loin, persuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a personne qui ne puisse déduire toutes les conséquences qui suivent des principes que l'on vient d'établir ; il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire, pour en faire un détail exact.

DÉFINITIONS.

XIII.

XXIV. Si n est un nombre entier & positif, & qu'on éleve une quantité variable & inconnuë t d'abord à l'exposant n, ensuite à l'exposant $n-1$, puis à l'exposant $n-2$, & ainsi de suite jusqu'à l'exposant 0; si l'on unit ces différentes puissances de l'inconnuë t les unes aux autres par les signes $+$ ou $-$, en donnant à chaque terme un coëfficient constant, mais indéterminé, on formera ce que je nomme *grandeurs completes du degré* n. Par exemple, n étant $=2$, si l'on éleve la variable t d'abord à l'exposant 2, puis à l'exposant 1, ensuite à l'exposant 0, & qu'on unisse ces trois puissances t^2, t^1, t^0; par les signes $+$ ou $-$, en multipliant le premier terme par le coëfficient constant β, le second par le coëfficient constant γ, le troisiéme par le coëfficient constant δ, pour avoir $\beta t^2 \pm \gamma t \pm \delta$, cette formule sera une grandeur complete du second degré; de même la formule $\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu$ est une grandeur complete du troisiéme degré, & celle-ci $\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma$ est une grandeur complete du quatriéme degré, & ainsi de suite, ensorte que $At^n + Bt^{n-1} + Ct^{n-2} + Dt^{n-3} + Et^{n-4}$ $+$ &c. est une grandeur complete du degré n: par la même raison $qt + a$ est une grandeur complete du premier

degré, & $t^0 = 1$ est en ce sens une grandeur complete du degré o.

XIV.

XXV. Lorsqu'il manque quelques termes dans les formules précédentes, je les nomme *grandeurs incompletes de tel ou tel degré*, quand l'occasion se présente d'en parler; ainsi la formule $\epsilon t^3 + \mu$ & la formule $\epsilon t^3 + \eta t^2 + \mu$ sont des grandeurs incompletes du troisiéme degré, parce qu'il manque à la premiére les termes ηt^2 & λt, & à la seconde le terme λt.

LEMME I.

XXVI. *Les deux suites marquées ici par* (A) *& par* (B), *dont la premiére est celle des grandeurs completes de la variable* t, *qui sont depuis* o *jusqu'à* n, *& la seconde celle des puissances descendentes depuis* n *jusqu'à* o, *d'une autre variable* s; *les deux suites, dis-je,* (A) *&* (B) *étant arrangées en ordre, comme on les voit ici,*

$$\text{(A)}\ldots\ 1,\ \overline{qt+\alpha},\ \overline{\beta t^2+\gamma t+\delta},\ \overline{\epsilon t^3+\eta t^2+\lambda t+\mu},$$
$$\text{(B)}\ldots\ s^n,\ s^{n-1},\ s^{n-2},\ s^{n-3},$$
$$\overline{\nu t^4+\rho t^3+\pi t^2+\phi t+\sigma},\ \&c.$$
$$s^{n-4},\ \&c.$$

Si l'on multiplie le premier terme de la suite (A) *par le premier terme de la suite* (B), *le second terme de la suite* (A) *par le second terme de la suite* (B), *le troisiéme terme de la suite* (A) *par le troisiéme terme de la suite* (B), *& ainsi des autres jusqu'à ce que tous les termes soient épuisés, & qu'on unisse tous les produits par les signes* $+$ *ou* $-$, *en faisant la somme totale égale à zero: on aura l'Equation indéterminée marquée ici par* (D)

$$\text{(D)}\ldots\ s^n + \overline{qt+\alpha}\times s^{n-1} + \overline{\beta t^2+\gamma t+\delta}\times s^{n-2} + \overline{\epsilon t^3+\eta t^2+\lambda t+\mu}\times s^{n-3} + \overline{\nu t^4+\rho t^3+\pi t^2+\phi t+\sigma}\times s^{n-4} + \&c. = 0,$$

dans laquelle il n'y a que deux variables s *&* t, *& dont les termes comprennent tous les produits, qui n'excédent pas le* n^e

degré, des puissances descendantes de la variable s *& des puissances réciproquement ascendantes de la variable* t, *qui sont depuis* n *jusqu'à zero, ces produits multipliés par les coëfficients constants* 1, q, α, β, γ, δ, ϵ, *&c.*

Ce que je nomme *puissances descendantes de la variable* s, sont les puissances que l'on voit ici en *(R)*, & ce que je nomme *puissances réciproquement ascendantes de la variable* t, sont celles que l'on voit ici en *(P)*

$$(R)\ldots\ s^n,\ s^{n-1},\ s^{n-2},\ s^{n-3},\ s^{n-4},\ s^{n-5},\ \&c.$$

$$(P)\ldots\ t^0,\ t^1,\ t^2,\ t^3,\ t^4,\ t^5,\ \&c.$$

Les produits de toutes ces puissances descendantes, depuis *n* jusqu'à o, & réciproquement ascendantes, sont compris dans le Quarré algébrique que l'on voit ici en *(N)*, dont le premier rang horizontal contient tous les produits de *R* par t^0; le

$$N\ldots\left\{\begin{array}{llllll} t^0s^n, & t^0s^{n-1}, & t^0s^{n-2}, & t^0s^{n-3}, & t^0s^{n-4}, & \&c. \\ t^1s^n, & t^1s^{n-1}, & t^1s^{n-2}, & t^1s^{n-3}, & t^1s^{n-4}, & \&c. \\ t^2s^n, & t^2s^{n-1}, & t^2s^{n-2}, & t^2s^{n-3}, & t^2s^{n-4}, & \&c. \\ t^3s^n, & t^3s^{n-1}, & t^3s^{n-2}, & t^3s^{n-3}, & t^3s^{n-4}, & \&c. \\ t^4s^n, & t^4s^{n-1}, & t^4s^{n-2}, & t^4s^{n-3}, & t^4s^{n-4}, & \&c. \\ \&c. & \&c. & \&c. & \&c. & \&c. & \end{array}\right.$$

$$M\ldots\left\{\begin{array}{rrrrrr} t^0s^n, & t^0s^{n-1}, & t^0s^{n-2}, & t^0s^{n-3}, & t^0s^{n-4}, & \&c. \\ & t^1s^{n-1}, & t^1s^{n-2}, & t^1s^{n-3}, & t^1s^{n-4}, & \&c. \\ & & t^2s^{n-2}, & t^2s^{n-3}, & t^2s^{n-4}, & \&c. \\ & & & t^3s^{n-3}, & t^3s^{n-4}, & \&c. \\ & & & & t^4s^{n-4}, & \&c. \\ & & & & & \&c. \end{array}\right.$$

second rang horizontal, tous les produits de *R* par t^1; le troisiéme rang horizontal, tous les produits de *R* par t^2, & ainsi de suite. Or si l'on retranche de ce quarré, tous les produits qui sont au dessus de la puissance *n*, il est visible que ce seront, 1° le premier terme du second rang horizontal, 2° les deux premiers termes du troisiéme rang horizontal, 3° les trois premiers termes du quatriéme rang, 4° les quatre premiers termes du cinquiéme rang, & ainsi de suite de rang en rang qui seront retranchés, ensorte que le quarré algébrique *N* se trouvera réduit au triangle marqué par *(M)*; d'où il suit que ce triangle contiendra tous les produits des puissances descendantes de *s* par les puissances réciproquement ascendantes de *t*, qui n'excédent pas le n^e degré.

Mais il est évident que tous les produits qui composent le triangle algébrique *(M)*, se trouvent dans l'équation *(D)*

formée par la multiplication des termes des ſuites *A* & *B* qui ſe correſpondent ſuivant l'expoſé de ce Lemme.

$$(D)\ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

Car 1.° Le produit, qui compoſe la premiére colomne perpendiculaire du triangle *M*, ſe trouve compoſer le premier terme de l'équation *(D)*; 2.° Tous les produits de la ſeconde colomne perpendiculaire du triangle *M*, ſont dans le ſecond terme de l'équation *(D)*; 3.° Tous les produits de la troiſiéme colomne de *M*, ſont dans le troiſiéme terme de la même équation *(D)*; 4.° Tous les produits de la quatriéme colomne ſont dans ſon quatriéme terme, & ainſi de ſuite. Donc tous les produits des puiſſances deſcendantes de s, par les puiſſances aſcendantes de t, qui n'excedent pas le n^e degré, ſe trouvent dans l'équation *(D)* multipliés ſucceſſivement par les coëfficients conſtants $1, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda$, &c. *Ce qu'il falloit prouver.*

COROLLAIRE.

XXVII. Il ſuit de-là que l'équation marquée *(D)* eſt toûjours du n^e degré, & ne ſçauroit être d'un degré ſupérieur ou inférieur ; car 1° les produits des variables s & t, dont elle eſt compoſée, ne ſçauroient excéder le n^e degré (par l'article précédent), donc elle ne peut être d'un degré ſupérieur à n; 2° parmi les produits des mêmes variables s & t, il y en aura toûjours pluſieurs qui ſeront du degré n; donc elle ne ſçauroit être d'un degré inférieur à n, donc elle eſt toûjours de n^e degré. *C. Q. F. P.*

LEMME II.

XXVIII. *Si les coëfficients* q, α, β, γ, δ, ε, η, &c. *de l'équation marquée par* (D) *dans les deux articles précédents, portent avec eux leurs ſignes* + *ou* —, *& ſi on les regarde, quoique conſtants, comme des coëfficients indéterminés, c'eſt-à-dire,*

indifférents à être de telle ou telle grandeur constante; je dis que cette équation (D) *est de toutes les équations du* n^e *degré, qui n'enveloppent que deux inconnuës, celle qui est la plus générale.*

Toutes les équations imaginables du n^e degré, dans lesquelles il n'y a que deux variables, peuvent se rapporter à l'équation *(D)*, si l'on peut comparer tous les termes de ces équations particuliéres un à un, avec ceux de l'équation *(D)* qui leur correspondent : or cette comparaison de terme à terme, si usitée depuis M. Descartes, qui est le premier qui l'ait mise en pratique, sera toûjours possible entre toutes les équations imaginables du n^e degré, & celle que l'on a marquée *(D)* dans les articles précédents; car, 1.° Tous les produits possibles des puissances descendantes depuis n jusqu'à o, de la variable s & des puissances ascendantes, depuis o jusqu'à n de la variable t (à l'exception néantmoins de ceux qui sont d'un degré plus élevé que la grandeur n) se rencontrent dans l'équation *(D)*; cela est évident par l'article 26. Or les termes dont les équations particuliéres du degré n sont composées, ne peuvent être, quant à leurs variables, que des produits des puissances descendantes d'une variable comme s & des puissances ascendantes d'une autre variable comme t, qui n'excédent point le n^e degré. Donc tous les termes, de ces équations particuliéres du n^e degré, auront leurs semblables dans l'équation *(D)*, quant à leurs grandeurs variables. Donc, par rapport à ces variables, ils pourront être comparés avec les termes de l'équation *(D)*. 2.° Il en sera de même par rapport aux grandeurs constantes qui multiplieront les termes des équations particuliéres; car tous les coëfficients $q, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$, &c. de l'équation *(D)* étant indifférents à recevoir les signes $+$ ou $-$, & en même temps indéterminés à être de telle ou telle grandeur, peuvent être comparés un à un avec les coëfficients déterminés des équations particuliéres. Donc tous les termes des équations particuliéres du degré n peuvent être comparées, soit par rapport à leurs quantités variables, soit par rapport à leurs quantités constantes, avec les termes de l'équation *(D)*, suivant

la méthode de comparaiſon ſi uſitée dans l'analyſe. Donc toutes les équations particuliéres du degré n, dans leſquelles il n'y a que deux inconnuës, peuvent ſe rapporter à l'équation *(D)*. Donc cette équation eſt de toutes les équations du n^e degré, qui ne renferment que deux variables, celle qui eſt la plus générale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXIX. Donc, 1.° l'équation marquée ici par *(1D)* eſt de toutes les équations indéterminées du premier degré, qui ne renferment que deux inconnuës, celle qui eſt la plus générale, & à laquelle toutes les autres peuvent ſe rapporter.

$$(1D)\ldots s^1 + \overline{qt + \alpha} \times s^0 = 0.$$

2.° L'équation marquée *(2D)* eſt de toutes les équations du ſecond degré, qui n'ont que deux variables, celle qui eſt la plus generale.

$$(2D)\ldots s^2 + \overline{qt + \alpha} \times s^1 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^0 = 0.$$

3.° L'équation marquée *(3D)* eſt de toutes les équations du troiſiéme degré, qui ne renferment que deux variables ou inconnuës, celle qui eſt la plus générale.

$$(3D)\ldots s^3 + \overline{qt + \alpha} \times s^2 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^1 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^0 = 0.$$

4.° L'équation marquée ici par *(4D)* eſt de toutes les équations indéterminées du quatriéme degré, qui n'ont que deux inconnuës variables, celle qui eſt la plus générale.

$$(4D)\ldots s^4 + \overline{qt + \alpha} \times s^3 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^2 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^1 + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^0 = 0.$$

5.° L'équation marquée *(5D)* eſt de toutes les équations indéterminées du cinquiéme degré, celle qui eſt la plus générale.

$$(5D)\ldots s^5 + \overline{qt + \alpha} \times s^4 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^3 +$$

$$\overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^2 + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^1 + \overline{At^5 + Bt^4 + Ct^3 + Dt^2 + Et + F} \times s^0 = 0.$$

Tout cela est une suite nécessaire du Lemme précédent, & de l'article 26, lesquels donneront pareillement les Equations générales pour les 6e, 7e, 8e & 9e degrés, & enfin pour tel degré qu'on voudra.

COROLLAIRE II.

XXX. Il suit encore du Lemme précedent que l'équation marquée *(D)* exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^e ordre.

$$(D)\ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

Car il n'y a point de ligne particuliére du n^e ordre, dont la nature ne puisse être exprimée par une équation du n^e degré: or il n'y a point d'équation du n^e degré qui ne puisse se rapporter à l'équation *(D)**. Donc il n'y a point de ligne particuliére du n^e ordre, dont la nature ne puisse se rapporter à l'équation *(D)*; donc cette équation exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^e degré.

* *Art.* 28.

COROLLAIRE III.

XXXI. Donc l'équation marquée *(4 D)* exprime la nature de toutes les lignes algébriques du quatriéme ordre.

$$(4D)\ldots s^4 + \overline{qt + \alpha} \times s^3 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^2 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} = 0.$$

C'est une suite nécessaire du Lemme second & du corollaire précédent*; & il est inutile d'ajoûter qu'on aura de même les Equations générales pour les Lignes du 5me, 6me, 7me & 8me ordre, & enfin pour tel ordre qu'on voudra, d'autant que cela se déduit trop clairement des art. 28 & 29.

* *Art.* 30.

REMARQUE.

REMARQUE.

XXXII. Il eſt aiſé de s'appercevoir, 1.° Que le nombre des termes des Equations générales marquées par *(1 D)*, *(2D)*, *(3D)*, *(4D)*, *(5D)*, &c. de l'article 29, ſuit la progreſſion marquée ici par *(MM)*

$(MM) \ldots\ \overline{1+2},\ \overline{1+2+3},\ \overline{1+2+3+4},$
$\overline{1+2+3+4+5},\ \overline{1+2+3+4+5+6},$
$\overline{1+2+3+4+5+6+7}$, &c.

Enſorte que la premiére équation *(1 D)*, qui eſt pour les lignes du premier ordre, eſt compoſée de trois termes ; la ſeconde *(2D)*, qui eſt pour les lignes du ſecond ordre, eſt compoſée de ſix termes ; la troiſiéme *(3D)*, qui eſt pour les lignes du troiſiéme ordre, eſt compoſée de dix termes ; la quatriéme *(4D)* eſt compoſée de quinze termes, & ainſi des autres à l'infini. 2.° Que la progreſſion *(MM)* eſt la ſuite des nombres triangulaires, en commençant par le ſecond. D'où il ſuit que n étant pris pour le nombre qui exprime le degré d'une Equation générale quelconque, le nombre triangulaire, qui correſpond dans le Triangle arithmétique de M. Paſcal au nombre naturel $n+2$, donne toûjours le nombre des termes qui doit être dans l'Equation générale d'une ligne du n^e ordre lorſqu'elle eſt complete. Or on ſçait que le nombre triangulaire, qui correſpond au nombre naturel $n+2$, eſt égal à $\frac{\overline{n+2}.\overline{n+1}}{2}$; donc cette quantité $\frac{\overline{n+2}.\overline{n+1}}{2}$ exprime toûjours le nombre des termes de l'Equation générale des lignes du n^e ordre, lorſqu'elle eſt complete. 3.° Il eſt aiſé de voir que le nombre des coëfficients q, α, β, γ, δ, ε, &c. dans chaque Equation générale, eſt égal au nombre des termes de l'équation moins un (puiſque nous n'en avons point donné juſqu'ici au premier terme) ; d'où il ſuit que le nombre des coëfficients de l'Equation générale des lignes du n^e ordre eſt $\frac{\overline{n+2}.\overline{n+1}}{2} - 1 = \frac{nn+3n}{2}$. *Ce que*

M. Stirling a remarqué avant nous, page 4 de ſon Traité, imprimé à Oxfort en 1717.

PROPOSITION I.

THEOREME.

XXXIII. *Une ligne du* n^{e} *ordre peut être rencontrée par une ligne droite en autant de points qu'il y a d'unités dans* n, *& ne le ſçauroit être, par la même droite, en un plus grand nombre.*

DÉMONSTRATION.

* Fig. 21. Soit ſur un plan une ligne $ZMMNX2mV$* de l'ordre n, dont l'axe ſoit GQ, & une ligne droite GM qui coupe la ligne ZMm en un point comme M: je dis que cette droite peut couper la ligne ZMm en autant d'autres points $2M$, $3M$, $4M$, $5M$, &c. qu'il y a d'unités dans $n - 1$, c'eſt-à-dire, en autant de points qu'il y a d'unités dans n, en y comprenant le point M.

Car ayant pris ſur GQ la partie $GI =$ à l'unité arbitraire, & après avoir mené du point I la droite IK, faiſant avec l'axe GQ un angle quelconque KIG; l'angle KGI étant connu par la ſuppoſition, on voit qu'il y a dans le triangle IKG deux angles & un côté GI qui ſont connus; donc les deux autres côtés IK & KG ſeront connus. Donc après avoir pris $GI = 1$, on peut encore prendre $IK = h$, quantité connüe & déterminée. Donc le rapport des ordonnées de la droite GM aux abſciſſes GQ (en nommant y ces ordonnées) ſera $y = ht$.

Mais la courbe ZMm étant du n^{e} ordre, le rapport de ſes ordonnées MQ (s) aux abſciſſes GQ (z) de ſon axe eſt

* Art. 27. & 28. exprimé par l'équation (D)*

$$(D) \ldots s^{n} + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^{2} + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^{3} + \eta t^{2} + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^{4} + \rho t^{3} + \pi t^{2} + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0$$

dans laquelle les coëfficients q, α, β, γ, δ, ε, &c. ſont des

grandeurs constantes, mais indéterminées à être de telle ou telle valeur, & à être affectées de tel ou tel signe.

Or toutes les fois que la droite GM rencontrera la courbe ZMm, les ordonnées (y) de cette droite QM deviendront égales aux ordonnées QM de la courbe ZMm, par conséquent on aura $QM(s) = y = ht$; & en substituant dans l'équation (D) au lieu de (s) cette valeur ht (pour avoir la valeur des abscisses GQ (t) dans les endroits où la droite GM rencontre la courbe ZMm), on aura l'égalité marquée ici par (K), dont les racines donneront les valeurs des abscisses GQ aux points où la droite GM & la courbe ZMm se rencontrent.

$$(K)\ldots \left\{\begin{matrix} +h^{n} \\ +qh^{n-1} \\ +\beta h^{n-2} \\ +\epsilon h^{n-3} \\ +\nu h^{n-4} \\ +\&c. \end{matrix}\right\} t^{n} \begin{matrix} +\alpha h^{n-1} \\ +\gamma h^{n-2} \\ +\eta h^{n-3} \\ +\rho h^{n-4} \\ +\&c. \end{matrix}\Bigg\} t^{n-1} \begin{matrix} +\delta h^{n-2} \\ +\lambda h^{n-3} \\ +\pi h^{n-4} \\ +\&c. \end{matrix}\Bigg\} t^{n-2} \begin{matrix} +\mu h^{n-3} \\ +\varphi h^{n-4} \\ +\&c. \end{matrix}\Big\} t^{n-3} \begin{matrix} +\sigma h^{n-4} \\ +\&c. \end{matrix}\Big\} t^{n-4} + \&c. = 0.$$

Or il est visible qu'il peut y avoir dans cette égalité autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans l'exposant n du premier terme, sans qu'il puisse y en avoir un plus grand nombre; donc il peut y avoir autant d'abscisses GQ, $G2Q$, $G3Q$, $G4Q$, &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMm, qu'il y a d'unités dans n, & il ne sçauroit y en avoir davantage. Donc la ligne droite GM peut couper la courbe ZMm du n^{e} ordre en autant de points qu'il y a d'unités dans n, & ne sçauroit la couper en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXXIV. Donc, 1.° les lignes du second ordre, c'est-à-dire, les sections coniques peuvent être rencontrées en deux points par une même ligne droite, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre, ce que l'on sçait d'ailleurs être vrai.

2.° Les lignes du troisiéme ordre peuvent être rencontrées

en trois points par une même ligne droite, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.

3.° Les lignes du quatriéme ordre peuvent être rencontrées en quatre points par une même ligne droite, & ne ſçauroient l'être en un plus grand nombre.

4.° Celles du cinquiéme ordre peuvent être rencontrées en cinq points par une même ligne droite, celle du ſixiéme ordre en ſix points, celles du ſeptiéme en ſept points, & ainſi des autres à l'infini.

COROLLAIRE II.

* Fig. 22.

XXXV. Si par un point *M* ſimple*, double, triple, quadruple, &c. d'une ligne quelconque *ZMN*, on a mené une droite *MG* tangente de la courbe en ce point *M*, laquelle étant prolongée ait été rencontrée en *G* ſous un angle connu *MGQ* par une autre droite *GQ*, ſur laquelle on ait abbaiſſé de tous les points *M*, *N*, *Z*, de la courbe *ZMN*, des droites paralleles entr'elles comme *MQ*, *NQ*, &c. faiſant avec *GQ* des angles connus *MGQ*. Il eſt viſible,

1.° Qu'en nommant les abſciſſes *GQ* (*t*) & les ordonnées *QM* ou *QN* (*s*), le rapport des abſciſſes aux ordonnées ſera exprimé en général par l'équation (*D*)*; ſuppoſé que la courbe ſoit une ligne algébrique du n^e ordre.

* *Art. 30.*

$$(D)\ldots s^n + \overline{qt+\alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2+\gamma t+\delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3+\eta t^2+\lambda t+\mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4+\rho t^3+\pi t^2+\phi t+\sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

2.° Il n'eſt pas moins évident que *GI* étant priſe pour l'unité arbitraire, & *IK* ligne droite connuë (puiſque dans le triangle *IGK* il y a deux angles *IGK*, *KGI*, & un côté *IG* qui ſont donnés) *IK*, dis-je, étant nommée *h*, l'égalité marquée par (*K*) donnera les valeurs des abſciſſes *GQ*, *G2Q*, &c. communes à la droite *GM* & à la courbe *ZMN*, aux points où cette droite rencontre la courbe.

$$(K)\ldots\left\{\begin{array}{l}+h^n\\+q\,h^{n-1}\\+\beta\,h^{n-2}\\+\varepsilon\,h^{n-2}\\+\nu\,h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\right\}t^n\begin{array}{l}+a\,h^{n-1}\\+\gamma\,h^{n-2}\\+\eta\,h^{n-3}\\+\rho\,h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\Bigg\}t^{n-1}\begin{array}{l}+\delta\,h^{n-2}\\+\lambda\,h^{n-3}\\+\pi\,h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\Bigg\}t^{n-2}\begin{array}{l}+\mu\,h^{n-3}\\+\varphi\,h^{n-4}\\+\&c.\end{array}\Big\}t^{n-4}+\&c.=0.$$

3.° Il eſt certain auſſi * qu'il y aura dans cette égalité au moins deux racines égales, puiſqu'on a ſuppoſé la droite *GM* tangente en *M* de la courbe *ZMN*: ſi le point touchant *M* de la courbe eſt une infléxion de la ſeconde eſpece, il y aura, dans l'égalité *(K)* quatre racines égales entre elles *; ſi au point touchant *M* il y a une infléxion de la quatriéme eſpece, l'égalité *(K)* aura ſix racines égales: & ainſi des autres points d'infléxion inviſibles à l'infini.

* *Art. 8. n. 2.*

* *Art. id. n. 4.*

4.° Si le point touchant *M* eſt une infléxion ordinaire, il y aura *, dans l'égalité marquée par *(K)*, trois racines égales: ſi le point d'infléxion eſt de la troiſiéme eſpece, il y aura cinq racines égales dans l'égalité *(K)*; ſi ce point d'infléxion eſt de la cinquiéme eſpece, il y aura dans l'égalité *(K)* ſept racines égales, & ainſi des autres points d'infléxion viſibles d'eſpeces ſupérieures.

* *Art. id. n. 3.*

5.° Si le point touchant *M* eſt un point double de la premiére eſpece, il y aura * dans l'égalité marquée par *(K)* trois racines égales & de même ſigne: ſi la branche touchée par la droite *GM* eſt accompagnée d'une infléxion de la ſeconde eſpece au point double *M*, il y aura dans l'égalité *(K)* cinq racines égales & de même ſigne: ſi l'infléxion eſt de la quatriéme eſpece, il y aura ſept racines égales & de même ſigne, & ainſi des autres points d'infléxion inviſibles à l'infini qui ſe confondroient avec un point double.

* *Art. 19. n. 1.*

6.° Si le point touchant *M* eſt un point double de la ſeconde ou troiſiéme eſpece, il y aura * dans l'égalité marquée par *(K)* quatre racines égales & de même ſigne, ſuppoſé que l'infléxion de la branche touchée par la droite *GM* ſoit une infléxion de la premiére eſpece. Si cette infléxion eſt de la troiſiéme eſpece, il y aura dans l'égalité marquée par

* *Art. id. n. 2.*

(K) ſix racines égales entre elles : & ainſi des autres points d'infléxion viſibles d'eſpeces ſupérieures qui ſe confondent avec des points doubles.

7.° Si le point touchant *M* eſt un point triple de la premiére eſpece, il y aura* dans l'égalité *(K)* quatre racines égales & de même ſigne, ſix, huit, dix, &c. ſi ce point triple eſt accompagné d'une infléxion inviſible de la branche touchée par la droite *GM.* Si la branche touchée par la droite *GM* a une infléxion viſible au point triple *M,* c'eſt-à-dire, ſi le point triple *M* eſt de la ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece, l'égalité *(K)* aura cinq, ſept ou neuf racines égales & de même ſigne, ſelon que cette infléxion, qui ſe confond avec le point triple *M,* ſera de la premiére, troiſiéme ou cinquiéme eſpece.

* *Art.* 19. *n.* 2.

8.° Si le point touchant *M* eſt un point quadruple de la premiére eſpece, il y aura* dans l'égalité marquée par *(K)* au moins cinq racines égales & de même ſigne, ou ſept, ou neuf, ou onze, ſelon que le point touchant *M* ſera ſans infléxion, ou avec une infléxion de la ſeconde, quatriéme, ou ſixiéme eſpece, & ainſi de ſuite pour les autres infléxions inviſibles qui pourroient accompagner le point quadruple; ſi le point touchant *M* eſt un point quadruple accompagné d'une infléxion viſible de la branche touchée par *GM,* c'eſt-à-dire, ſi le point quadruple *M* eſt de la ſeconde, troiſiéme, quatriéme, ou cinquiéme eſpece, il y aura dans l'égalité marquée par *(K)* au moins ſix racines égales & de même ſigne, ou huit, ou dix, ou douze, ſi l'infléxion qui ſe trouve au point quadruple eſt de la troiſiéme, cinquiéme, ou ſeptiéme eſpece.

* *Art. id. n.* 3.

Enfin il eſt aiſé de voir combien il doit y avoir de racines égales & de mêmes ſignes dans l'égalité marquée par *(K),* lorſque le point touchant *M* eſt un point quintuple, ſextuple, & ainſi des autres points multiples d'un ordre ſupérieur.

COROLLAIRE III.

XXXVI. De tout ceci il eſt aiſé de conclurre, 1.° Que

les lignes du second ordre ne sçauroient avoir ni points d'infléxions, ni points doubles : car quand la ligne *ZMN* est du second ordre, l'égalité *(K)* est du second degré ; d'où il suit qu'elle ne sçauroit avoir trois racines égales. 2.° Que les lignes du second ordre n'ont ni points triples, ni points quadruples, en un mot que tous leurs points sont simples. *C'est une vérité connüe depuis long-temps, mais que j'ai crû devoir remettre devant les yeux pour faire voir la liaison de cette théorie avec les vérités déja connües.*

COROLLAIRE IV.

XXXVII. Il suit encore de l'art. 35, 1.° Que les lignes du troisiéme ordre peuvent avoir des points d'infléxion de la premiére espece, & des points doubles de la premiére espece, & par conséquent des points de rebroussement & des points conjugués : mais qu'elles ne sçauroient avoir ni infléxions de la seconde, troisiéme ou quatriéme espece, ni points doubles de la seconde & troisiéme espece, ni points triples, ni aucuns points multiples au dessus du point double. 2.° Que les lignes du quatriéme ordre peuvent avoir des points d'infléxion de la premiére & seconde espece : des points doubles de toutes les especes, & des points triples de la premiére espece : mais qu'elles ne sçauroient avoir ni points triples de la seconde, troisiéme ou quatriéme espece, ni point quadruple, ni aucun point multiple supérieur au point triple. 3.° Que les lignes du cinquiéme ordre peuvent avoir des points quadruples de la premiére espece : des points triples de la seconde, troisiéme & quatriéme espece, & à plus forte raison des points triples de la premiére espece : des points doubles des trois especes que nous avons marquées, & des infléxions de la premiére, seconde & troisiéme espece : mais qu'elles ne sçauroient avoir ni points quadruples de la seconde, troisiéme, quatriéme ou cinquiéme espece, ni points quintuples, ni aucun point multiple supérieur au point quadruple de la premiére espece. 4.° Que les lignes du sixiéme ordre peuvent avoir des points quintuples de la premiére espece, ou des points

quadruples de la ſeconde, troiſiéme, quatriéme & cinquiéme eſpece, & à plus forte raiſon des points quadruples de la premiére eſpece : des points triples & des points doubles de toutes les eſpeces. 5.° Enfin que les lignes de l'ordre exprimé par l'expoſant n peuvent avoir des infléxions dont l'eſpece ſoit exprimée par $n-2$; à plus forte raiſon de celles dont l'eſpece eſt exprimée par $n-3$, $n-4$, $n-5$, &c. Qu'elles peuvent avoir des points multiples dont la multiplicité eſt exprimée par $n-1$, mais ſeulement de la premiére eſpece : qu'elles peuvent avoir de toutes les eſpeces de points multiples, dont la multiplicité eſt exprimée par $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. mais qu'elles ne ſçauroient avoir de points multiples dont la multiplicité ſoit exprimée par n.

COROLLAIRE V.

XXXVIII. Il n'eſt pas moins évident que les lignes algébriques de l'ordre n peuvent être coupées par leurs tangentes en un point ſimple M, ou par leurs ſécantes en un point double, en autant de points ſimples, autres que le point d'attouchement, ou autres que le point double en autant de points, dis-je, qu'il y a d'unités dans $n-2$. Ainſi 1.° les lignes du ſecond ordre, ou les ſections coniques, ne ſçauroient être coupées par leurs tangentes en aucun point, vérité connüe depuis long-temps. 2.° Les tangentes en un point ſimple, ou les ſécantes en un point double des lignes du troiſiéme ordre, peuvent couper leurs courbes en un autre point. 3.° Les tangentes en un point ſimple, ou les ſécantes en un point double des lignes du quatriéme ordre, peuvent couper leurs courbes en deux autres points ſimples, ou en un autre point double. D'où il ſuit que les lignes du quatriéme ordre peuvent avoir deux points doubles ſur la même ligne droite ſécante de la courbe à l'un & à l'autre point double.

COROLLAIRE VI.

XXXIX. Les lignes algébriques du n^e ordre peuvent être

être coupées par leurs asymptotes rectilignes en autant de points qu'il y a d'unités dans $n-2$; c'est encore une suite de l'art. 35. Ainsi 1.° Les asymptotes rectilignes des lignes du troisiéme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en un seul point; Celles des lignes du quatriéme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en deux points; Celles des lignes du cinquiéme en trois points; Celles du sixiéme en quatre, & ainsi de suite. 2.° Les lignes du quatriéme ordre peuvent être touchées en un point simplement simple, ou coupée en un point double par leurs asymptotes rectilignes; Celles du cinquiéme ordre peuvent être touchées en un point d'infléxion de la premiére espece, ou en un point double, ou bien coupées en un point triple par leurs asymptotes rectilignes; Celles du sixiéme ordre peuvent être touchées en un point d'infléxion de la seconde espece, ou en un point triple, ou coupées en un point quadruple par leurs asymptotes rectilignes, & ainsi des autres.

COROLLAIRE VII.

XL. Il suit encore des articles 33 & 35, que les tangentes en un point d'infléxion de la premiére espece, ou les tangentes en un point double de la premiére espece, ou les sécantes en un point triple des lignes algébriques du n^e ordre peuvent couper leurs courbes en autant d'autres points différents du point d'infléxion, ou du point double, ou du point triple, qu'il y a d'unités dans $n-3$. D'où il suit, 1.° Que les tangentes au point d'infléxion, ou au point double d'une ligne du troisiéme ordre, ne sçauroit rencontrer cette ligne en d'autres points. 2.° Que les tangentes au point d'infléxion, ou au point double de la premiére espece, ou bien les sécantes au point triple d'une ligne du quatriéme ordre, ne peuvent que couper cette ligne en un autre point simple, sans pouvoir la toucher en un autre point simplement simple, ni la couper en un autre point double, ni lui être asymptote. 3.° Que les tangentes au point d'infléxion de la premiére espece, ou les tangentes au point double de la premiére

espece, ou les sécantes en un point triple des lignes du cinquiéme ordre, peuvent couper leur courbe en deux autres points simples, ou en un autre point double, ou la toucher en un autre point simplement simple.

COROLLAIRE VIII.

XLI. Il suit encore des mêmes articles 33 & 35, que la tangente à l'infléxion de la seconde espece, & les tangentes en un point double de la seconde ou troisiéme espece, ou bien les tangentes en un point triple, ou enfin les sécantes en un point quadruple des lignes algébriques du n^e ordre, ne peuvent couper leur courbe qu'en autant d'autres points qu'il y a d'unités dans $n-4$. D'où il suit 1.° Que la tangente à l'infléxion de la seconde espece, ou les tangentes en un point double de la seconde & troisiéme espece, ou bien les tangentes en un point triple des lignes du quatriéme ordre, ne sçauroient rencontrer leur courbe en aucun autre point. 2.° Que la tangente à l'infléxion de la seconde espece, ou les tangentes en un point double de la seconde & troisiéme espece, ou les tangentes en un point triple, ou les sécantes en un point quadruple des lignes du cinquiéme ordre, peuvent couper leur courbe en un autre point simple. 3.° Que les tangentes en ces différents points des lignes du sixiéme ordre peuvent couper leur courbe en deux autres points simples, ou en un autre point double, ou les toucher en un autre point simplement simple.

COROLLAIRE IX.

XLII. Il n'est pas moins évident que les lignes du troisiéme ordre ne sçauroient avoir qu'un seul point double. Car soient M & N* ces deux points doubles d'une ligne du troisiéme ordre : par les premiers principes de la Géométrie, ces deux points peuvent être unis par une même ligne droite MN. Soit prolongée cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre en G une autre droite GQ, que l'on prendra pour l'axe de la courbe : cela fait de chaque point double M & N, on

* Fig. 24.

abbaiſſera ſur cet axe les ordonnées MQ, NP, alors l'abſciſſe GQ ſera au moins deux fois commune à la courbe ZMN & à la droite GN; de même l'abſciſſe GP ſera au moins deux fois commune à la même courbe ZMN & à la même droite GN, enſorte que dans l'égalité marquée par (K) dans l'art. 33, il y aura deux racines égales pour l'abſciſſe GQ, & deux autres racines égales pour l'abſciſſe GP. Donc il y aura quatre racines dans l'égalité marquée par (K): or il implique qu'il y ait quatre racines dans cette égalité, lorſque la courbe ZNM n'eſt qu'une ligne du troiſiéme ordre (puiſque cette égalité n'eſt alors que du troiſiéme degré, n y étant $=3$). Donc il implique qu'il y ait deux points doubles dans une même ligne du troiſiéme ordre. Donc, &c.

COROLLAIRE X.

XLIII. Une ligne du quatriéme ordre ne ſçauroit avoir qu'un ſeul point triple; car s'il étoit poſſible qu'elle en eût deux, on prouveroit, par un raiſonnement ſemblable à celui de l'article précédent, que l'égalité marquée par (K) dans l'art. 33, pourroit avoir ſix racines, lorſque la courbe, dont GM eſt ſécante, n'eſt que du quatriéme ordre, ce qui impliqueroit contradiction, puiſque l'égalité (K) ne ſçauroit être alors que du quatriéme degré. Donc, &c.

COROLLAIRE XI.

XLIV. On prouvera de même que les lignes du quatriéme ordre qui ont un point triple, ne ſçauroient avoir de points doubles; car ſi cela étoit poſſible, il s'enſuivroit que l'égalité marquée par (K) dans l'art. 33, auroit cinq racines, ce qui impliqueroit contradiction, puiſque cette égalité ne ſçauroit être que du quatriéme degré, lorſque la courbe n'eſt qu'une ligne du quatriéme ordre.

SCHOLIES.

XLV. Il ſera auſſi aiſé de prouver; 1.° Que les lignes du 5me ordre ne peuvent avoir qu'un ſeul point quadruple,

& que celles qui ont un point quadruple ne sçauroient avoir ni points triples, ni points doubles. 2.° Que les lignes du sixiéme ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quintuple, & que celles qui ont un point quintuple ne sçauroient avoir ni points quadruples, ni points triples, ni points doubles. 3.° Enfin que les lignes algebriques de l'ordre n, ne peuvent avoir qu'un seul point multiple, dont la multiplicité soit exprimée par $n - 1$, & que celles qui ont un point multiple, dont la multiplicité est exprimée par $n - 1$, ne sçauroient avoir d'autres points multiples.

Enfin, suivant la même théorie, on prouvera encore, 1.° Que les lignes du cinquiéme ordre, qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 2.° Que les lignes du sixiéme ordre, qui ont des points quadruples, peuvent avoir des points doubles, & ne sçauroient avoir de points triples, mais que celles de cet ordre qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 3.° Que les lignes du septiéme ordre, qui ont des points quintuples, peuvent avoir des points doubles, & ne sçauroient avoir ni points quadruples, ni points triples. 4.° Enfin que les lignes du n^e ordre, qui ont des points multiples de l'ordre $n - 2$, ne peuvent avoir que des points doubles : que les lignes de l'ordre n qui ont des points multiples, dont la multiplicité est exprimée par $n - 3$, ne peuvent avoir que des points triples & des points doubles : que celles de cet ordre qui ont des points multiples de l'ordre $n - 4$, ne peuvent avoir que des points quadruples, ou des points triples, ou des points doubles, & ainsi des autres à l'infini, tous les autres points de ces courbes étant des points simples.

REMARQUE.

XLVI. Les différentes tangentes en ces points doubles, triples, quadruples, &c. se trouvent toûjours par la méthode des Tangentes que M. le Marquis de l'Hôpital a expliquée dans l'analyse des Infiniment petits, mais il faut y appliquer les regles de différentiation contenuës dans l'article 163 de

cette même analyse, dans un Mémoire du célébre M. Bernoulli, imprimé dans les Journaux de Leipsik de l'année 1704, & dans différents ouvrages d'un des principaux Géometres * de cette Compagnie, imprimés, les uns dans les Journaux des Sçavants, les autres dans les Mémoires de l'Académie, pour les cas auxquels le numérateur & le dénominateur de la fraction qui exprime le rapport de l'ordonnée à la soûtangente deviennent nuls : car cela arrive, lorsque le point, dont on cherche la tangente, est double, triple, quadruple, &c. & l'on est obligé de différentier deux fois selon ces méthodes, pour trouver le rapport de l'ordonnée à la soûtangente, lorsque le point est double : trois fois, lorsqu'il est triple : quatre fois, lorsqu'il est quadruple, & ainsi de suite pour les autres points multiples. M. de Fontenelle en a donné la raison dans son excellent Traité de la Géométrie de l'Infini, art. 1266 & 1267, & on peut même la déduire des principes qui ont été établis dans ce Mémoire, ainsi je me contente de renvoyer aux ouvrages des Géométres dont je viens de parler.

* M. Saurin.

PROPOSITION II.

THEOREME.

XLVII. *Les lignes algébriques du n^e ordre*, peuvent être coupées par une ligne droite, parallele à leur axe, en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable* (t) *qui dénote les abscisses* GQ *de son axe* G5q; *& par une ligne droite* QM *parallele à son ordonnée principale* GL, *en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable* (s) *qui dénote les abscisses* GE *de cette ordonnée principale* GL.

* Fig. 21.

Cette Proposition se démontre de la même maniére que celle de l'article 33, & on en déduit aisément les mêmes conséquences, ainsi je ne m'y arrête pas davantage pour ne pas tomber dans des répétitions.

DÉFINITION XV.

XLVIII. Je nommerai dans la ſuite *racine double*, celle qui dans une égalité quelconque eſt équivalente à deux racines de cette égalité : telle eſt la racine $(-a)$ dans l'égalité du troiſiéme degré $x^3 + 4axx + 5aax + 2a^3 = 0$; & *racine ſimple*, celle qui dans une égalité quelconque n'eſt point repétée : telle eſt la racine $(-2a)$ dans cette même égalité du troiſiéme degré. Je nommerai *racine triple*, celle qui dans une égalité quelconque eſt équivalente à trois racines de cette même egalité : telle eſt la racine $(-a)$ dans l'égalité $x^4 + 5ax^3 + 9a^2xx + 7a^3x + 2a^4 = 0$. De même je nommerai *racine quadruple*, celle qui dans une égalité quelconque eſt équivalente à quatre racines de cette même égalité, & ainſi des autres racines multiples à l'infini.

REMARQUE.

XLIX. Si par un point quelconque M d'une ligne
* Fig. 21. 35. & 36. $ZMDMN$, &c. * de l'ordre n, dont la nature eſt exprimée par l'Equation générale de l'art. 30, marquée par (D)*. on
* Voyés la Table à la fin de ce Mémoire. mene deux droites QM, EM, la premiére parallele à l'ordonnée principale GL, la ſeconde parallele à l'axe GQ, l'une & l'autre prolongées à l'infini, s'il eſt néceſſaire, de part & d'autre du point M, & qui rencontrent, la premiére l'axe GQ en Q, la ſeconde l'ordonnée principale GL en E : cela fait, ſi l'on nomme la droite, priſe à diſcretion, GQ (R), & la droite QM ou GE (g), ſi l'on ſubſtitüe 1.° dans l'équation marquée par (D), au lieu de l'indéterminée (t), ſa valeur (R),
* V. la même Table. il eſt viſible qu'on aura l'égalité marquée par (L)*, dont les racines donneront les points M, $3N$, $2N$, N, &c. où la droite QM coupe la courbe $ZMDMNX2mV$. 2.° Si l'on ſubſtitüe dans cette même équation, marquée par (D), au lieu de l'indéterminée (s), ſa valeur $GE = g$, il eſt
* V. la même Table. conſtant qu'on aura l'égalité marquée par (A)*, dont les racines donneront les points M, m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, &c. où la droite EM rencontre la courbe $ZMDMNX2mV$.

Il est constant aussi que l'abscisse GQ (R) sera une des racines réelles de l'égalité marquée par (A), & que l'abscisse GE (g) sera une des racines réelles de l'égalité marquée par (L), si le point M est un des points de la courbe $ZMDMNX2mV$, comme on l'a supposé.

Si l'on a besoin de transporter l'origine des abscisses de G en M, il est constant, par les premiers principes de l'application de l'Algebre à la Géométrie, qu'il n'y a qu'à supposer $z = t - R$ & $u = s - g$, ou bien $t = z + R$ & $s = u + g$: car en substituant ces valeurs de t & de s dans l'équation de la courbe marquée par (D), on aura une équation semblable à celle que l'on voit dans la Table, marquée par (Δ), dans laquelle les coëfficients Q, A, B, C, D, E, F, G, &c. seront donnés en q, α, β, γ, δ, ε, η, λ, &c. & en g & en R. Or il est visible que cette derniére équation exprime encore la nature de la courbe $ZMDMNX2mV$ par rapport à des coordonnées MP, $P5M$, qui ont leur origine commune en M, & qui sont paralleles aux premiéres GQ, QM.

Si par les points G & M on mene la droite $GM5M$, il est évident, par l'art. 33, que cette droite peut rencontrer la courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant n, en y comprenant les points doubles pour deux points simples, les points triples pour trois points simples, & ainsi des autres points multiples. Cela supposé, si l'on prend $GI = 1$ & $IK = h$ (en supposant toûjours IK parallele aux ordonnées) on trouvera l'égalité marquée dans la Table par $(2K)$ de même qu'on a trouvé ci-devant * l'égalité marquée par (K): mais à cause des triangles semblables GIK, GQM, on aura ici $h = \frac{g}{R}$; de plus puisque les coëfficients Q, A, B, C, D, E, F, &c. sont donnés en q, α, β, γ, δ, ε, &c. & en g & en R, & que g & R sont donnés même en q, α, β, γ, δ, ε, &c. il est visible qu'il n'y aura dans l'égalité $(2K)$ aucun coëfficient qui ne soit connu par rapport aux coëfficients de l'équation primitive marquée par (D).

* Art. 33.

Maintenant si par le point *M*, on mene une droite *Mω*, faisant avec *MP* un angle quelconque *ωMP*, mais différent de l'angle connu *MGQ*, cette droite pourra encore rencontrer la courbe *ZMDMNX2mV* en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant *n*, en y comprenant les points doubles pour deux points simples, les points triples pour trois points simples, & ainsi des autres. Cela posé, si l'on prend *MI* = *GI* = 1, & si l'on nomme *l* la droite *Il* parallele aux ordonnées *P5M*, il est visible que de même qu'on a trouvé dans les art. 33 & 35, l'égalité marquée par *(K)*, on trouvera ici l'égalité marquée dans la Table par *(3K)*, dont les racines réelles donneront les points d'intersection de la courbe & de la droite *Mω*.

Les choses étant telles qu'on vient de les exposer, il est visible que dans les égalités marquées par *(2K)* & par *(3K)*, il y aura un certain nombre de racines réelles égales à zero, selon que le point *M* sera ou un point simple, ou un point multiple, puisque l'origine des coordonnées *MP (z) P5M (u)* est en *M*.

COROLLAIRE I.

L. Il suit de la remarque précedente, & de tout ce qu'on a dit jusqu'ici, 1.° Que le point *M* n'est qu'un point simple de la courbe *ZMNX2MV*, lorsque l'une des deux racines *GQ (R)* * ou *GE (g)* est une racine simple, la premiére de l'égalité *(A)*, la seconde de l'égalité marquée par *(L)*, ce qui est connu de tout le monde. 2.° Que la droite *QM* * est tangente, & la droite *EM* sécante de la courbe au point *M*, lorsque *GE (g)* est une racine double de l'égalité marquée par *(L)*, tandis que *GQ (R)* n'exprime qu'une racine simple de l'égalité marquée par *(A)*. 3.° Qu'au point *M* de la courbe *ZMV* *, il y a une infléxion parallele à l'ordonnée principale *GL*, lorsque *GE (g)* est une racine triple de l'égalité *(L)*, tandis que *GQ (R)* n'est qu'une racine simple de l'égalité *(A)*. 4.° Qu'au point *M* de la courbe *ZMV* *, il y a une infléxion de la seconde espece à laquelle *QM* est tangente,

* *Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.*

* Fig. 21. *bis.*

* Fig. 22. *bis.*

* Fig. 21. *bis.*

tangente, lorſque *GE (g)* eſt une racine quadruple de l'égalité *(L)*, tandis que *GQ (R)* n'eſt qu'une racine ſimple de l'égalité *(A)*. 5.° Enfin, il eſt évident que quand *GQ (R)* n'exprime qu'une racine ſimple de l'égalité marquée par *(A)*, tandis que *GE (g)* exprime une racine multiple quelconque de l'égalité *(L)*, il eſt, dis-je, évident que le point *M* n'eſt qu'un point ſimple de la courbe *ZMV*, ou ſans infléxion ou avec infléxion viſible ou inviſible : quand la racine multiple *GE (g)* eſt impaire, le point *M* eſt avec une infléxion viſible; quand elle eſt pair il eſt avec une infléxion inviſible.

COROLLAIRE II.

LI. Il ſuit encore de tout ce qui a été dit juſqu'ici, que le point *M* eſt un point double, quand *GQ (R)** exprime une racine double de l'égalité *(A)*, tandis que *GE (g)* exprime une racine double ou plus que double de l'égalité *(L)*. 1.° Si *GE (g)* n'eſt qu'une racine double, les droites *EM* & *QM* ſont ſécantes au point double *M**. 2.° Si *GE (g)* eſt une racine triple, la droite *EM* demeurant ſécante au point double *M*, la droite *QM* eſt tangente de la courbe en ce même point double *M**. 3.° Si *GE (g)* eſt une racine quadruple, le point double *M* eſt de la ſeconde ou troiſiéme eſpece, & la droite *QM* eſt tangente en *M* de la branche qui a une infléxion au point double *M**. 4.° Si *GE (g)* eſt une racine quintuple de l'égalité *(R)*, *GQ (R)* n'étant toûjours qu'une racine double de l'égalité *(A)*, le point double *M* eſt de la premiére eſpece, mais la branche à laquelle *QM* eſt tangente en *M*, a une infléxion de la ſeconde eſpece en ce même point double *M**, & ainſi des autres.

* V. la Table à la fin de ce Mémoire.
* Fig. 25. & 26.
* Fig. 27.
* Fig. 28.
* Fig. 27.

REMARQUE.

LII. Les points doubles de la premiére eſpece, dont on a parlé dans l'article précédent, peuvent être ſans rebrouſſement ou avec rebrouſſement, ou bien ils peuvent n'être que des ovales infiniment petites. Après s'être aſſûré par le

Corollaire précédent que le point *M* est un point double de la première espece, on connoîtra si ce point double est ou un point d'intersection, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite, en cherchant les tangentes de la courbe en ce point par la méthode de l'analyse des Infiniment petits, jointe aux remarques, dont M.rs Bernoulli, Saurin & de Fontenelle l'ont enrichie : car la seconde différentiation de l'équation de la courbe marquée par *(D)* donnera une double valeur réelle de $\frac{ds}{dt}$ (c'est-à-dire, un double rapport réel de l'élement de l'ordonnée à l'élement de l'abscisse), si le point double *M* est un point d'intersection, au lieu que cette seconde différentiation ne donnera qu'une seule valeur de $\frac{ds}{dt}$, si le point *M* est un point de rebroussement, parce que les deux tangentes au point double *M* tomberont alors exactement l'une sur l'autre *. Enfin cette seconde différentiation ne donnera que des valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dt}$, si le point double *M* est une ovale infiniment petite, parce qu'une ovale infiniment petite ne sçauroit avoir de tangentes *. Il n'y a personne qui ne puisse éprouver, par des exemples connus, la vérité de cette regle : ainsi, sans m'arrêter à en donner ici des exemples qui seront assés fréquents dans la suite de ce Traité, je vais continuer cette Théorie.

* *Art. 20. & 21.*

* *Art. id.*

COROLLAIRE III.

LIII. Il suit encore de tout ce qu'on a dit jusqu'ici, 1.° Que quand *GQ (R)* * & *GE (g)* sont l'une & l'autre des racines triples, la premiére de l'égalité *(A)*, la seconde de l'égalité *(L)*, il suit, dis-je, que le point *M* est ou un point double auquel *QM* & *EM* sont tangentes, ou un point triple auquel *QM* & *EM* sont sécantes. Dans cette circonstance, il est visible * qu'on connoîtra si le point *M* est double ou triple par le moyen de l'égalité marquée *(2 K)*, car si le point *M* n'est qu'un point double, l'égalité marquée par *(2 K)* n'aura que deux racines égales à zero, s'il est triple,

* *V. la Table à la fin de ce Memoire, & les Fig. 29. & 30.*

* *Art. 49.*

elle en aura trois. 2.° L'abſciſſe GQ (R) étant toûjours une racine triple de l'égalité (A), ſi GE (g) eſt une racine quadruple, quintuple, ſextuple, &c. & que l'égalité $(2K)$ n'ait que deux racines égales à zero, le point M* n'eſt toûjours qu'un point double, mais tel que la branche à laquelle QM eſt tangente a toûjours une inflexion viſible ou inviſible préciſément au point M où ſe fait l'interſection des deux branches. * Fig. 31. & 29.
3.° L'abſciſſe GQ (R) étant toûjours une racine triple de l'égalité (A), & GE (g) une racine quadruple, quintuple, ſextuple, &c. de l'égalité (L), ſi l'égalité $(2K)$* a trois racines égales à zero, le point multiple M eſt toûjours un point triple, auquel EM & GM ſont ſécantes, tandis que QM eſt tangente d'une branche qui n'a point d'inflexion, ſi GE (g) eſt une racine quadruple : ou qui a une inflexion de la premiére eſpece en M*, ſi GE (g) eſt une racine quintuple : ou une inflexion de la ſeconde eſpece en M*, ſi GE (g) eſt une racine ſextuple, & ainſi de ſuite. * Fig. 32. * Fig. 33. * Fig. 32.

REMARQUE.

LIV. Après s'être aſſûré, par le Corollaire précédent, que le point M eſt un point triple, on connoîtra ſi ce point triple eſt une interſection de trois branches de la courbe ; ou s'il eſt accompagné d'un rebrouſſement, ou s'il eſt produit par l'adhéſion d'une ovale infiniment petite ſur une des branches de la courbe, en différentiant trois fois (ſelon les méthodes de M.rs Bernoulli & Saurin) l'équation qui exprime la nature de la courbe : car la troiſiéme différentiation donnera trois valeurs de $\frac{ds}{dt}$, c'eſt-à-dire, trois valeurs réelles du rapport de l'ordonnée QM à la ſoutangente, ſi le point eſt un point d'interſection de trois branches, puiſqu'il y a trois tangentes réelles au point M*; mais des trois valeurs réelles de $\frac{ds}{dt}$, il y en aura deux égales entr'elles, ſi le point triple M eſt accompagné de rebrouſſement, puiſqu'il doit y avoir alors deux des trois tangentes qui tombent exactement * Art. 22. & 23.

l'une fur l'autre *; enfin la troifiéme différentiation ne donnera qu'une feule valeur réelle & deux valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dt}$, fi le point triple *M* eft produit par l'adhéfion d'une ovale infiniment petite, puifque dans cette derniére circonftance il ne doit y avoir qu'une feule tangente réelle au point triple *M*, les deux autres devenant imaginaires *.

* *Art.* 22. & 23.

* *Art. id.*

COROLLAIRE IV.

LV. Il fuit encore de tout ce qui a été dit ci-deffus. Que quand *GQ (R)* & *GE (g)* * font l'une & l'autre des racines quadruples, la premiére de l'égalité *(A)*, la feconde de l'égalité *(L)*, il fuit, dis-je, que le point *M* eft 1.° ou un point double de la troifiéme efpece *, auquel *QM* & *EM* font tangentes, ou 2.° un point triple* auquel *QM* & *EM* font tangentes, ou 3.° un point quadruple auquel *QM* & *EM* font fécantes *. Dans ces circonftances il eft vifible que ce font les égalités *(2K)* & *(3K)* qui doivent déterminer la nature du point multiple *M*; car fi l'égalité *(2K)* n'a que deux racines égales à zero, il eft clair que le point *M* n'eft qu'un point double de la troifiéme efpece ; fi cette égalité *(2K)* a trois racines égales à zero, le point *M* eft un point triple; mais fi l'égalité *(2K)* a quatre racines égales à zero, le point *M* peut être, ou un point triple *, auquel *GM* feroit tangente, auffi-bien que les droites *QM, EM*; ou bien un point quadruple * auquel *GM* feroit fécante, auffi-bien que les deux autres droites *QM, EM*. Dans cette derniére circonftance, fi l'égalité *(3K)* a trois racines égales à zero, le point *M* n'eft qu'un point triple; fi elle a quatre racines égales à zero, c'eft un point quadruple auquel *QM, EM*, *GM* & *Mω* font fécantes; fi l'égalité *(3K)* a cinq racines égales à zero, le point multiple *M* eft encore un point quadruple auquel *QM, EM* & *GM* font fécantes, tandis que *Mω* eft la tangente d'une des branches qui produifent le point quadruple : fi l'égalité marquée par *(3K)* a fix racines égales à zero, ou fept, ou huit, ou neuf, &c. le point multiple *M*

* *V. la Table à la fin de ce Mémoire.*

* Fig. 37.

* Fig. 38.

* Fig. 35.

* Fig. 36.

* Fig. 35.

est toûjours un point quadruple auquel QM, EM & GM sont sécantes, & $M\omega$ tangente, mais la branche à laquelle $M\omega$ est tangente a une infléxion visible ou invisible précisément au point M où se fait l'intersection, & c'est une infléxion visible, si les racines de l'égalité $(3K)$ qui sont égales à zero, sont au nombre de six, huit, dix, douze, &c. & c'est une infléxion invisible, si ces égalités sont en nombres impairs sept, neuf, onze, &c.

SCHOLIE.

LVI. De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une théorie générale pour connoître si un point donné M d'une ligne algébrique donnée $ZMNX2mV$ est 1.° un point simple, double, triple, quadruple, quintuple, &c. 2.° De quelle espece de multiplicité il est : s'il est double de la premiére, seconde ou troisiéme espece : s'il est triple de la premiére, seconde, troisiéme ou quatriéme espece : s'il est quadruple de la premiére, seconde, troisiéme, quatriéme ou cinquiéme espece : & ainsi des autres points multiples à l'infini. 3.° Si c'est un nœud, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite; si outre le nœud, il y a un point de rebroussement de deux autres branches, ou s'il y a une ovale infiniment petite adhérante, & ainsi des autres. Mais comme les lignes du quatriéme ordre, dont j'ai à traiter ici, ne sçauroient avoir ni points triples de la seconde & troisiéme espece, ni points quadruples, ni points quintuples : en un mot, comme les lignes du quatriéme ordre ne peuvent avoir que des points doubles de toutes les especes, ou au plus un seul point triple, je m'abstiens de pousser cette théorie plus loin, persuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a personne qui ne puisse déduire, des principes qui viennent d'être établis, toutes les conséquences qui peuvent servir à cette théorie. Il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire pour en faire le détail : cependant avant de le finir, je crois qu'il est à propos de faire quelques remarques au sujet des points multiples invisibles du premier & du second genre,

c'eſt-à-dire, au ſujet des ovales infiniment petites conjuguées, & des ovales infiniment petites adhérantes à une des branches de la courbe.

REMARQUE I.

* *Art. 12.* LVII. On a dit dans la 8.e définition * nombre 3, que l'ovale infiniment petite ou point conjugué devoit être mis au rang des points doubles. Le célébre Chevalier Newton l'a dit auſſi dans ſon énumération des lignes du troiſiéme ordre, & c'eſt après ce grand homme que j'ai crû pouvoir le ſuppoſer; néantmoins ayant donné des regles dans ce Mémoire, pour reconnoître les points doubles d'avec les points ſimples & les autres points multiples, & pour connoître ces points doubles les uns des autres, j'ai crû qu'on ne me ſçauroit pas mauvais gré, ſi par maniére de digreſſion, je fais voir l'application de ces regles au point conjugué, ou ovale infiniment petite, ſur un exemple déja connu.

EXEMPLE.

* Fig. 20. LVIII. On demande ſi la courbe, dont la nature eſt exprimée par cette équation $pyy - 2cpy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & quelle eſt la nature de ce point double, ſi c'eſt un point d'interſection de deux branches, un point de rebrouſſement, ou ſi c'eſt un point conjugué (l'indéterminée (x) repréſente les abſciſſes AP, & l'indéterminée (y) les ordonnées PZ de cette courbe).

1.° Quand $AP(x) = a$, il reſte l'égalité $pyy - 2cpy + pcc = 0$, dont les deux racines ſont $y = c$, $y = c$; & cette valeur de l'indéterminée (y) étant ſubſtituée dans l'équation de la courbe, il vient l'égalité $x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3 = 0$, qui a trois racines réelles, dont deux ſont égales entre elles, & de même ſigne, ces deux racines égales ſont $x = a$, $x = a$. Or *(par l'art. 51)* quand les égalités déſignées par (L) & par (A), (qui ſont ici les égalités $pyy - 2cpy + pcc = 0$, & $x^3 - 4ax^2 + 5aax - 2a^3 = 0$) ont l'une & l'autre

deux racines réelles, égales & de même signe, la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation *(D)*, qui dans cet exemple particulier est réduite à l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & à ce point double, l'abscisse $AP\ (x)$ est à l'ordonnée $PZ\ (y)$ :: $a : c$; donc, si l'on prend $AB = a$, & sur la droite BM, parallele à l'ordonnée principale GL, la partie $BM = c$, le point M sera le point double de la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$. *Ce qu'il falloit montrer en premier lieu.*

2.° Pour connoître maintenant la nature de ce point double M, c'est-à-dire, s'il est un point d'intersection, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite *, on différentiera deux fois l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, suivant l'art. 163 de l'analyse des Infiniments petits, & les méthodes de M. Bernoulli, & la seconde différentiation donnera $pdy^2 = 3xdx^2 - 4adx^2$, d'où l'on tire $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3x-4a}{p}$, & ensuite $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{3x-4a}}{\sqrt{p}}$. Mais au point double M, on a $x = a$ * : Donc, en ce point double M, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{-a}}{\sqrt{p}}$. Or $\sqrt{-a}$ est une grandeur imaginaire; donc au point double M, les tangentes de la courbe sont imaginaires, quoique les coordonnées GB, BM soient réelles : donc * ce point double M est une ovale infiniment petite, ou un point conjugué. *En effet cette courbe est celle qui, dans l'énumération des lignes du troisiéme ordre de M. Newton, est la 69.e espece, que ce célébre Géométre dit avoir un point conjugué : j'ai préféré cet exemple, quoique connu, & pris parmi les lignes du troisiéme ordre, afin de faire voir la liaison de mes principes, avec les vérités qui ont été publiées par d'autres.*

* *Art.* 52.

* *Par le nombre précédent du présent article.*

* *Art.* 20. & 21.

REMARQUE II.

LIX. On a dit dans la neuviéme définition *, que l'ovale

* *Art.* 13.

infiniment petite conjuguée, étant un point double, lorsqu'une ovale infiniment petite, au lieu d'être conjuguée, est adhérante à une des branches de la courbe, elle doit former un point triple dans l'endroit où elle est adhérante à la courbe: & on l'a nommée *point triple invisible*, par la raison que l'on ne voit pas, lorsque la courbe est décrite sur le plan, ce qui cause la triplicité de ce point qui n'est sensible que dans l'équation de la courbe ; je ne crois pas que personne ait jamais parlé de ces especes de points triples, c'est ce qui m'engage à m'étendre un peu sur leur formation.

Cette singularité, qui ne se rencontre pas dans les lignes qui sont au dessous du quatriéme ordre, vient de ce que les lignes du quatriéme ordre & celles d'un ordre supérieur peuvent avoir sur une même branche finie ou infinie $AMmZ$*, une ovale $M\varphi m \delta \varepsilon M$ coupée par cette branche en deux points M & m. Cette ovale, qu'on peut nommer *ovale adhérante*, fait partie de la courbe à laquelle elle est adhérante, & les points M & m, où elle est coupée par la branche finie ou infinie $AMmZ$, sont les points doubles de la courbe $ZmMANnXV$ à laquelle elle appartient, dont on suppose ici que GQ est l'axe, & GL l'ordonnée principale.

* Fig. 39.

Soit δ le point de l'ovale adhérante où la tangente est parallele à l'axe: φ le point de cette même ovale où la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, ensorte que la droite $Q\delta$ soit le *maximum* de l'ovale, parallele à l'ordonnée principale, & la droite $E\varphi$ son *maximum* parallele à l'axe: soit de plus la droite indéfinie GM menée par les points G & M, il est constant que cette droite GM doit couper l'ovale, non seulement au point M, mais encore en un autre point comme γ, puisque cette ovale est une portion de courbe rentrante en elle-même.

Si l'on conçoit maintenant que les droites $M\delta$ & $M\varphi$ deviennent infiniment petites, il est constant que les points M & δ, M & φ, seront infiniment près l'un de l'autre, aussi-bien que les points M & m & les points M & γ : en un mot il est clair que l'ovale sera infiniment petite, & qu'elle

n'occupera

n'occupera plus sur la branche $AMmZ$ qu'un espace infiniment petit, ensorte qu'elle sera invisible sur le plan.

Néantmoins la droite $Q\delta$ coupera toûjours la courbe & au point M où est le nœud, & au point δ qui sera infiniment près de M: de même $E\phi$ coupera la courbe & au point double M & au point simple ϕ, qui sera infiniment près de M. D'où il suit 1.° que la droite $GE(g)$ sera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (L)*, sçavoir à deux racines égales à cause du nœud M, & à une troisiéme racine qui ne différera des autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\delta = Ee$, c'est-à-dire, qui dans le fini n'en différera point. Par la même raison la droite $GQ(R)$ sera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (A)*, dont deux seront correspondantes au nœud M, & la troisiéme au point ϕ, laquelle par conséquent ne différera des deux autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\phi = Qq$, c'est-à-dire, qu'elle n'en différera point dans le fini, ensorte qu'il y aura dans l'égalité (A) trois racines parfaitement égales.

* Art. 49. Voyés la Table.

* Art. id.

Enfin si l'on transporte l'origine des coordonnées de G en M pour avoir, au lieu de l'équation qui se rapporte à l'équation générale marquée par (D), celle qui se rapportera à l'équation générale marquée par (Δ)*, & que de cette derniére équation on en déduise, suivant ce qui est dit ci-dessus, l'égalité marquée par $(2K)$*, dont les racines donnent les points d'interfection de la courbe $ZmMANnXV$ & de la droite GM, il est clair que cette égalité $(2K)$ aura trois racines égales à zero; sçavoir deux, à cause du point double M, où la droite GM coupe la courbe, & une troisiéme, à cause du point γ qui n'est distant de M, origine des u & des z, que d'une grandeur infiniment petite.

* Art. id. V. la Table.

* Art. id.

Ainsi, dans les lignes du quatriéme ordre, ou d'un ordre supérieur au quatriéme, qui ont des ovales infiniment petites adhérantes à une de leurs branches, les équations algébriques, qui expriment la nature de ces courbes, doivent faire connoître l'éxistence & la situation de ces ovales par des

ſymptomes, s'il eſt permis de parler ainſi, pareils à ceux des courbes qui ont des points triples, dont la triplicité dépend de l'interſection de trois branches finies ou infinies de la même courbe, *ce que j'avois à faire remarquer ici pour ne laiſſer aucun doute ſur la neuviéme définition.*

EXEMPLE.

* Fig. 39.

LX. Soit la courbe $ZmMANnXV$*, dont la nature eſt exprimée par l'équation marquée par le chiffre (1)

$$(1)\ldots ay^3 - 3aey^2 - acyy + 3aeey + 2acey - ae^3 - ace^2 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{2}abx^2 + \tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{5}{12}a^4 - \tfrac{1}{6}ba^3 - \tfrac{2}{3}ax^3$$

dans laquelle on ſuppoſe $c = \frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}}$ & $a > b$.

La droite GQ, qui s'étend à l'infini de part & d'autre du point G, eſt l'axe de la courbe ſur laquelle on prend les x poſitifs du côté de Q, & les x négatifs du côté de B: la droite GL, qui coupe GQ à angle quelconque au point G, eſt l'ordonnée principale de la courbe, ou l'axe des y: l'origine de ces indéterminées x & y eſt en G.

Cette courbe n'a que deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de la droite GL, & ces deux branches ſe réüniſſent en A, où la courbe coupe l'ordonnée principale GL parallelement à l'axe GQ; la branche $ZmMA$, qui s'étend à l'infini du côté des x poſitifs, eſt chargée d'une ovale $M\mu\phi m\delta\epsilon M$, qu'elle traverſe de M en m: la branche $ANnXV$, qui s'étend à l'infini du côté des x négatifs, forme deux *ſinuoſités* KNn, NnX, dont les ſommets N & n ont des tangentes NB, nb, paralleles à l'ordonnée principale GL.

Après avoir pris du côté où les x ſont poſitifs $GQ = a$, $G2Q = a + b$, $Gq = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $G2q = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, & du côté où les x ſont négatifs, $GB = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $Gb = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$

$\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, on élevera des points Q, $2Q$, q, $2q$, les quatres droites $Q\delta$, $2Qm$, $q\pi$ & $2q\varepsilon$ paralleles à l'ordonnée principale GL, & ensuite des points B & b les droites BX, bn, paralleles aux premiéres; cela fait, si l'on prend sur la droite $Q\delta$ la partie $QM = e$, le point M sera un de ceux où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\varepsilon M$: si l'on prend $M\delta$ (de l'autre côté du point M par rapport au point Q) tel que $M\delta$, soit $= c = \frac{b\sqrt[3]{9b + 18a}}{3\sqrt[3]{2a}}$, le point δ sera un des points de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe: si l'on prend, sur la droite $2Qm$, le point m, tel que $2Qm = e + \frac{2}{3}c$, ce point m sera le 2[d] point où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\varepsilon M$: & si, sur cette même droite $2QM$, on prend $2Q\mu = e - \frac{1}{3}c$, le point μ sera l'autre point de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe; enfin, si par les points M & m, on tire les droites $M\phi$, $m\varepsilon$, paralleles à l'axe GQ, le point ϕ où la première droite $M\phi$ coupera la droite $q\pi$, sera un des points de l'ovale où la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, & le point ε où la seconde droite $m\varepsilon$ coupe la droite $2q\varepsilon$, sera le second point de l'ovale où la tangente est parallele à la même ordonnée principale GL, c'est-à-dire, que $q\phi$ & $2q\varepsilon$ seront tangentes de l'ovale, l'une au point ϕ, l'autre au point ε, ensorte que si l'on prolonge les tangentes de l'ovale aux points δ & μ jusqu'à ce qu'elles rencontrent la droite $q\pi$, l'une au point π, l'autre au point ξ, l'ovale se trouvera renfermée d'un côté entre les droites $2q\varepsilon$, $q\pi$, & de l'autre entre les droites $\delta\pi$, $\mu\xi$.

Si l'on prend sur la droite BX la partie $BN = e$ & la partie $BX = e + c$, le point N sera le sommet de la premiére sinuosité KNn de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, & le point X sera l'extrémité de la seconde sinuosité NnX de la même branche $ANnXV$: de même si l'on prend sur la droite bn la partie $bu = e + \frac{2}{3}c$, & la partie $bK = e - \frac{1}{3}c$.

le point n sera le sommet de la seconde sinuosité NnX de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, & le point K sera l'extrémité de la premiére sinuosité KNn de la même branche $ANnXV$. Enfin si du point E, où la droite MN, parallele à l'axe, coupe l'ordonnée principale GL, on prend, sur cette même droite GL, la partie EA égale à la racine réelle de cette égalité $W^3 - cW^2 + \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{6}aab = 0$, en allant de E vers G, parce que cette racine est négative, on aura le point A, où les deux branches $ZmMA$, $VXnNA$, s'unissent, en coupant l'ordonnée principale GL parallelement à l'axe GQ.

Tout cela n'est qu'une suite des principes qu'on a démontrés jusqu'ici, le calcul même n'en est pas fort difficile, je l'obmets ici (parce qu'il ne serviroit qu'à allonger) pour en venir à la formation des *points triples invisibles*.

Tout ce qu'on vient de dire étant donc supposé, il est visible que la grandeur de l'ovale $M\varphi m\delta\varepsilon Me$ dépend des grandeurs de la droite $M\varphi$ $(\frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb})$ & de la droite $M\delta$ $(c = \frac{b\sqrt[3]{9b + 18aa}}{2\sqrt[3]{2a}})$. Ces droites étant donc, pour ainsi dire, les parametres de cette ovale, si la droite $Q2Q(b)$ est supposée infiniment petite, $M\varphi$ devient en même temps infiniment petite : car $Q2Q(b)$ étant alors $= 0$ par rapport à $GQ(a)$, on a $M\varphi = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = 0$, la droite $M\delta$ $(c = \frac{b\sqrt[3]{9b + 18a}}{2\sqrt[3]{2a}})$ devient aussi infiniment petite ou égale à zero par rapport à $GQ(a)$: ainsi l'ovale $M\mu\varphi m\delta\varepsilon M$ devient une ovale infiniment petite, mais elle demeure toûjours adhérante à la branche $AMmZ$*.

* Fig. 40.

A l'égard de ce qui arrive à la branche $ANnXV$, quoique cela ne soit pas du sujet dont nous traitons dans cet article, il n'est pas hors de propos de faire remarquer, en passant, que les deux sinuosités KNn, NnX, deviennent infiniment petites, & se changent en une infléxion parallele à l'ordonnée

principale : mais je m'attache uniquement ici à la branche $ZmMA$, sur laquelle l'ovale (comme on a déja dit) devient infiniment petite, & par conséquent invisible sur le plan.

Quoique cette ovale soit invisible, il en reste des marques dans l'équation : en effet lorsque $Q2Q\ (b)$ devient $=0$, par rapport à $GQ\ (a)$, l'équation de la courbe $ZmMANnXV$ se change en celle qu'on voit ici marquée par (2)

$$(2)\ldots\ ay^3 - 3aeyy + 3aeey - ae^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}aaxx - \tfrac{1}{12}a^4,$$

tous les termes, où les coëfficients b & c se rencontrent, devenant infiniment petits & par conséquent égaux à zero par rapport aux autres.

Maintenant si on cherche quelle doit être la valeur de GE ou $QM\ (y)$ au point Q, auquel $x=a$, on trouve * l'égalité (L) qui est du troisiéme degré, & qui a par conséquent trois racines; * Art. 49. V. la Table.

$$(L)\ldots\ y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$$

Ces trois racines sont réelles & égales entre elles, étant $y=e$, $y=e$, $y=e$; d'où il suit que $GE\ (g)=e$ est une racine triple de l'égalité (L), ce qui dénote en M*, ou un point d'infléxion parallele à l'ordonnée principale, auquel QM seroit tangente, ou un point double * auquel QM est tangente, ou bien un point triple * auquel QM est sécante. Mais si l'on substituë dans l'équation (2), au lieu de l'indéterminée (y) sa valeur e, pour connoître * la nature du point M, on trouve l'égalité (A), qui étant du quatriéme degré, doit avoir quatre racines réelles ou imaginaires. * Art. 8. n. 3. * Art. 19. n. 1. * Art. 18. n. 2. * Art. 49. V. la Table.

$$(A)\ldots\ \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}aaxx - \tfrac{1}{12}a^4 = 0.$$

Ces quatre racines sont réelles, & il y en a trois égales entre elles, & une quatriéme qui est inégale, car cette égalité donne $x=a$, $x=a$, $x=a$, & $x=-\tfrac{1}{3}a$; d'où il suit que $GQ\ (R)=a$ est une racine triple de l'égalité (A), & qu'il y a de l'autre côté de G une valeur de (x) qui est égale à $\tfrac{1}{3}GQ$, laquelle correspond à une racine triple de l'égalité (L), & par conséquent qu'il y a en N* une infléxion parallele à l'ordonnée principale. *Ce que je remarque seulement en passant*, * Art. 50.

pour faire voir l'usage des regles qu'on a données ci-devant. Revenons au point M dont il faut faire connoître la nature.

On a trouvé que GE (g) $= e$ est une racine triple de l'égalité (L); d'où l'on a conclu que le point M pourroit être, ou un point, dont l'infléxion seroit parallele à l'axe, ou un point double auquel QM seroit tangente, ou un point triple auquel QM seroit sécante. Mais GQ (R) $= a$ est aussi une racine triple de l'égalité (A), donc, 1.° le point M ne sçauroit être un simple point d'infléxion, (car il faudroit pour cela que GQ (a) ne fût qu'une racine simple de l'égalité marquée

* Art. 50. n. 3. par (A))*; 2.° ce même point M ne sçauroit être un point double avec rebroussement, (car GQ (a) ne seroit alors qu'une

* Art. 51. racine double * de l'égalité (A)). Donc il ne peut être qu'un point double sans rebroussement, auquel QM & EM se-

* Art. 53. roient tangentes *, ou bien un point triple auquel QM & EM seront sécantes.

Pour connoître maintenant si ce point M est un point double, ou un point triple, on transportera l'origine des indéterminées de G en M, en prenant $u = y - e$, & $z = x - a$, ce qui transformera l'équation (2) en celle que l'on voit ici marquée par (Δ).*

* Art. 49. V. la Table.

$$(\Delta) \ldots 4au^3 = z^4 + \tfrac{4}{3}az^3.$$

Cela fait, par les points G & M, on tirera la droite GM,

* Art. 33. & 49. qui coupera la courbe en autant de points * qu'il y a de racines réelles dans l'égalité $(2K)$ en y comprenant les points

$$(2K) \ldots \left.\begin{array}{l} z^4 + \tfrac{4}{3}az^3 \\ -4ah^3z^3 \end{array}\right\} = 0$$

doubles pour deux points, & les points triples pour trois.

Dans cette égalité (qui est donnée par la comparaison des triangles semblables GIK, $MP5M$, & dans laquelle IK

* Art. 49. V. la Table. $(h) = \frac{e}{a}$) * les quatre racines sont $z = 0$, $z = 0$, $z = 0$, & $z = -\tfrac{4}{3}a + \frac{4e^3}{aa}$, ensorte qu'elle a trois de ces racines qui sont égales à zero; d'où il suit que la droite GM sécante en M ne sçauroit y être sécante en un point double, (car il

faudroit pour cela * qu'il n'y eût dans l'égalité *(2K)* que deux racines égales à zero), donc le point *M* est un point triple, auquel *QM, EM,* & *GM* sont sécantes *. * *Art.* 53. *n.* 1. * *Art. id.*

Mais on a vû ci-devant qu'en ce point *M*, il y a une ovale infiniment petite adhérante à la courbe, qui est invisible sur le plan : donc l'ovale infiniment petite, adhérante à une des branches de la courbe est désignée dans l'équation, qui exprime la nature de la courbe, par les mêmes symptômes que le point triple. Donc ces ovales infiniment petites adhérantes sont des especes de points triples invisibles. *Ce qu'il falloit faire connoître par cet exemple.*

Les points triples invisibles ou ovales infiniment petites adhérantes à une des branches de la courbe, ont tant de rapport avec les points triples visibles, formés par l'intersection de trois branches finies ou infinies de la même courbe; que si l'on cherche la tangente de la courbe au point où la triplicité est invisible, il faudra différentier trois fois, conformément à l'article 46, pour avoir le rapport du dx au dy; il s'agit donc de vérifier cette proposition par ce même exemple.

Soit donc toûjours la courbe Z*MANV* *, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par *(2)* * Fig. 40.

$$(2)\ldots ay^3 - 3aey^2 + 3aeey - ae^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}a^2xx - \tfrac{1}{12}a^4.$$

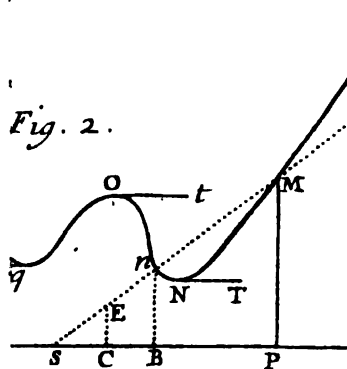
En différentiant cette équation, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2axx + aax}{3a \times yy - 2ey + ee}$: si on demande le rapport de dx à dy au point *M*, où l'on a trouvé $x = a$, & $y = e$, il est visible que la substitution de x & de y dans la différentielle précédente donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, d'où il suit (par l'art. 163 de l'analyse des Infinim. petits) qu'il faut différentier séparément le numérateur & le dénominateur de cette fraction, cette seconde différentiation donne $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3xx - 4ax + aa}{6a \times y - e}$: si on substitue dans cette seconde différentielle, au lieu de x & de y, leurs valeurs au point *M*, on aura encore $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0}{0}$, d'où il suit qu'il faut différentier

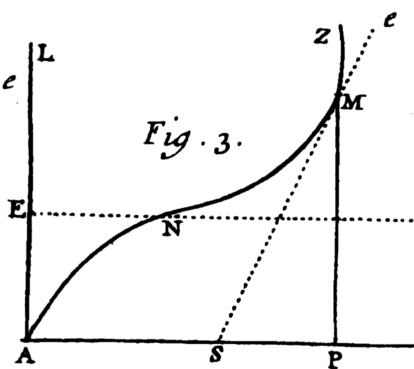
une troisiéme fois, suivant les méthodes de M.[rs] Bernoulli & Saurin, cette troisiéme différentiation donne $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6x-4a}{6a}$: si on substituë dans cette troisiéme différentielle, la valeur de x au point *M*, c'est-à-dire, a au lieu de x, on aura $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6a-4a}{6a} = \frac{1}{3}$, d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, qui fait connoître enfin que l'ordonnée *QM* au point *M* est à la soûtangente *QT* en ce même point *M*, comme 1 est à $\sqrt[3]{3}$, c'est-à-dire, que $QT = e\sqrt[3]{3}$. Mais pour trouver cette valeur de la soûtangente *QT*, il a fallu différentier trois fois, comme s'il y eut eû trois branches qui se fussent rencontrées en *M*. Donc pour trouver la valeur de la soûtangente au point triple invisible *M*, il faut faire les mêmes opérations que pour le point triple visible. *Ce que je m'étois proposé de faire connoître en second lieu par cet exemple.*

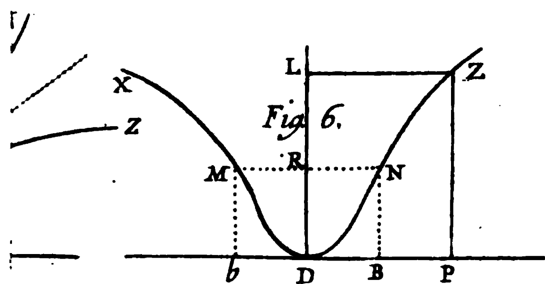
Avant de finir cet article, il ne faut pas oublier de remarquer que la troisiéme différentiation n'ayant fourni ici, au point *M*, que l'égalité $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{1}{3}$, qui ne sçauroit avoir qu'une seule racine réelle, il s'ensuit qu'il n'y a au point *M*, qu'une seule tangente, ce qui est encore une nouvelle preuve qu'il n'y passe qu'une seule branche de la courbe *ZMANV*. D'où l'on voit la différence qu'il y a entre un point triple invisible, & un point triple visible. Car si ce point triple *M* eût été formé par la rencontre de trois branches finies ou infinies de la courbe, la troisiéme différentiation auroit fourni une égalité du troisiéme degré qui auroit eû trois racines réelles, à cause des trois tangentes qui se seroient rencontrées au point *M*. *Différence que je m'étois proposée de faire remarquer en dernier lieu par cet exemple.*

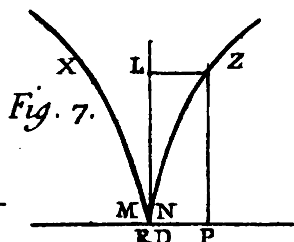


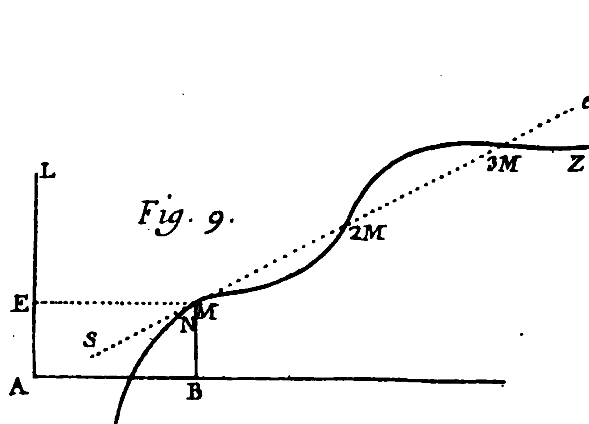
EXAMEN

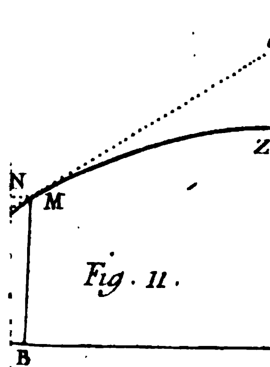

Fig. 2.
e
O
t
M
q
n
N
T
E
S
C
B
P

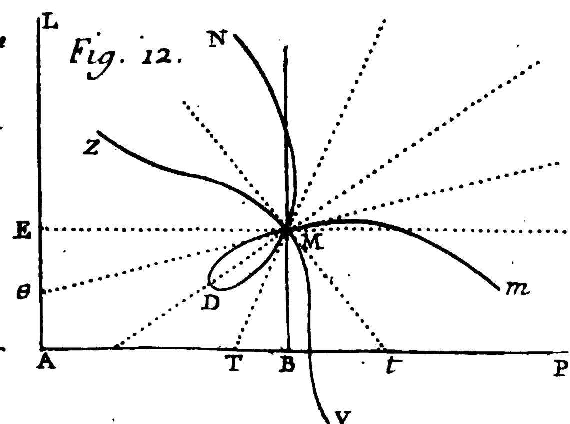

L
Z
e
M
Fig. 3.
E
N
A
S
P

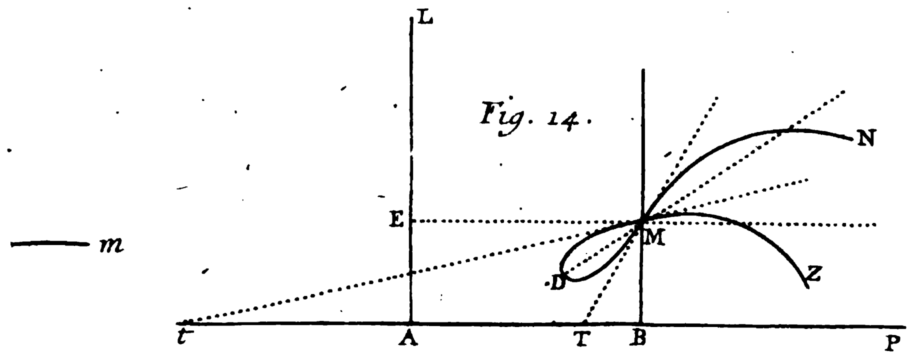

X
L
Z
Fig. 6.
R
M
N
b
D
B
P

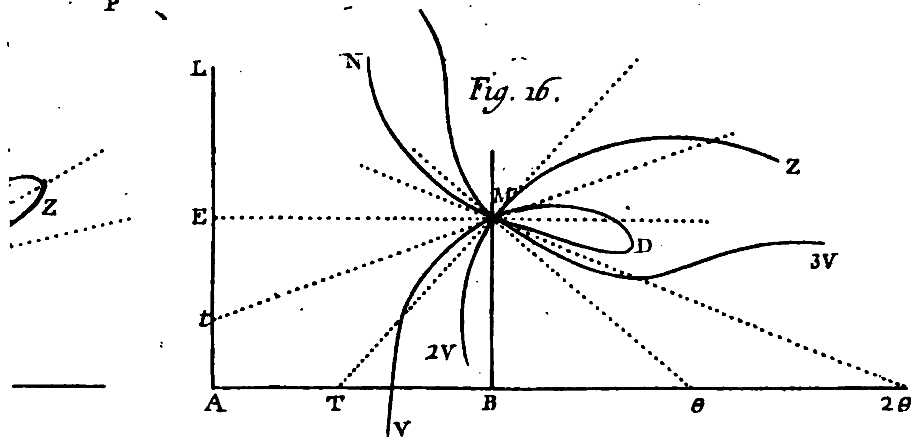

X
L
Z
Fig. 7.
M
N
D
P

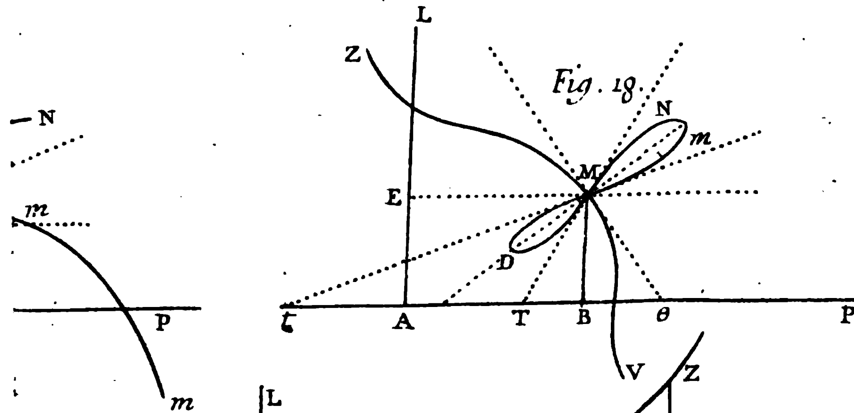

e
3M
Z
L
Fig. 9.
2M
E
M
N
S
A
B

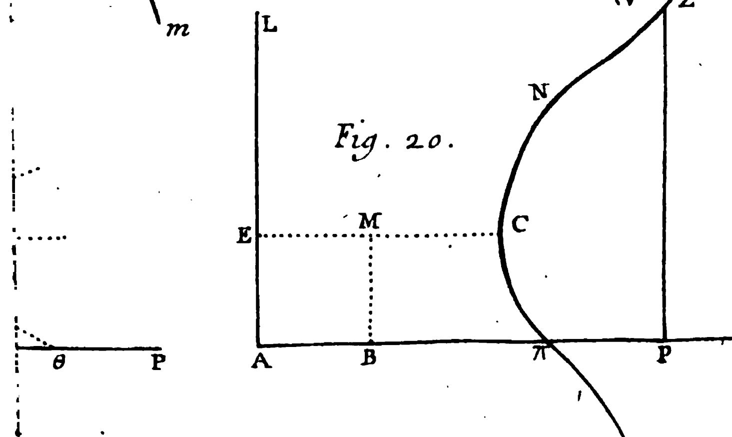

e
Z
N
M
Fig. 11.
B


L
Fig. 12.
N
Z
E
M
θ
D
m
A
T
B
t
P
V









Ph. Simonneau Sculp.

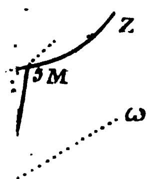
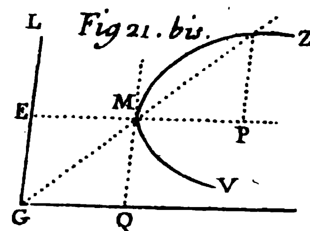
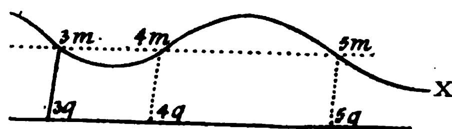

Z
3M
ω

Fig. 21.


L
Fig 21. bis.
Z
M
E
P
V
G
Q


3m
4m
5m
X
3q
4q
5q

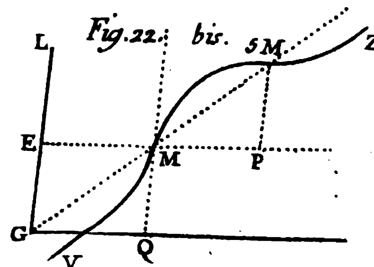
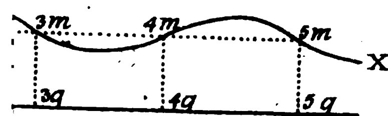
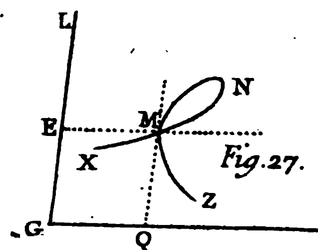
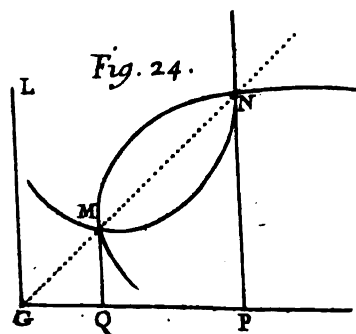
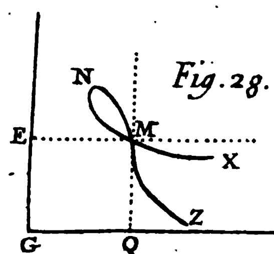

L
Fig. 22. bis.
5M
Z
E
M
P
G
V
Q

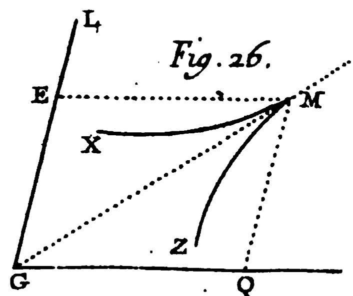
Fig. 22.

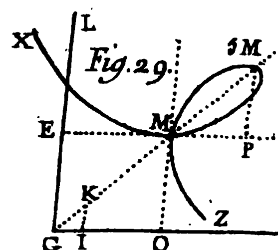

3m
4m
5m
X
3q
4q
5q

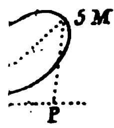

L
N
E
M
X
Fig. 27.
Z
G
Q


Fig. 24.
L
N
M
G
Q
P


N
Fig. 28.
E
M
X
Z
G
Q


L
Fig. 26.
E
M
X
Z
G
Q


X
L
Fig. 29.
3M
E
M
P
K
Z
G
I
Q



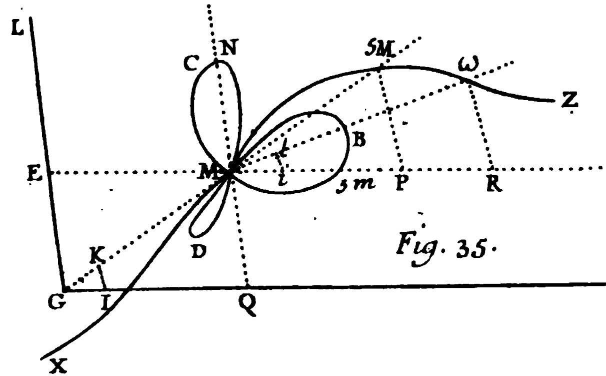


Fig. 35.

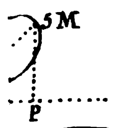


Fig. 33.

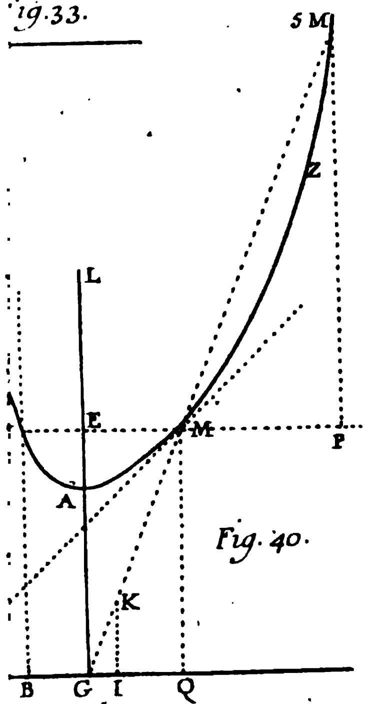


Fig. 40.

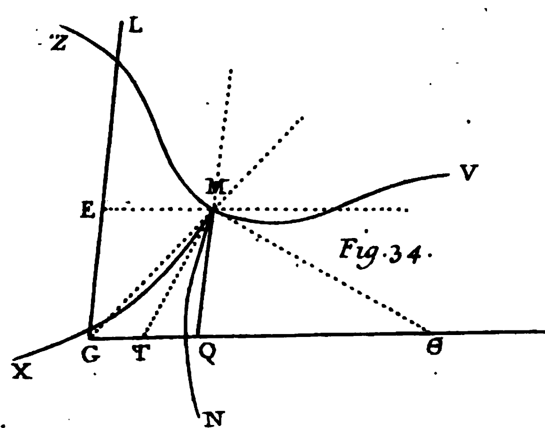


Fig. 34.

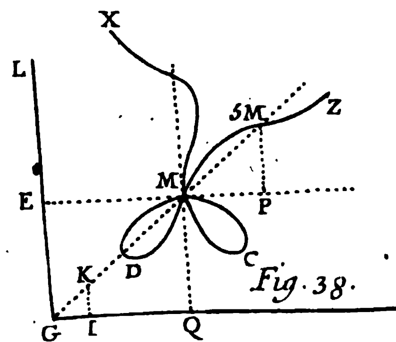


Fig. 38.

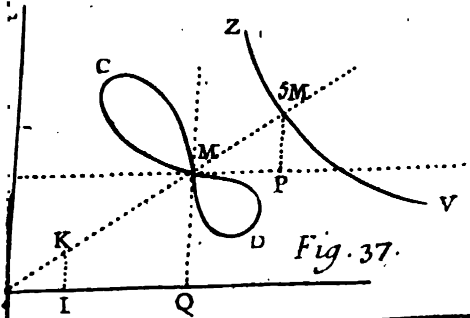


Fig. 37.

Ph. Simonneau Sculp.

EXAMEN CHYMIQUE DES VIANDES

Qu'on employe ordinairement dans les Boüillons ;

Par lequel on peut connoître la quantité d'Extrait qu'elles fournissent, & déterminer ce que chaque Boüillon doit contenir de suc nourrissant.

Par M. GEOFFROY le Cadet.

DE tous les Aliments, ceux qu'on tire des Végétaux devroient être les plus convenables aux malades, parce qu'ayant des principes moins développés, ils semblent être les plus analogues à la Nature, comme M. Lémery l'a prouvé dans un de ses Mémoires; cependant le boüillon fait avec les Viandes, est la nourriture que l'usage a établi, & qui passe généralement pour la plus saine & la plus nécessaire dans les cas de maladie, où elle est presque toûjours la seule employée.

Ce n'est que par l'examen des principes, que cette nourriture contient, qu'on peut être en état de la donner avec discernement, afin de ne pas courir le risque de la prescrire trop forte dans les circonstances où la diéte exacte est quelquefois le seul remede; ni trop foible, lorsque le malade exténué par une longue maladie, a besoin d'une nourriture, augmentée par degrés, pour réparer ses forces. C'est pour parvenir à des éclaircissements utiles sur cette proportion, que j'ai fait l'analyse des Viandes qui sont le plus d'usage, ou qui contiennent un suc nourrissant regardé comme salutaire; telles que le Bœuf, le Veau, le Poulet, &c. Je n'ai entrepris cette recherche que parce que l'analyse des Viandes n'a pas été portée aussi loin que celle des Plantes.

Feu M. Dodart, dont la mémoire est si respectable à l'Académie, & dont l'extrême exactitude est si connuë, s'est

contenté de dire en 1702*, qu'il tenoit de feu M. Bourdelin, que les chairs des Animaux boüillies en consommé, & ensuite mises à la distillation, ne rendoient pas moins de Sel volatil que si elles avoient été distillées cruës. Comme il paroît qu'on a négligé de déterminer la quantité d'extrait que ces consommés laissoient après l'évaporation, & ce que les Viandes pourroient avoir communiqué de leurs principes à l'eau, dans laquelle on les avoit fait boüillir; j'ai repris ce travail, afin d'ajoûter aux analyses déja connuës, cette partie négligée, qui est l'objet de ce Mémoire. Je me suis proposé d'y faire connoître la quantité & la qualité des principes des chairs cruës mises en distillation; ce qu'elles fournissent de principes aux extraits solides qu'on en tire par l'ébullition & l'évaporation; la différence essentielle des Sels volatils qu'on en tire; ce que les chairs dépoüillées de leurs sucs & séchées contiennent encore de principes: enfin je déterminerai dans un autre Mémoire, ce que les os & les matiéres osseuses peuvent fournir, dans la cuisson, d'extrait nourrissant.

* Hist. de l'Acad. des Sc. année 1702. p. 43.

CHAIR DE BOEUF.

Je commencerai par la chair de Bœuf: j'en ai pris une grosse piéce de tranche, dont j'ai fait ôter la graisse, les os, les cartilages & les membranes; de cette piéce de Bœuf j'ai fait couper plusieurs morceaux d'un poids égal de 4 onces. L'un de ces morceaux a été mis en distillation au Bain-Marie sans aucune addition. Il a fourni 2 onces 6 gros 36 grains de flegme ou d'humidité qui a passé dans le récipient. La chair restée séche dans la cornuë, s'est trouvée réduite au poids d'une once 1 gros 36 grains. Le flegme avoit l'odeur de boüillon; il a donné des marques de Sel volatil, puisqu'il a précipité en blanc la dissolution du Mercure sublimé corrosif, comme les purs Sels volatils ont coûtume de le faire, & le dernier flegme de la distillation en a donné des marques encore plus sensibles, en précipitant une plus grande quantité de la même dissolution.

Cette chair desséchée, qui pesoit 1 once 1 gros 36 grains,

ayant été mise dans une cornuë au fourneau de reverbero pour l'analyser, m'a donné d'abord un peu de flegme chargé d'Esprit volatil, qui pesoit 1 gros 4 grains : ensuite 3 gros 46 grains de Sel volatil & d'Huile fétide épaisse qui n'a pû s'en séparer.

La Tête-morte ou la matiére restée dans la cornuë, pesoit 3 gros 30 grains : c'étoit un charbon noir, luisant & léger qu'on a calciné dans un creuset à feu très-violent ; la calcination l'a réduit en cendres, qui pesoient 40 grains. Ces cendres exposées à l'air se sont humectées, & ont augmenté de poids. Elles ont été lessivées, & l'eau de leur lessive éclaircie, n'a point donné de marques de Sel alkali, mais de Sel marin, puisqu'elle a précipité en blanc la dissolution du Mercure dans l'Esprit de Nitre. Elle n'a causé aucun changement à la dissolution du sublimé corrosif, si ce n'est qu'après quelque temps de repos, il s'est formé au bas du vaisseau une espece de nuage, en forme de Coagulum leger : or nous ne connoissons jusqu'à present que les Sels qui sont de la nature du Sel ammoniac ou le Sel marin, qui précipitent en blanc la dissolution de Mercure par l'Esprit de Nitre, & seulement les terres absorbantes animales que j'ai observé précipiter legérement la dissolution du sublimé corrosif.

Sur 4 onces de chair de Bœuf séchée au Bain-Marie, j'ai versé autant d'Esprit de Vin bien rectifié ; le tout est demeuré en digestion pendant un très-long-temps, l'Esprit a tiré de cette Viande une foible teinture, il en a détaché quelques gouttes d'huile, la couleur qu'il a prise, étoit rousse avec une odeur fade : l'Huile de Tartre mêlée avec cet Esprit en a développé une odeur urineuse, son mélange avec la dissolution de Mercure par l'Esprit de Nitre a blanchi, il s'y est fait un précipité blanc-jaunâtre ; puis cette liqueur est devenuë ardoisée, à cause du Sel ammoniacal urineux, dont l'Esprit de Vin s'étoit imbu. L'essai de cet Esprit de Vin, mêlangé avec la dissolution du sublimé corrosif, a produit un précipité blanc, qui est devenu un peu jaune ; cette

précipitation ne s'eſt faite dans ce dernier cas, que par le développement d'une portion du Sel volatil urineux, qui a paſſé dans l'Eſprit de Vin avec le Sel ammoniacal.

Quatre onces de pareille chair de Bœuf ayant été cuites dans un vaiſſeau bien fermé, avec trois chopines d'eau, & la cuiſſon ayant été répétée ſix fois avec pareille quantité de nouvelle eau, pour tirer autant qu'il étoit poſſible tout le ſuc de cette Viande; j'ai raſſemblé tous ces boüillons, dont les derniers n'avoient plus qu'une odeur d'eau de Veau très-légére. Je les ai fait évaporer à feu lent, je les ai filtrés vers la fin de l'évaporation, pour en ſéparer une portion terreuſe, & il eſt reſté dans le vaiſſeau un extrait médiocrement ſolide, qui s'humectoit à l'air très-facilement, & qui s'eſt trouvé peſer 1 gros 56 grains. Ainſi il réſulte de cette expérience que puiſque 4 onces de Bœuf boüilli donnent 1 gros 56 grains d'extrait, une livre de ſemblable chair de Bœuf boüillie doit fournir 7 gros 8 grains de pareil extrait, plus 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, & 3 onces 2 gros de fibres dépoüillées de tout leur ſuc. Ce produit peut varier ſelon que l'animal aura été bien ou mal nourri dans de bons ou de mauvais herbages. Il peut varier auſſi, ſi la chair que l'on choiſit pour l'expérience eſt plus ou moins fraîche. Il faut remarquer que le boüillon fait d'une bonne chair de Bœuf, ne ſe met preſque jamais en gelée, ſi l'on ôte de la chair, les membranes, les tendons & les cartilages. Or j'entends par gelée, non l'extrait ci-deſſus, mais le boüillon qui ſe met de lui-même en une maſſe claire & tremblante lorſqu'il eſt froid.

L'extrait de cette chair de Bœuf, qui peſoit 1 gros 56 grains, a fourni dans ſon analyſe 1 gros 2 grains de Sel volatil, attaché aux parois du Récipient, non pas en ramifications, comme le ſont ordinairement les Sels volatils, mais en criſtaux plats, formés la plûpart en parallelepipedes; l'Eſprit & l'Huile qui ſont venus enſemble après le Sel volatil peſoient 38 grains. Le Sel fixe de Tartre, mêlé avec ce Sel volatil, a paru augmenter ſa force, ce qui pourroit faire

soupçonner ce dernier d'être un Sel ammoniacal urineux; & ce soupçon est d'autant mieux fondé, que les cristaux de ce Sel volatil se forment à peu-près comme ceux du Sel volatil de l'Urine, qu'on sçait être différents des autres Sels volatils tirés des chairs des animaux.

La Tête-morte ou le charbon resté dans la cornuë étoit très-rarefié & très-leger, il ne pesoit plus que 6 grains. Sa lessive a précipité en blanc la dissolution du Mercure comme a fait la lessive de la cendre de chair de Bœuf cruë, dont j'ai parlé ci-dessus.

Les 6 gros 36 grains de la masse des fibres de Bœuf desséchées, analysées de la même façon, ont rendu 2 gros d'un Sel volatil de la forme des Sels volatils ordinaires, & qui s'est attaché aux parois du Récipient en ramifications, & mêlé d'un peu d'Huile fétide assés épaisse, mais moins brune que celle de l'extrait qui a été tirée du boüillon. L'Esprit qui étoit de couleur citrine, séparé de son huile, a pesé 36 grains. La Tête-morte pesoit 1 gros 60 grains.

La lessive qu'on a faite après la calcination n'a pû altérer la dissolution du Mercure par l'Esprit de Nitre, parce que lorsqu'on a analysé ces fibres de Bœuf desséchées, elles étoient déja dénuées, non-seulement de tout leur Sel essentiel ammoniacal, mais encore de leur Sel fixe qui est de nature de Sel marin; puisqu'elles ont passé pour la plus grande partie avec les Huiles dans l'eau pendant la longue ébullition de cette chair. Cette lessive a seulement teint légérement de couleur d'Opale, la dissolution du sublimé corrosif, preuve qu'il y restoit encore une portion huileuse : on sçait que les matiéres sulphureuses précipitent cette dissolution en noir ou plûtôt en violet foncé, dont la couleur d'Opale est un commencement.

On connoît donc par l'analyse de l'extrait des boüillons, que je viens de rapporter, qu'il passe dans l'eau pendant l'ébullition de la chair de Bœuf un Sel ammoniacal qu'on peut regarder comme le Sel essentiel de cette Viande, & qui paroît dans la distillation de l'extrait sous une forme differente de celui qu'on retire de la chair, lorsqu'on la distille cruë,

comme on a fait dans les analyses anciennes, & il y a apparence que c'est ce même Sel qui se sépare du Sang par les Urines après la nutrition, puisque le Sel volatil que j'ai retiré de cet extrait a beaucoup de rapport, comme je l'ai fait voir, avec celui qu'on retire de l'Urine par son analyse. Le Sel que l'on tire de l'extrait sera donc le produit de ce Sel ammoniacal naturel dans les Viandes, qui est plus facile à sublimer avec celui qui se tire ensuite des fibres: & l'on peut dire, après cette opération, que les Sels volatils sont presque toûjours un produit du feu, puisque des principes si peu sensibles ne peuvent se développer qu'autant que la matiére se brûle & se calcine par la violence du feu pour former le Sel volatil.

J'ai détaillé mes opérations sur la chair de Boeuf, pour rendre un compte exact de mon travail, qui a été le même sur toutes les autres Viandes que j'ai examinées. Je ne repeterai point ces procedés dans la suite de ce Mémoire, de crainte d'être trop long.

CHAIR DE VEAU.

Quatre onces de chair, prise dans une Roüelle de Veau, distillée cruë au Bain-Marie, comme la chair de Boeuf, a donné 2 onces 6 gros 54 grains d'humidité; la chair desséchée pesoit 1 once 1 gros 18 grains, après avoir fourni ses principes par l'analyse. Le *Caput-mortuum* pesoit 2 gros 51 grains, sa lessive a donné des marques de Sel marin, comme l'a fait celle du Boeuf.

Quatre onces de pareille chair boüillie, ont fourni un boüillon un peu gélatineux: ce boüillon réduit en extrait en a laissé 2 gros 30 grains assés solide, quoique difficile à dessécher: la masse des fibres desséchées s'est trouvée réduite au poids de 5 gros 62 grains. Ainsi une livre de Roüelle de Veau contient 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, une once un gros 48 grains d'extrait, & 2 onces 7 gros 32 grains de fibres desséchées ou entiérement dépoüillées de leur suc.

En comparant les produits de ces premiéres opérations

faites sur la chair de Bœuf & sur celle de Veau, je trouve que le Veau a, par poids de 4 onces, 18 grains de flegme plus que le Bœuf; qu'il fournit 46 grains d'extrait de plus, & que ses fibres desséchées pesent 46 grains de moins. Ainsi puisque ses fibres desséchées pesent moins que celles de Bœuf, puisqu'on en tire plus de flegme & plus de parties gommeuses, ne peut-on pas présumer que les liqueurs qui circulent dans le corps du Veau, où elles sont destinées, non-seulement à la nutrition, mais aussi à l'accroissement de l'Animal qui n'est pas encore parfait, doivent contenir des particules plus disposées à une prochaine solidité, que les liqueurs circulantes dans le corps du Bœuf où elles n'ont d'autre destination que celle de la nutrition. C'est aussi par cette raison que l'extrait qu'on tire de la chair de Veau devient plus ferme que celui de la chair de Bœuf, parce qu'il contient plus de ces particules gommeuses destinées à devenir solides pour prolonger les os, les cartilages, les tendons, &c. Et il est impossible de donner la même fermeté à l'extrait de la chair de Bœuf, si l'on n'y joint pas dans la cuisson ses os, ses cartilages & ses membranes, qui ne sont, pour ainsi dire, qu'un composé de ces particules gommeuses.

Les 2 gros 30 grains d'extrait de chair de Veau m'ont donné par l'analyse un gros 12 grains tant en Esprit qu'en Huile & en Sel volatil, qui avoit le caractere urineux comme celui du Bœuf; la Tête-morte restée dans la cornüe n'a pesé qu'un gros.

Les 5 gros 62 grains de la masse de fibres desséchées qui ont fourni l'extrait, étant mis de même au feu de réverbere, ont fourni un gros 66 grains de Sel volatil, qui portoit le caractere des Sels volatils ordinaires, c'est-à-dire, qu'il étoit en ramifications, & un gros 37 grains d'Huile & d'Esprit volatil; la Tête-morte restée dans la cornüe pesoit 2 gros 18 grains.

Je reprends ici les poids de ces Têtes-mortes ou charbons qui ne peuvent être sujets à erreur, sur-tout par rapport à leur pesanteur. Celui de l'extrait de Bœuf ne pesoit que 6

grains, celui de l'extrait de Veau en pesoit 72, ainsi 66 grains de différence de poids entre ces deux charbons d'extraits.

Le charbon de fibres desséchées de Bœuf ne pesoit qu'un gros 60 grains, & celui du Veau, 2 gros 18 grains; autre différence de 30 grains.

Ces deux poids excédents, joints ensemble, donnent un total de 96 grains de parties, regardées comme solides, qui sont de plus dans le Veau que dans le Bœuf. Ces parties solides, jointes aux particules gommeuses dont j'ai parlé ci-dessus, qui sont destinées à devenir solides pour l'accroissement de l'Animal, étant numériquement beaucoup plus considérables dans le Veau que dans le Bœuf, ne pourroit-on pas conjecturer que si ces particules conservoient dans nos corps, lorsque nous les prenons pour nous nourrir, la même destination qu'elles semblent avoir dans le corps de l'Animal, dont elles sont tirées, la chair de Veau seroit convenable aux enfants, parce qu'ils croissent, & aux malades qui ont souffert une déperdition ou un amaigrissement considérable, & que la chair de Bœuf conviendroit mieux aux adultes & aux personnes qui joüissent d'une santé parfaite; mais je ne donne ceci que comme une conjecture.

CHAIR DE MOUTON.

Quatre onces de chair de Mouton prise dans cette partie qu'on nomme vulgairement l'*E'clanche*, mise en distillation au Bain-Marie comme le Bœuf & le Veau, ont donné 2 onces 6 gros 30 grains de flegme.

La chair dépoüillée de son humidité, qui pesoit une once un gros 42 grains, distillée au feu de réverbere, après avoir fourni tous ses principes, a laissé dans la cornüe un charbon qui ne pesoit que 2 gros 36 grains, & dont la lessive a donné des marques de Sel marin, c'est-à-dire, qu'elle n'a point altéré la dissolution du sublimé corrosif, & qu'elle a précipité en blanc la dissolution de Mercure.

Quatre onces de la même chair de Mouton boüillie a fourni 2 gros 58 grains d'extrait: ainsi une livre de pareille chair

chair doit donner 11 onces 5 gros 32 grains de flegme, une once 3 gros 16 grains d'extrait, 2 onces 7 gros 24 grains de fibres dépoüillées de leur suc.

Les 2 gros 58 grains d'extrait distillé au feu de réverbere ont fourni environ autant de Sel volatil que le Bœuf, & plus que le Veau ; les crystaux en ont été mieux formés. La Tête-morte n'a plus pesé que 54 grains ; sa lessive a donné des marques d'un Sel marin plus abondant que dans les autres Viandes.

Les fibres de ce Mouton étant séchées, après avoir fourni leur extrait, n'ont plus pesé que 5 gros 60 grains ; ce qui prouve évidemment que le Mouton contient plus de parties nourrissantes & de principes volatils que le Bœuf & le Veau, puisqu'il laisse dans son analyse moins de matiéres fixes. L'analyse de ces fibres a donné assés de Sel volatil ramifié, tel qu'il se trouve toûjours dans l'analyse des fibres desséchées des Viandes : la Tête-morte a pesé 2 gros, sa lessive n'a que très-peu donné de preuves de Sel marin avec les dissolutions mercurielles, parce que la plus grande partie des Sels se sont volatilisés, ou ont passé en ammoniac dans l'extrait.

POULET.

Le Poulet étant une des Viandes qu'on employe ou seule ou avec les autres Viandes ordinaires des boüillons, j'en ai fait un semblable éxamen ; j'en ai pris un jeune qui pesoit 9 onces 4 gros 48 grains ; après l'avoir concassé, on l'a fait boüillir dans plusieurs eaux, qui en ont tiré un extrait gélatineux pesant 7 gros 36 grains : la chair & les os desséchés à l'étuve comme les autres Viandes n'ont plus pesé qu'une once 6 gros 40 grains. Ainsi ce Poulet devoit contenir 6 onces 6 gros 44 grains d'humidité, j'en ai fait distiller séparément à feu de réverbere 6 gros 18 grains de la chair séche, & 3 gros 9 grains des os secs (qui est tout ce que j'en ai pû retirer) la chair m'a donné du Sel volatil en belles ramifications ; la Tête-morte pesoit un gros 6 grains, la lessive de ce charbon n'a donné aucune marque de Sel.

Les os ont fourni, outre les autres principes, un peu de Sel volatil de la même figure que celui des extraits tirés des autres Viandes; la Tête-morte pesant 2 gros 8 grains, n'a rien donné de remarquable dans les essais qu'on a fait de sa lessive.

L'extrait de la chair, qui pesoit 7 gros 36 grains, a fourni un Sel volatil figuré comme celui du Bœuf, mais qui n'est venu qu'en forçant le feu; la Tête-morte pesoit 2 gros 20 grains, sa lessive a donné des marques de Sel marin.

COQ.

Un vieux Coq, qui pesoit 2 livres 2 onces 6 gros, m'a donné 4 onces 7 gros 66 grains d'extrait gommeux, transparent & très-sec.

CHAPON.

La chair d'un Chapon dégraissé, pesant une livre 7 onces 2 gros 48 grains, a fourni une once 5 gros d'extrait qui a eu peine à se sécher.

PIGEONS.

Deux jeunes Pigeons de voliére, qui pesoient 14 onces, ont donné un extrait assés solide pour devenir sec, qui a pesé 7 gros 35 grains.

FAISAN.

Un Faisan, qui pesoit 2 livres, m'a donné un extrait salin qui n'a pû se désécher suffisamment pour former un extrait solide, quoique je l'aye laissé très-long-temps à l'étuve; cet extrait pesoit 2 onc. 4 gros 16 grains; ainsi cette chair fournit plus d'extrait que le Bœuf.

PERDRIX.

Deux Perdrix, pesant une livre 2 onces 5 gros, ont rendu une once six gros 30 grains d'extrait moins solide que celui du Faisan.

POULET D'INDE.

Un Poulet d'Inde, peſant 9 livres, a rendu 12 onces 43 grains d'un extrait aſſés ſolide, qui n'a pû ſe ſécher, & qui eſt toûjours reſté huileux & comme réſineux.

Il réſulte de tout ce que je viens de lire, que l'extrait tiré des Viandes boüillies, doit être regardé comme la partie nourriſſante que fournit la chair des animaux dans les boüillons qu'on en fait, ſans que je prétende pour cela qu'elle ſoit employée toute entiére à la nutrition, puiſqu'elle contient encore des parties groſſiéres que l'action de la digeſtion en ſépare comme inutiles par les voyes ordinaires, plus ou moins abondamment, ſuivant l'état du malade. Cela ſuppoſé, il faut faire voir ce qu'un malade prend de nourriture dans un boüillon ordinaire de demi-ſeptier de liqueur.

Si, ſuivant l'uſage, ce boüillon eſt fait d'une livre de tranche de Bœuf, d'une livre & demie de Roüelle de Veau, & d'une moitié de Chapon, qui peut peſer 14 onces; ſi toutes ces Viandes, peſant enſemble 3 livres 6 onces, ſont cuites dans 3 pintes $\frac{1}{2}$ d'eau, réduites à 3 chopines pour en faire ſix boüillons, qui doivent ſe mettre en gelée, lorſque la cuiſſon des Viandes eſt ſuffiſante, ces ſix boüillons contiendront 2 onces 5 gros 34 grains d'extrait au moins; car l'extrait total de toutes ces Viandes ſeroit plus fort de 3 gros 12 grains, ſi on avoit répété l'ébullition, comme je l'ai fait, lorſque j'ai voulu avoir tout le ſuc nourriſſant; & ſi le malade les prend tous les ſix dans les 24 heures, il aura pris par conſéquent environ 2 onces 5 gros 34 grains d'une nourriture, qui, comparée avec le poids entier du pain & de la Viande qu'il peut manger en ſanté, paroît trop forte : ainſi, c'eſt à tort que le Vulgaire s'imagine que les malades ne ſont pas ſuffiſamment nourris par les boüillons.

Il y a même des circonſtances où ils le ſeroient aſſés par les Eaux de Veau ou de Poulet, puiſque la premiére, qui ſeroit faite avec une livre de Veau ſur 2 pintes d'eau, réduites à moitié, contiendroit une once un gros 48 grains d'extrait;

& que l'eau d'un Poulet qui peut peſer 9 onces 4 gros & quelques grains, donne 7 gros 36 grains d'extrait. Il faut auſſi faire remarquer que les Sels volatils & les Huiles de ces extraits, étendus dans les boüillons, ſont plus développés, & qu'ils doivent paſſer plus vîte dans le ſang, que ceux qui étant encore embarraſſés dans les fibres groſſiéres des Viandes, occupent plus long-temps l'action de la digeſtion, ſans compter qu'il eſt plus aiſé d'unir à cette nourriture qu'à toute autre, le ſuc des Plantes qu'on juge à propos d'y joindre pour tempérer ſon action dans le Sang.

Je ne répéterai point ici le rapport qu'ont entre eux les extraits des autres Viandes, parce que je joints à ce Mémoire une Table qui contient par colomnes les produits détaillés de toutes mes opérations.

TABLE du produit des Expériences faites sur les Viandes.

CHAIR DE BOEUF CRUE distillée au Bain-Marie.	Onces.	Gros.	Grains.
Premiére Eau.			
Quatre onces de chair de Bœuf ont donné de premiére humidité	2	6	36
Bœuf séché au Bain-Marie..	1	1	36
Total	4		
Extrait du Bœuf boüilli.			
Quatre onces de Bœuf ont produit d'extrait	......	1	56
Les fibres séchées	......	6	36
Total	......	8	20
Eau tirée par le Bain-Marie...	2	6	36
A quoi il faut ajoûter un 2d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever	......	1	16
Total de l'humidité qui se trouve contenüe dans 4 onces de chair de Bœuf, 2 onces 7 gros 52 grains.			
Total	4		
Poids des masses de la chair de Bœuf pour une livre.			
Une livre de seize onces contiendra en eau	11	6	64
En extrait	......	7	8
Fibres séchées	3	2	
Total	16		
Analyse de l'extrait de 4 onces de Bœuf qui ont produit 1 gros 56 grains.			
Sel volatil	......	1	2
Huile & Esprit	......	......	38
Tête-morte, ou charbon	......	......	6
Perte	......	......	10
Total	......	1	56

Analyse des 6 gros 36 grains de fibres desséchées.	Onces.	Gros.	Grains.
Sel volatil	......	2	
Esprit volatil	......	......	36
Tête-morte, ou charbon	......	1	60
Perte	......	2	12
Total	......	6	36
CHAIR DE VEAU CRUE.			
Eau premiére.			
Quatre onces de cette chair ont donné de premiére humidité	2	6	54
Veau séché au Bain-Marie...	1	1	18
Total	4		
Extrait de Veau.			
Quatre onces de Veau ont produit d'extrait	......	2	30
Les fibres séchées	......	5	62
Eau par le Bain-Marie	2	6	54
Total	3	7	2
A quoi il faut ajoûter un 2d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever, ou la perte..	......	......	70
Total	4		
Eau de la 1.re évaporation...	2	6	54
Eau de la 2de évaporation...	......	......	70
Total	2	7	52
Poids des Masses de la chair de Veau pour une livre.			
Une livre de 16 onces contiendra en eau	11	6	64
En extrait	1	1	48
Fibres séchées	2	7	32
Total	16		

Analyse de l'extrait de 4 onces de Veau, 2 gros 30 grains.	Onces.	Gros.	Grains.
Sel volatil... } Huile & Esprit... }	.....	1	12
Tête-morte...	.....	1	
Perte...	.....	.....	18
Total...	.....	2	30
Analyse de 5 gros 62 grains de fibres de Veau desséchées.			
Sel volatil...	.....	1	66
Huile & Esprit...	.....	1	37
Tête-morte...	.....	2	18
Perte...	.....	.....	13
Total...	.....	5	62
CHAIR DE MOUTON distillée au Bain-Marie.			
Eau premiére.			
Quatre onces de cette chair ont donné de premiére humidité...	2	6	30
Mouton séché au Bain-Marie.	1	1	42
Total...	4		
Extrait de Mouton boüilli.			
Quatre onces de Mouton ont produit...	.....	2	58
Fibres séchées...	.....	5	60
Eau par le Bain-Marie...	2	6	30
Total...	3	7	4
A quoi il faut ajoûter un 2d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever...	.....	.....	68
Total...	4		
Poids des Masses pour 1 liv.			
Une livre de 16 onces contiendra en eau...	11	5	32
En extrait...	1	3	16
Fibres séchées...	2	7	24
Total...	16		

Analyse de l'extrait de 4 onces de Mout. 2 gros 58 grains.	Onces.	Gros.	Grains.
Sel volatil...	.....	1	
Huile & Esprit...	.....	1	
Tête-Morte...	.....	.....	54
Perte...	.....	.....	4
Total...	.....	2	58
Analyse des 5 gros 60 grains de fibres desséchées.			
Sel volat. & Huile inséparable.	.....	3	12
Esprit...	.....	.....	24
Tête-morte...	.....	2	
Perte...	.....	.....	24
Total...	.....	5	60
CHAIR D'AGNEAU.			
Une livre de chair sans graisse.			
Extrait difficile à sécher, & toûjours humide...	1	1	39
POULET.			
Chair & Os, 9 onces 4 gros 48 grains.			
Eau...	6	6	44
Extrait...	.....	7	36
Fibres charnuës & os séchés après l'extrait...	1	6	40
Total...	9	4	48
Analyse des 7 gros 36 grains d'extrait de Poulet.			
Esprit, Huile & flegme...	.....	4	15
Sel volatil & Huile...	.....	.....	58
Tête-morte...	.....	2	20
Perte...	.....	.....	15
Total...	.....	7	36
Analyse des fibres desséchées du Poulet, 6 gros 18 grains.			
Esprit & Huile épaisse...	.....	3	34
Sel volatil...	.....	1	
Tête-morte...	.....	1	6
Perte...	.....	.....	50
Total...	.....	6	18

	Onces.	Gros.	Grains.
Analyse des os de Poulet après l'ébullition, 3 gros 9 grains.			
Esprit, Huile & Sel volatil...	......	......	69
Tête-morte...	......	2	8
Perte...	......	......	4
Total...	......	3	9
VIEUX COQ.			
pesant 2 liv. 2 onces 6 gros.			
Extrait gelatineux sec...	4	7	66
CHAPON.			
Chair de Chapon dégraissé, 1 liv. 7 onc. 2 gros 48 gr.			
Extrait difficile à sécher...	1	5	
PIGEONS DE VOLIÉRE.			
Deux Pigeons, pesant 14 onc.			
Extrait solide en Tablettes...	......	7	35
FAISAN.			
Chair de Faisan, pesant 2 liv. avec les os.			
Extrait mol...	2	4	16
Fibres séchées avec les os...	9	2	32
Eau...	20	1	24
Total...	32		
Analyse de simple chair de Faisan, 4 onces.			
Eau...	2	6	36
Esprit & Huile...	......	4	
Sel volatil...	......	2	36
Tête-morte...	......	2	48
Perte...	......	......	24
Total...	4		
Analyse de l'extrait de Faisan, 1 gros 56 grains.			
Esprit & Huile...	......	......	48
Sel volatil...	......	......	36
Tête-morte...	......	......	36
Perte...	......	......	8
Total...	......	1	56

	Liv.	Onces.	Gros.	Grains.
Fibres séchées de Faisan, sans os, 6 gros 36 grains.				
Esprit, Sel volatil & Huile épaisse...		......	5	10
Tête-morte...		......	1	12
Perte...		......	......	14
Total...		......	6	36
PERDRIX.				
Deux vieilles Perdrix, pesant 1 liv. 2 onces 5 gros.				
Extrait huileux ou gras & humide...		1	6	30
POULET D'INDE.				
Un Poulet d'Inde, pesant 9 liv.				
Extrait gras & huileux quoiqu'en Tablettes...		12	......	43
COEURS DE VEAUX.				
Deux cœurs de Veaux, pesant 11 onces 4 gros, ont rendu d'extrait qui n'a pû se mettre en gelée, ni se sécher...		......	3	60
FOYE DE VEAU.				
Un Foye pesant 2 livres 7 gros.				
Extrait qui s'humectoit...		2	1	60
PIEDS DE VEAUX.				
Huit pieds pesant 6 livres 8 onces.				
Eau...	3	5	4	45
Extrait gommeux & sec...	......	8	3	27
Os humides au sortir du boüillon, avec cartilages...	2	10		
Total...	6	8		

Analyse d'une once d'extrait gommeux & sec de pieds de Veau.	Onces.	Gros.	Grains.	MACREUSES. *Deux Macreuses du poids de 2 liv. 7 onces.*	Onces.	Gros.	Grains.
Esprit & Huile................	......	3		Extrait solide qui s'humecte aux changements des temps.	2	1	50
Sel volatil........................	......	2	18				
Tête-morte.......................	......	2	25				
Perte..............................	......	......	29				
Total..............	1						



LA

LA COURBE DESCENSUS ÆQUABILIS DANS UN MILIEU RESISTANT COMME UNE PUISSANCE QUELCONQUE DE LA VITESSE.

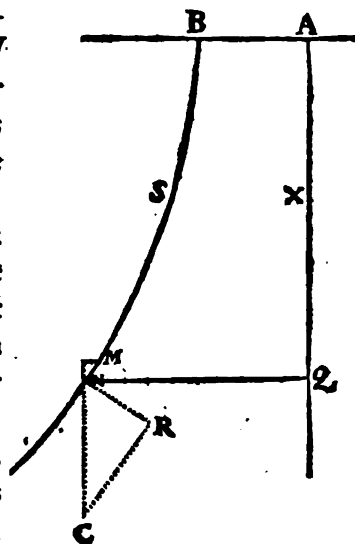
Par M. DE MAUPERTUIS.

I. EN 1687 M. Leybnitz, à l'occasion de sa dispute avec M. l'Abbé Catelan sur les Forces vives, proposa à ses adversaires, de trouver la Courbe dans laquelle un corps tombant par la seule force de la pesanteur, s'approche également de l'horizon dans des temps égaux. Par-là il leur faisoit voir que puisqu'on peut régler d'une maniére arbitraire le rapport entre les chûtes d'un corps & les temps qu'il employe à ces chûtes, la considération des temps qui étoit la seule ressource des adversaires des Forces vives ne devoit en aucune maniére entrer dans l'estimation de ces forces. M. Leybnitz vouloit aussi faire comprendre à M. l'Abbé Catelan que l'Analyse de Descartes ou l'Algebre ordinaire n'étoit pas suffisante, comme il le prétendoit, pour résoudre toutes sortes de Problemes. 29 Novemb. 1730.

Ce Probleme, qui ne fut point résolu par ceux à qui il étoit proposé, reçût en 1694 différentes Solutions des plus célébres Géometres. Au lieu de prendre l'horizon pour terme des approches du corps, on prit un poinct quelconque; & M.[rs] Bernoulli distinguerent leurs Solutions par les élégantes constructions qu'ils donnerent de la Courbe *Descensus æquabilis*. Enfin M. Varignon en 1699 donna au Probleme une espece de généralité, en ne l'astreignant ni à l'hypothese de Galilée sur les vîtesses, ni au rapport d'égalité entre les chûtes & les temps. *Vide Acta Lipf. 1694.* *V. les Mem. de l'Ac. 1699 & 1703.*

Jusqu'ici tout s'est passé dans le Vuide, & nous n'avons aucune Solution du Probleme dans un Milieu résistant. On voit assés que cette circonstance doit changer extrémement la nature de la Courbe *Descens. æquab.* En effet cette Courbe qui est la seconde parabole cubique dans le cas proposé par M. Leybnitz, c'est-à-dire, dans le cas où le corps dans le vuide doit s'approcher de l'horizon proportionnellement aux temps, cette Courbe, dis-je, dans un milieu résistant, comme une puissance quelconque de la vîtesse, devient transcendente du second degré.

II. Comme l'hypothese particuliére d'une résistance proportionnelle au quarré de la vîtesse donne un moyen de trouver cette Courbe qui ne seroit pas applicable aux autres hypotheses, je commencerai par chercher la Courbe dans cette hypothese, je donnerai ensuite toutes les Courbes *Descens. æquab.* pour quelque hypothese de résistance que ce soit.



Soit la courbe que l'on cherche, $BN = s$, $AQ = x$, $QN = y$; la force de la pesanteur $= p$; la vîtesse du corps dans quelque poinct N de la courbe $= v$.

Le corps tombant dans la courbe BN, sa force accélératrice dépend de deux causes; l'une est la force de la pesanteur, l'autre la résistance du milieu. Pour trouver ce que la pesanteur y contribüe, ayant pris la constante NC pour p, je la décompose en deux autres forces, l'une NR perpendiculaire, l'autre RC parallele à la courbe; il est clair que cette derniére seule accélere le corps; ainsi $\frac{pdx}{ds}$ est la force accélératrice produite par la pesanteur.

Mais la résistance du milieu s'oppose à cette force, & en

doit détruire une partie ; or cette résistance étant proportionnelle au quarré de la vîtesse, si l'on prend $\frac{1}{n}$ pour son intensité, l'on aura pour la force retardatrice du corps $\frac{vv}{n}$; & pour la force accélératrice actuelle produite par les deux causes $\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}$. Or la force accélératrice, multipliée par le temps, donne la différence de la vîtesse ; l'on a donc ici $(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n})\, ds = vdv$, ou $npdx = vvds + nvdv$.

III. Pour avoir v dans cette équation, je la multiplie par c^{fs} (c étant le nombre dont le logarithme est l'unité, & f un coëfficient que je vais déterminer) j'ai donc $npc^{fs}dx = vvc^{fs}ds + nc^{fs}vdv$, dont l'intégrale est $\int npc^{fs}dx = \frac{1}{f}vvc^{fs} - \frac{2}{f}\int c^{fs}vdv + n\int c^{fs}vdv$. Je cherche maintenant la valeur de f propre à faire évanoüir les deux derniers termes, & je trouve $f = \frac{2}{n}$; l'intégrale de l'équation est donc $np\int c^{\frac{2s}{n}}dx = \frac{n}{2}vvc^{\frac{2s}{n}}$, & $vv = \frac{2p}{c^{\frac{2s}{n}}}\int c^{\frac{2s}{n}}dx$.

IV. Maintenant puisque dans la courbe que l'on cherche, les descentes verticales doivent être proportionnelles aux temps, l'on a $\frac{ds}{v}$ proportionnel à dx ; ou prenant q pour une arbitraire constante $\frac{ds^2}{vv} = \frac{dx^2}{qq}$. Substituant dans cette équation l'expression de la vîtesse, l'on a $\frac{ds^2}{2pc^{-\frac{2s}{n}}\int c^{\frac{2s}{n}}dx} = \frac{dx^2}{qq}$ ou $\frac{c^{\frac{2s}{n}}ds^2}{2pdx^2} = \frac{1}{qq}\int c^{\frac{2s}{n}}dx$. Différentiant cette équation, elle devient $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, qui est l'équation de la courbe *Descens. æquabilis.*

V. Cette équation n'est pas intégrable ; cependant on peut

construire la courbe par les Quadratures, comme l'on va voir.

Dans l'équation $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, l'on n'a supposé aucune des différentielles constante; si donc on fait $ddx = 0$, l'on aura $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, ou $qq(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + nqqdyddy = npdx^3$.

Si maintenant l'on fait $dy = \frac{zdx}{q}$, $ddy = \frac{dzdx}{q}$; ces valeurs substituées dans l'équation, l'on aura $\frac{dx}{q}(qq+zz)^{\frac{3}{2}} + nzdz = npdx$. D'où l'on tire $dx = \frac{nzdz}{np - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{3}{2}}}$.

Construisant donc la courbe DF, dont l'abscisse $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qnz}{np - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faisant ensuite une seconde courbe DH, dont l'abscisse $DI =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI = z =$ l'abscisse DE de la premiére, l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$. Ainsi l'on aura les deux coordonnées de la courbe que l'on cherche.

On peut remarquer que la premiére courbe DF est quarrable par logarithmes; car si l'on fait $qq + zz = tt$, l'on change la premiére expression $\frac{qnzdz}{np - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{3}{2}}}$, en $\frac{qqntdt}{npq - t^3}$ qui est intégrable par logarith.

Ayant communiqué cette solution, & cette construction de la Courbe à M. Bernoulli, il m'envoya une maniére de

perfectionner la construction, qui est digne de son illustre Auteur; je vais la rapporter ici, extraite de sa Lettre, sur la permission qu'il m'en a donnée.

« Soit O le centre de gravité de l'aire DFE, d'où l'on « abbaisse la perpendiculaire OG: par la nature de ce centre, « on a $DHI = \frac{DFE.DG}{q}$; donc $y = \frac{DHI}{q} = \frac{DFE.DG}{qq}$ « $= \frac{x.DG}{q}$, c'est pourquoi l'on peut se passer de l'aire DHI; « car supposant la souscentrique DG donnée dans l'aire donnée « DFE, on trouve la valeur de y, en faisant $q:DG::x$ « $: \frac{x.DG}{q} = y$; or dans la pratique il est fort aisé de connoître « la souscentrique des figures, en mettant la figure DFE en « situation horizontale sur le tranchant d'un plan vertical pa- « rallele FE, que l'on avance ou recule d'un mouvement toû- « jours parallele jusqu'à ce que la figure DFE soit en équili- « bre; cela fait, la partie DG emportée par le tranchant sera « la souscentrique. «

Voici la démonstration de la construction de M. Bernoulli. L'on a par la nature du centre de gravité $DG = \frac{1}{x}\int z dx$; c'est-à-dire (à cause de $x = \frac{DFE}{q}$ & de $y = \frac{DHI}{q}$) $DG = \frac{q}{DFE} DHI$; Donc $DHI = \frac{DG.DFE}{q}$ & $y = \frac{DG.DFE}{qq} = \frac{x.DG}{q}$.

VII. Voilà le Probleme résolu pour un milieu résistant, comme le quarré de la vîtesse : cette hypothese, outre qu'elle est assés conforme à la nature, a encore pour le calcul cet avantage particulier, qu'on peut trouver en termes finis l'expression de la vîtesse, ce qui n'arrive pas dans les autres hypotheses de résistance proportionnelle à quelqu'autre puissance de la vîtesse.

VIII. On peut cependant par une autre méthode se passer de l'expression de la vîtesse, & résoudre le Probleme en général, pour un milieu qui résisteroit comme une puissance quelconque de la vîtesse.

En suivant les mêmes raisonnements qui ont conduit à l'équation $(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n})ds = vdv$, on trouvera dans l'hypothese d'une résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vîtesse $(\frac{pdx}{ds} - \frac{v^e}{n^{e-1}})ds = vdv$.

L'on a de plus par la propriété de la courbe $\frac{ds}{v} = \frac{dx}{q}$; l'on a par cette derniére équation v & dv, $= \frac{qds}{dx}$ & $\frac{qdxdds - qdsddx}{dx^2}$; ces valeurs substituées dans la premiére, donnent pour l'équation de la courbe *Descens. æquab.*

$$\frac{pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1}}{n^{e-1}} = dx^{e-3}(qqdxdsdds - qqds^2ddx).$$

Si l'on fait dx constant, cette équation devient $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$; ou $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dyddy$, qui est l'équation de toutes les courbes *Descens. æquab.* pour telle hypothese de résistance que l'on voudra.

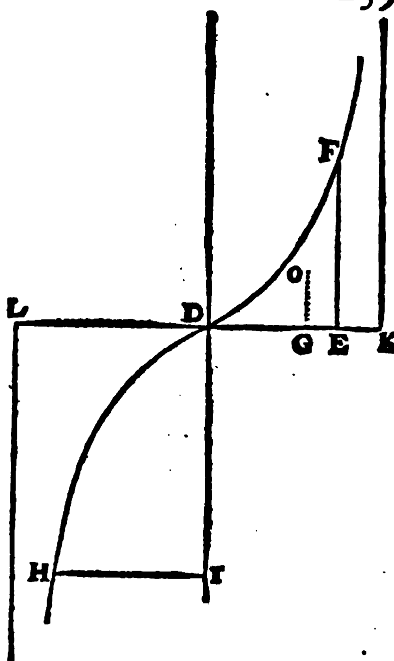
IX. Toutes ces courbes sont construisibles par les quadratures; car faisant $dy = \frac{zdx}{q}$ $ddx = \frac{dzdx}{q}$, & substituant ces valeurs dans la derniére équation, il vient $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e (dx^2 + \frac{zz}{qq}dx^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}dx^e . zdz$. D'où l'on tire $dx = \frac{n^{e-1}zdz}{pn^{e-1} - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{e+1}{2}}}$.

Construisant donc la courbe DF dont l'abscisse $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qn^{e-1}z}{pn^{e-1} - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{e+1}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faisant ensuite la courbe DH, dont l'abscisse $DI =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI =$ l'abscisse DE de la premiére,

l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$, l'on a donc ainsi les deux coordonnées de la courbe *Descens. æquab.*

X. Ayant l'aire DFE de la premiére courbe, l'on pourra se passer de la seconde par la considération du centre de gravité, comme l'on a vû dans la solution particuliére : car, ayant $x = \frac{DFE}{q}$, l'on aura toûjours $y = \frac{x.DG}{q}$.



XI. Si on suppose $n = \infty$, c'est-à-dire, que la résistance du milieu soit nulle; l'équation générale $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e(dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dyddy$, se réduira à $pdx^3 = qqdyddy$, ou $pxdx^2 + padx^2 = \frac{qq}{2}dy^2$; ou $dy = \frac{dx}{q}\sqrt{(2pa + 2px)}$, ou enfin $y = \frac{2\sqrt{2}}{3pq}(pa + px)^{\frac{3}{2}} + b$.

D'où l'on voit que dans le cas d'une résistance nulle, ou dans le vuide, la courbe *Descens. æquab.* est une parabole cubique, comme l'ont trouvé M.rs Leybnitz, Bernoulli & Varignon. Dans ce cas il est évident que les deux courbes DF, DH, sont quarrables.

XII. Dans certaines hypotheses de résistance, l'équation générale de la courbe *Descens. æquab.* se peut ramener aux premiéres différences, & même aux quantités finies.

1.° Si, par ex. on suppose que le milieu résiste en raison simple directe de la vîtesse du mobile, e sera $= 1$, & l'équation générale deviendra $\frac{dyddy}{(p-q)dx^2 - qdy^2} = \frac{1}{qq}dx$, ou

$\frac{2q\,dy\,ddy}{(p-q)\,dx^2 - q\,dy^2} = \frac{2}{q}dx$, dont l'intégrale est $l\,A\,dx^2 - l((p-q)\,dx^2 - q\,dy^2) = \frac{2}{q}x$; d'où repassant aux nombres, & (prenant c pour le nombre dont le Logarithme $= 1$), l'on a $\frac{A\,dx^2}{(p-q)\,dx^2 - q\,dy^2} = c^{\frac{2}{q}x}$, ou $dy = \frac{dx}{\sqrt{q}} \sqrt{(p - q - Ac^{-\frac{2}{q}x})}$; & faisant $p = q$, & $-A = BB$, cette équation devient $dy = \frac{B}{\sqrt{p}} c^{-\frac{x}{p}} dx$, dont l'intégrale est $y = -Bc^{-\frac{x}{p}} \sqrt{p} + b$, ou $(b - y)\,c^{\frac{x}{p}} = D$; d'où l'on voit que dans cette hypothese, la courbe *Descens. æquab.* est une courbe exponentielle.

2.° Si l'on suppose que le milieu résiste en raison doublée de la vîtesse; l'équation générale $(pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1} qq\,dx^{e-2}\,dsdds)$ deviendra $qq\,ds^3 + nqq\,ds\,dds = np\,dx^3$, qui est la même que nous avons trouvée dans la solution particuliére. Cette équation se peut ramener aux premiéres différences, mais avec des quantités exponentielles; car lui donnant cette forme $\frac{nqq\,ds\,dds}{np\,dx^3 - qq\,ds^3} = 1$, & multipliant tout par $\frac{3ds}{n}$, l'on a $\frac{3qq\,ds^2\,dds}{np\,dx^3 - qq\,ds^3} = \frac{3ds}{n}$, dont l'intégrale est $l\,A\,dx^3 - l(np\,dx^3 - qq\,ds^3) = \frac{3s}{n}$, ou repassant aux nombres $A\,dx^3 = c^{\frac{3s}{n}} (np\,dx^3 - qq\,ds^3)$.

3.° Si l'on suppose que le milieu résiste en raison triplée de la vîtesse du mobile, l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1} qq\,dx^{e-2}\,dsdds$, deviendra $\frac{ds\,dds}{pnn\,dx^4 - q^3 ds^4} = \frac{dx^{-1}}{nnqq}$, ou $\frac{\frac{nn}{q}dx^2\,ds\,dds}{\frac{pnn}{q^3}dx^4 - ds^4} = dx$, ou $\frac{nn\,dx^2}{q} \left(\frac{2\,ds\,dds}{dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})} + ds^2} + \frac{2\,ds\,dds}{dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})} - ds^2}\right) : dx^2 \sqrt{(\frac{pnn}{q^3})} = 4dx$, dont l'intégrale est $n\sqrt{(\frac{q}{p})}$. $l\,A\,(dx^2\sqrt{(\frac{nnp}{q^3})} + ds^2) - l(dx^2\sqrt{(\frac{nnp}{q^3})} - ds^2) = 4x$,

ou

ou repassant aux nombres, l'on a $\left(\frac{An\sqrt{p}dx^2+Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2}\right)^{n\sqrt{\frac{q}{p}}}$ $=c^{4x}$ ou $\frac{An\sqrt{p}dx^2+Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2}=c^{\left(\frac{4}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)x}$ ou $An\sqrt{p}dx^2$ $+Aq\sqrt{q}ds^2=c^{\frac{4x}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}}(n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2)$.

4.° Si l'on suppose maintenant que le milieu résiste uniformément, on aura $e=0$, & l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1}-q^e ds^{e+1}=n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$ deviendra $\frac{p}{n}dx-ds=\frac{qqdsdds}{ndx^2}$, ou $pdx-nds=\frac{qqdsdds}{dx^2}$, dont l'intégr. est $\frac{2px-2ns+2na}{qq}$ $=\frac{ds^2}{dx^2}$.

5.° Si l'on suppose que le milieu résiste en raison simple inverse de la vîtesse du mobile; l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1}$, &c. devient $\frac{p}{nn}-\frac{1}{q}=\frac{qqdsdds}{nndx^3}$, ou $pqdx^3-nndx^3=q^3dsdds$, dont l'intégrale est $(2pqx-2nnx+2nna)dx^2=q^3ds^2$, ou $(2pqx-2nnx+2nna)\,dx^2=q^3dx^2+q^3dy^2$, ou $((2pq-2nn)x+2nna-q^3)\,dx^2=q^3dy^2$, ou $q^{\frac{3}{2}}dy=dx(\sqrt{(2pq-2nn)x+2nna-q^3})$ ou $(y+b)$ $q\sqrt{q}=\frac{1}{3pq-3nn}(2pqx-2nnx+2nna-q^3)^{\frac{3}{2}}$ équation à la 2de parabole cubique.

Quoiqu'un milieu résistant en raison inverse de la vîtesse du mobile n'ait point apparemment lieu dans la nature, c'est cependant une chose fort digne de remarque, que la 2de parabole cubique qui est dans le vuide la courbe *Descens. æquab.* la soit encore dans cette hypothese; il arrive en quelque maniére à cette courbe, ce qui arrive à la Cycloïde, qui étant la courbe isochrone dans le vuide, l'est encore dans un milieu résistant en raison simple directe de la vîtesse, outre qu'elle l'est aussi dans un milieu dont la résistance seroit uniforme.

Toutes ces hypotheſes de réſiſtance dont nous venons de parler, & pluſieurs autres donneroient des conſtructions particuliéres de la courbe *Deſcenſ. æquab.* dont quelques-unes pourroient être plus ſimples que celle que nous avons donnée. Dans l'hypotheſe, par ex. d'une réſiſtance proportionnelle à la ſimple vîteſſe, la courbe ſe peut conſtruire ſans quadrature, par le moyen de la ſeule Logarithmique; dans les autres, en quarrant des courbes exponentielles.

Mais j'ai mieux aimé donner une conſtruction générale pour toutes les hypotheſes de vîteſſe, que de détailler toutes ces conſtructions particuliéres.



DE LA NATURE DE LA TERRE EN GÉNÉRAL, ET DU CARACTERE DES DIFFÉRENTES ESPECES DE TERRES.

Par M. DE REAUMUR.

NOus ne sçavons que trop, qu'en Physique, les premiers principes sont ce qui nous est le moins connu. On n'a pû encore nous donner d'idées claires de ces Estres simples, dont on a voulu faire les Eléments des autres Corps, de la Terre principe, du Soufre principe, du Sel principe, &c. Il n'est pas même bien sûr que nous puissions parvenir à les connoître, au moins par la voye des expériences, la seule pourtant, en Physique, sur qui on puisse compter. Il y a bien loin apparemment d'où nous pouvons partir jusqu'à des êtres simples. La décomposition, comme la division des Corps, ne peut-elle point être poussée jusqu'à l'infini? De quelque côté qu'on considére la Nature, l'infini semble le seul terme qui lui soit prescrit. Aussi la Terre, dont nous nous sommes proposés d'éxaminer le caractére dans ce Mémoire, n'est nullement un être simple; ce n'est point cette Terre élémentaire d'Aristote, & de bien d'autres, c'est une Terre à nous plus connuë, quoiqu'on n'ait pas pris soin de s'en faire des notions assés déterminées.

23 Juin 1730.

Il seroit extrêmement à désirer d'avoir des idées bien distinctes des premiers principes, nos connoissances en seroient plus complettes, mais les connussions-nous bien, nous ne devrions pas y remonter, lorsque nous avons à déterminer la nature de la plûpart des corps qui sont l'objet de nos recherches. Nous expliquerions mal la nature de ces corps, nous n'en

donnerions pas les idées qu'on en veut avoir, si nous la prenions dès les premiers principes. Il faut nous arrêter bien plus près, & il ne nous est pas toûjours permis de nous arrêter aussi près qu'il en seroit besoin. On veut me faire connoître un corps, un composé, qu'on me fasse connoître les éléments prochains, dont il a été formé, fussent-ils eux-mêmes très-corps, très-composés. J'emploirai volontiers une comparaison, quoique peu noble, qui me paroît très-propre à faire voir qu'on nous instruit mal, quand on passe tout d'un coup à des principes trop éloignés; & c'est malheureusement le défaut de la Chymie, à qui nous devons néanmoins tant de belles connoissances physiques, elle ne nous montre que rarement les éléments immédiats. J'amene de l'Amérique, ou des Indes, quelqu'un dont la Physique a toûjours été la passion, je le suppose très-versé dans toutes les manipulations de Chymie, mais très-ignorant sur tout ce qu'on a imaginé en Europe, pour flater le goût; je le conduis chés un Pâtissier, où je lui montre des gâteaux de toutes especes, des biscuits, & de toutes les sortes de friandises qui sont l'ouvrage de cet art. Je lui demande ce que chacun de ces composés a de propre, quelle est leur nature? si pour m'en rendre raison, il a recours à l'analyse, qu'il en vienne à des distillations, à des cohobations, &c. il pourra me dire qu'il y a plus de parties huileuses dans certains gâteaux, que d'autres ont plus de Sels, que d'autres ont plus d'acides; il pourra déterminer la proportion qui est entre les parties terreuses, & les Soufres, & les Sels. Mais m'en aura-t-il donné plus d'idée des compositions sur lesquelles je l'ai interrogé, que sur celles de quelques Pierres, ou de quelques Plantes, qui pareillement traitées auroient donné des principes assés semblables? Il devoit me dire, que tel gâteau n'est fait que d'eau commune, de farine, & de beurre; que les œufs sont entrés dans un autre; que dans un autre, on a fait entrer de la levûre de biére, que le sucre est entré dans la composition d'un autre, qu'un autre est fait d'amandes pilées. Enfin il falloit encore me dire, que selon la façon dont le beurre a été mêlangé avec la farine,

on a fait des gâteaux feüilletés ou non feüilletés. Si le Pâtissier fait connoître à nôtre Philosophe les matiéres qu'il employe, & la façon dont il les employe, il verra qu'il a eû tort de recourir à des quintessences, pour découvrir la nature de ces compositions. Quand la Nature travaille à former des gâteaux d'une autre espece, des Pierres à grains, des Pierres feüilletées, des Métaux, des Minéraux, elle n'a pas toûjours des quintessences à employer, elle se sert des sables, des soufres, des bitumes, tels qu'ils sont. Pour faire entrer les bitumes, les soufres dans ses ouvrages, souvent elle ne les analyse pas plus que le Pâtissier analyse son beurre. En un mot, c'est avec des composés qu'elle forme la plûpart des corps, qui sont l'objet de nos considérations.

Je sçais bien qu'on peut pousser ses recherches jusqu'à examiner quelle est la nature de chacun des composants d'un composé, que nous le devons même, quand ils nous donnent prise; mais ce que je sçais aussi, c'est que nous ne pouvons pas porter loin les décompositions, & peut-être y en a-t-il prodigieusement à faire avant d'arriver à des êtres simples, aux premiers éléments.

Il y a un certain nombre de matiéres, toutes très-composées, qui se combinent assés ordinairement dans la plûpart des corps, l'Eau, la Terre, le Feu, ou les matiéres inflammables, les Sels, &c. Quelques-uns les ont toutes prises pour des éléments; d'autres, selon leur prédilection pour quelques-unes, n'en ont pris que deux ou trois, ou qu'une seule pour premier principe. Mais avant de leur donner cette qualité, on les a bien plus épurées par l'imagination, qu'elles ne le sont quand elles tombent sous nos sens. La Terre est une de celles à qui on a été le plus disposé à accorder ce rang. Aussi tant que nous nous en tiendrons aux principes immédiats, aux principes, qui eux-mêmes peuvent en avoir d'autres, la Terre nous paroîtra la principale base des corps physiques. Mais cette Terre qui entre dans la composition des corps, n'est que celle qui est continuellement sous nos yeux, & qui pourtant ne nous est pas assés connuë. On

n'en a eû que des idées vagues, on n'a point considéré quelles sont ses principales propriétés, celles qui constituent son caractere. J'ai cherché à les déterminer, & à distinguer les différentes especes de Terres par le plus ou le moins qu'elles participent à chacune des propriétés communes à toute Terre. J'ai éprouvé le besoin que j'avois d'avoir des caracteres fixes de la Terre en général, & des especes en particulier, dans quelques essais que j'ai faits sur la physique des Minéraux, dans les observations que j'ai voulu faire sur les diverses Terres, les plus favorables à la végétation des Plantes; je l'ai de même éprouvé, quand j'ai voulu suivre les matériaux qu'employent divers Arts, tels que les arts des Verriers, ceux des Potiers, ceux des faiseurs de Fayance & de Porcelaine; ils demandent tous qu'on sçache, & ce que c'est que la Terre en général, & ce qu'ont de particulier ses différentes especes.

Nous donnons, sans hésiter, le nom de *Terre* à l'amas de matiéres qui occupe un champ, où des Plantes croissent, ou peuvent croître; nous donnons ce nom à un tout, dont nous imaginons que la Terre fait une grande partie. Qu'on en sépare les grosses & les menües pierres, le reste sera encore Terre pour nous, & même le sera davantage. Qu'on ait ensuite recours à quelque expédient, comme à des lotions, pour séparer de la masse ces petits grains durs que nous appellons *Sable;* après que tout le Sable sensible aura été séparé, nous conserverons encore le nom de Terre à la matiére restante, & selon l'idée que nous nous sommes faite de la Terre, nous croirons qu'elle le mérite même mieux, qu'elle en est plus terre. Mais cette matiére restante, cette Terre, qu'est-elle? n'est-elle elle-même qu'un Sable beaucoup plus fin que celui que nous avons enlevé? qu'un Sable dont les grains, pris séparément, échapent à nos yeux par leur petitesse? ou est-elle une matiére qui différe véritablement du Sable, qui ait un caractere particulier & bien marqué?

Les Physiciens n'ont pas trop cherché à prendre parti sur l'un ou l'autre de ces sentiments, ou plûtôt ils semblent avoir crû qu'il n'y avoit pas à délibérer entre deux sentiments.

Quand Rohault a parlé de l'Argile, qui eſt une eſpece de Terre très-commune, il a dit, ſans héſiter, *Que la production de l'Argile n'eſt pas beaucoup différente de celle du Sable; qu'il faut ſeulement ajoûter que ſes grains ſont encore probablement plus petits, pour laiſſer entr'eux de plus petits intervalles, & ainſi composer un tout que l'eau puiſſe difficilement pénétrer.* L'autorité de M. de la Quintinie ne ſeroit pas comparée en Phyſique à celle de Rohault, ſi on y faiſoit uſage des autorités; mais il avoit eu plus d'occaſion que ce Phyſicien, d'examiner les différentes eſpeces de Terres, & comme lui, il veut qu'elle ne ſoit, en général, qu'un amas de grains de Sable extrémement déliés. Les Terres labourables font naturellement prendre cette idée; on y trouve une grande quantité de Sable, aiſé à reconnoître; de-là on eſt porté à croire que les molécules, parmi leſquelles ce Sable eſt mêlé, ne ſont eux-mêmes que des amas de grains ſemblables, mais imperceptibles à nos yeux, quand ils ſont ſeuls, & que ce que nous appellons Terre, ſont des amas de grains de Sable extrémement fins.

Cependant puiſque les grains de Terre échapent à nôtre vûë, par leur petiteſſe, nous ſommes hors d'état de décider par cette voye, s'ils ſont ſimplement un Sable plus diviſé, plus broyé, ou s'ils ſont d'une nature différente de celle du Sable. Les grains de Sable de différentes groſſeurs que nous appercevons, ne ſont pas une induction ſuffiſante pour nous déterminer à aſſûrer qu'ici tout ce qui ne nous eſt pas viſible, ne différe de ce qui l'eſt, que par ſon peu de groſſeur. Quelqu'un dont les yeux ſeroient, par rapport aux nôtres, ce que les nôtres ſont par rapport à ceux de certains inſectes, pourroit ne voir les Pierres parſemées dans un champ que de la groſſeur dont nous paroiſſent les grains de Sable; ſon induction le tromperoit ſouvent, s'il aſſûroit que les grains de Sable du champ ne ſont autre choſe que des fragments de ces Pierres. Il éviteroit cet erreur, s'il venoit à examiner les propriétés des Pierres mêmes, & ceux de ces prétendus fragments; les Pierres de tel champ ſe réduiroient en Chaux, pendant que le Sable du même champ ſe vitrifieroit. Ce n'eſt

aussi qu'après avoir éxaminé les propriétés du Sable, & celles de la Terre proprement dite, que nous pourrons décider s'ils sont une même matiére, ou des matiéres différentes; & cet éxamen nous apprendra que l'un & l'autre ont leurs propriétés particuliéres, & que la Terre ne différe peut-être pas moins du Sable, que le Sable différe des Métaux & des autres Minéraux.

Des expériences très-communes sont capables de nous donner ici de grandes lumiéres. Nous voyons journellement que les corps de certaines classes ne sont nullement ou peu pénétrables à l'eau. Elle ne sçait point passer au travers des ouvrages d'Or, d'Argent, de Plomb, de Verre. Quand les Cristaux, les Cailloux ont été exposés à l'air pendant un certain temps, l'eau ne peut plus s'y insinuer, au moins en quantité sensible. Au contraire non seulement l'eau s'introduit dans les Sels, elle se les approprie, elle les dissout, elle semble ensuite faire un tout avec eux. Enfin l'eau s'insinüe dans des corps d'une troisiéme classe; en s'y insinuant, elle augmente leurs dimensions sous certains rapports, tels sont la plûpart des bois & les matiéres solides qui nous viennent des Plantes, les peaux, les chairs desséchées des Animaux; en un mot tous les corps que nous nommons *spongieux*; parce qu'ils ont tous une qualité que l'Eponge a autant ou plus qu'aucun autre, que tous s'abreuvent d'eau. L'eau dont ils sont abreuvés augmente leur volume, & quand elle vient à s'en évaporer, ils retournent à leurs premiéres dimensions.

Les caracteres de ces trois classes sont très-marqués; les corps qui se rangent sous la premiére, doivent être regardés comme fort différents de ceux qui se rangent sous la troisiéme. Il est pourtant aisé de s'assûrer, dès qu'on cherche à s'instruire, que le Sable doit être mis dans la premiére, & que c'est dans la derniére que la Terre doit être placée. L'expérience la plus simple suffit ici. Qu'on remplisse un vase de Sable, qu'on arrose ce Sable d'eau peu-à-peu, & qu'à diverses reprises on en verse même jusqu'à ce qu'elle le surnage. Si avant d'avoir commencé à humecter ce Sable, on a marqué où

où se terminoit sa surface, ce qui est toûjours très-facile, sur-tout si l'on fait l'expérience dans quelque bouteille de Verre transparent, on observera que la surface du Sable bien humecté ne se sera aucunement élevée. Il arrivera même quelquefois qu'elle s'abbaissera un peu, parce que l'eau, qui a pénétré, a pû faire changer de place quelques grains de Sable, les porter dans des espaces qui, quoique capables de loger des grains, étoient restés vuides. Qu'on fasse ensuite évaporer cette eau, la surface du Sable restera toûjours au même endroit. Rien n'a dû contribuer à l'élever ou à l'abbaisser. La vûë simple nous met en état de juger que les grains de Sable sont semblables à des fragments de Cristaux ou de Cailloux, qu'ils sont de même transparents, & que leurs surfaces sont polies, serrées ; en un mot on juge qu'ils sont impénétrables à l'eau, comme les Cailloux & les Cristaux. Ils ont pareillement une pesanteur spécifique qui surpasse celle de l'eau. Qu'a donc pû faire l'eau qui a été versée sur une masse de Sable? ce n'a été que de descendre par les petits passages qui lui sont restés, & de remplir les vuides qui sont entre les grains. Rien ne tend jusques-là à augmenter la masse, & rien ne tendra à la diminuer, lorsque l'eau s'évaporera. Seulement la masse humectée à fond, doit être plus solide, résister mieux à la force qui par sa pression tendroit à faire glisser les grains. L'eau les lie mieux entre eux que ne faisoit l'air ; les grains sont alors plus difficiles à déplacer. C'est une Physique connüe de reste de ceux qui voyagent dans des chemins où il se trouve du Sable.

Il en sera de même, si au lieu de remplir le vase, dont nous venons de parler, de Sable grossier, on le remplit d'un Sable prodigieusement fin. L'eau dans ce second cas n'est pas plus en état de pénétrer dans la substance de chaque grain, qu'elle l'étoit dans le premier cas ; elle n'a pas plus de facilité à s'introduire dans des fragments de Cailloux & de Cristaux que dans des Cristaux & des Cailloux entiers ; elle n'a pas plus de facilité à pénétrer dans des fragments de Sable que dans les gros grains dont ils ont fait partie. Elle ira remplir

les vuides que les petits grains laissent entr'eux, si elle trouve des routes pour y arriver; de sorte que quelque fine que soit la poudre sablonneuse, contenüe dans un vase, on n'augmentera aucunement son volume, si on l'humecte peu-à-peu, aussi ne lui fera-t-on rien perdre de celui qu'elle avoit moüillée, si on la séche doucement; mais les circonstances de ne l'humecter ni de la sécher trop brusquement sont nécessaires, pour des raisons que nous expliquerons ailleurs.

Remplissons un vase pareil à celui où nous avons mis jusqu'ici nos différents Sables, de quelques graines fines, de Millet, de graines de Navette, &c. & versons par-dessus cette graine la quantité d'eau qui pourra être reçûë. L'eau ira d'abord occuper les intervalles que les grains laissent entr'eux, mais elle ne s'en tiendra pas là, comme elle fait quand le vase est plein de Sable; peu à peu elle s'introduira dans chaque grain, elle les gonflera tous. Bien-tôt le vase sera plus que plein, les grains s'éleveront par-dessus ses bords; & si on veut ensuite les faire sécher, on ramenera la masse à son premier volume: il en arriveroit de même, si au lieu de graines, on eût employé de la sciûre de bois.

Enfin prenons un vase rempli d'une Terre séche, ou pour éviter actuellement les difficultés qui se peuvent trouver à bien remplir le vase, prenons un morceau d'une Terre solide bien séche, & dont toutes les dimensions soient aisées à mesurer; un morceau de Glaise, par exemple, à qui on aura donné la figure d'un cube, d'un parallelepipede, d'un cylindre. Humectons cette Terre séche, & après que nous aurons eu donné à l'eau le temps de la pénétrer, mesurons une seconde fois ses dimensions, nous les trouverons toutes augmentées; faisons ensuite sécher cette même masse de Terre, & nous la ramenerons à son premier volume. En un mot, une masse de Terre, comme un morceau de bois, acquiert du volume lorsque l'eau la pénétre, & en perd quand l'eau s'en évapore.

Ces observations simples & communes nous conduisent, ce me semble, bien directement à regarder chaque molecule, chaque grain de Terre, comme un petit corps spongieux que

l'eau peut pénétrer & diſtendre, & par conſéquent comme un corps compoſé de parties fléxibles. Au lieu, que les grains de Sable ſont des corps roides, infléxibles, impénétrables à l'eau. Ces derniers ont auſſi une tranſparence que n'ont pas les grains de Terre; des corps ſpongieux n'ont pas une diſpoſition prochaine à la tranſparence.

Si les grains de Terre étoient compoſés de parties roides, qui laiſſaſſent ſimplement entr'elles des cavités propres à recevoir une certaine portion d'eau, tout ce qui en arriveroit, c'eſt que l'eau ſe logeroit entre les parties d'un grain, comme elle ſe loge entre les différents grains de Sable. La poudre de charbon qui eſt ſpongieuſe, mais compoſée de parties roides ne ſe renfle point par l'humidité, elle commence à s'éloigner de la Terre, & à s'approcher du Verre. Le volume de chaque grain de Terre, & celui de la maſſe entiére, ne ſeroit pas augmenté par l'eau ſi les grains étoient ſimplement ſpongieux, comme ceux du charbon. Mais l'eau ne s'introduit pas ſeulement entre les parties du grain, elle les écarte, comme elle écarte les fibres du bois, où elle s'inſinüe. Ce n'eſt pas une petite difficulté en Phyſique, que d'expliquer d'où l'eau prend la force, au moyen de laquelle elle diſtend les corps dans leſquels elle s'introduit, car cette force eſt prodigieuſe; ſon effet ne peut être arrêté par les plus grands fardeaux ſuſpendus au bout des cordes; des coins de bois humectés s'enflent, quoique renfermés entre des maſſes de roches, telles que les meules de Moulin, & les font ſauter. Je n'entreprends point actuellement d'expliquer la cauſe d'où dépend ce grand effet de l'eau, mais il nous ſuffit d'avoir commencé à établir, qu'une des principales propriétés de la Terre, une de celles qui la diſtingue des Cailloux, des Criſtaux, des Sables, &c. eſt d'être ſpongieuſe, & de ſe laiſſer renfler par l'eau. Il étoit plus important qu'il ne ſemble, de bien connoître cette propriété de la Terre, de ſçavoir qu'elle ne la partage point avec les Sables. Nous aurons bien-tôt occaſion de voir combien nous en pouvons tirer de lumiéres, par rapport à pluſieurs productions, ſoit de la Nature, ſoit de l'Art. Quand nous

viendrons, par exemple, à expliquer la formation des Pierres, nous verrons qu'elles ne ſont que du Sable & de la Terre, réünies en une maſſe. Nous aurons des caractéres pour diſtinguer les différentes eſpeces de Pierres, en faiſant voir les différentes proportions dans leſquelles ſont faits, dans les unes & dans les autres, les mêlanges de Terre & de Sable. Auſſi regardai-je cette propoſition, comme une des propoſitions fondamentales de cette partie de la Phyſique où on examine la compoſition des Minéraux, & des autres Corps terreſtres; nous ne la ſçaurions donc prouver trop ſolidement.

Il ſe fait journellement une ſorte de reproduction de la Terre très-propre à nous confirmer dans l'idée que nous avons priſe de chaque grain de Terre, comme d'un corps ſpongieux. Nous voyons, pour ainſi dire, renaître la Terre, chaque jour, par la décompoſition des corps, à la formation deſquels elle a beaucoup de part. Du bois, des feüilles, des Plantes ne ſont pas de la Terre, mais le Terreau, employé par les Jardiniers, n'eſt-il pas une eſpece de Terre? Si on ne veut pas encore le reconnoître pour tel, lorſqu'on l'étend ſur les couches, ſur les plattes-bandes, au moins ne héſitera-t-on pas à le prendre pour vraye Terre, lorſqu'il aura reſté expoſé à l'air pendant deux ou trois ans, qu'il aura aidé pendant ce temps à la végétation des Plantes; alors on ne pourra plus le diſtinguer de la Terre ordinaire des Jardins. Or, qu'eſt-ce que du Terreau? ce n'eſt que du fumier plus pourri; & qu'eſt-ce que ce fumier? ce ſont des pailles, des herbes, des feüilles d'arbres qui ont été corrompuës juſqu'à un certain point. A la Campagne, on fait des tas de toutes ſortes de feüilles, & de toutes ſortes de Plantes communes, comme des fougéres; on met même en tas, en quelques Pays, des arbuſtes, comme des Genêts ordinaires ou des Genêts épineux; ces Plantes ainſi amoncelées, ſont arroſées par l'eau des Pluyes; l'humidité qu'elle y entretient, les fait fermenter, elles ſe corrompent, elles ſe changent en fumier, qui porté dans les champs, y devient Terreau, & enſuite de véritable Terre. C'eſt ainſi qu'on rend chaque année à un champ, au moins une partie

de ce qu'on lui a ôté pendant la recolte. Voilà donc des Plantes redevenuës Terres, ou si l'on veut, on a retiré de ces Plantes ce qu'elles avoient de Terre. Qu'est-ce qu'étoient ces Plantes? des composés d'une infinité de tuyaux, ou de fibres spongieuses. Elles reparoissent sous la forme de Terre, après avoir été divisées en parties d'une extrême petitesse; à la vérité la division qui a été faite, n'est pas précisément semblable à celle qui se feroit par des haches, des ciseaux, des pilons; du bois, des feüilles réduites en la poudre la plus fine, ne sont pas précisement pour cela de la Terre. La division ici a été l'ouvrage de la fermentation. Le mouvement qu'elle produit, ne se réduit pas à séparer un tout en diverses portions, chacune semblable à celles qui formoient le tout. Elle divise, pour ainsi dire, chaque partie, elle la décompose; elle met les Soufres & les Sels les plus volatils en état de s'évaporer. Ils s'évaporent à mesure que les parties pourries se séparent, & qu'elles leur permettent de s'élever. A mesure donc que les parties de nos Plantes perdent plus de leurs Soufres & de leurs Sels volatils, & qu'elles se divisent en plus petits grains, elles se rapprochent davantage de la nature de la Terre commune; enfin elles se trouvent réduites à l'état de cette Terre, lorsque la division & l'évaporation ont été portées assés loin.

En suivant cette sorte de génération, ou de revivification de la Terre, nous voyons qu'elle a été tirée de corps fléxibles, de corps spongieux qui ont perdu une certaine quantité des parties qui entroient dans leur composition. La dissipation qui s'est faite de certaines parties ne paroît pas propre à augmenter la solidité de la tissure des parties d'où celles-là ont été dégagées, elles ne semblent que la devoir rendre moins dense, plus spongieuse. Ainsi il semble que chaque molecule de Terre doit être au moins aussi spongieuse, & même l'être davantage que chaque molecule de Plante. Enfin il est clair, au moins qu'un molecule, qu'un grain de Terre différe d'une partie d'une pareille grosseur de la Plante, en ce qu'elle a moins de Soufres & de Sels volatils, elle n'a gardé que les plus fixes des uns & des autres.

La fermentation qui se fait dans les Plantes, pour les réduire en fumier ou en Terreau, conserve non-seulement leur tissure spongieuse, elle donne de plus à la matiére qui paroît sous une nouvelle forme, une sorte de tissure poreuse qu'elle n'avoit pas auparavant. C'est ce qui est prouvé par une expérience que j'ai faite sur des feüilles de Vignes que j'ai mises chés moi en tas & à couvert, pour les y faire pourrir, sans se mêler avec d'autre Terre. Quand elles ont été pourries jusqu'à ce point où elles perdent leur nom pour prendre celüi de Terreau, elles ont fermenté vivement, & subitement avec les acides que j'ai versés dessus. Au lieu que l'Esprit de Nitre versé sur des feüilles vertes, sur des feüilles séches, ou sur des feüilles simplement commencées à pourrir, n'y produit aucune fermentation sensible.

Je sçais bien qu'il se peut faire une décomposition des Plantes qui nous donnera un résidu terreux, plus compacte, moins spongieux, moins propre à se renfler, & à se raccourcir, que les parties des Plantes ne l'étoient, & telles sont les cendres que nous laisse le bois brûlé. Mais ces cendres aussi approchent beaucoup plus de la nature du Sable, que de celle de la Terre, comme nous le prouverons ailleurs. Un agent plus violent que ceux qui agissent dans la fermentation, a exercé ses forces contre le bois; quand le feu l'a brûlé ç'a été dans un instant qu'il a enlevé une quantité considérable de matiéres; des matiéres, même peu volatiles, ont cedé à la force de son action, comme il paroît par la suye qui s'assemble dans les cheminées. Il a changé la tissure du tout, s'il a écarté certaines parties les unes des autres, il en a rapproché d'autres. Tout se passe plus paisiblement dans une fermentation aussi douce que celle qui occasionne la dissolution des Plantes, il n'y a que les parties les plus volatiles qui s'élevent. Il n'y a pas de mouvements assés considérables pour rapprocher des parties qui par leur tissure naturelle sont écartées, pour rendre compacte ce qui est spongieux.

Si après avoir dissout certaines Terres dans l'eau, c'est-à-dire, si après avoir agité de l'eau au fond de laquelle il y

avoit de la Terre, & l'avoir renduë bourbeuſe, on laiſſe raſſeoir cette eau dans un verre tranſparent, & qu'on obſerve ce qui ſe paſſe pendant qu'elle s'éclaircit; il ſemble alors que les formes de maſſes ſpongieuſes, que nous avons attribuées à chaque grain de Terre ſe manifeſtent. Du moins voit-on deſcendre vers le fond du verre des flocons ſemblables à ceux de la neige, ou à ceux qui nagent dans le lait caillé. Si on obſerve l'eau dans laquelle ſe précipite le Sable le plus fin, & où il s'y précipite auſſi lentement que fait la Terre dans l'eau dont nous venons de parler, on n'y apperçoit nullement de pareils flocons ; les grains de Sable n'en ſont point, & ne ſont pas propres à en former par leur réünion.

Il eſt encore à remarquer, que ſi après avoir rendu du Sable extrémement fin par la trituration, on l'abreuve de la quantité d'eau néceſſaire pour en former un petit gâteau, que dès que cette petite maſſe eſt ſortie des mains, & poſée à plat, qu'une couche d'eau vient couvrir ſa ſurface. Un gâteau de Terre pétri de la même maniére, ne paroîtra pas couvert d'une couche d'eau, elle ne s'aſſemble point ſenſiblement ſur ſa ſurface. Dans le premier cas, l'eau ne peut être retenuë que dans les interſtices des grains. Dans le ſecond, elle eſt dans les grains mêmes, & ce n'eſt que peu à peu qu'elle peut s'en dégager, c'eſt-à-dire, à meſure que celle de la ſurface s'évapore.

Quoique la propriété d'être ſpongieuſe, de ſe laiſſer renfler par l'eau qui la pénétre, ſoit ſelon moi une de celles qui caractériſe le mieux la Terre, & une de celles dont on peut faire le plus d'uſage dans l'explication des phénomenes, elle en a un autre qui va de pair, dont l'éxiſtence eſt plus aiſée à démontrer, & qui prouve même l'éxiſtence de la premiére. Le caractere le mieux marqué que nous ayons, pour diſtinguer les Métaux des Minéraux, c'eſt leur malléabilité ; de ce que, ſoit à froid, ſoit à chaud, ils ſoûtiennent les coups de marteau ſans ſe caſſer. Tous les compoſés que nous avons mis dans la claſſe des Métaux ont cette propriété ; quand ils ſont purs, quand ils ne ſont point alliés avec des matiéres

qui la leur ôtent, soit qu'on les frappe, soit qu'on les tire par une filiére, dont la force équivaut à celle de la percussion; on les étend sans les casser, ils sont ductiles. La Terre est aussi caractérisée par une espece de ductilité que n'ont ni les autres Minéraux, ni les Métaux. Sa ductilité est de l'espece de celle de la pâte; la Terre est pétrissable. Lorsqu'on la ramollie par l'eau, elle se laisse étendre, elle prend entre les doigts la forme qu'on veut lui donner, & elle la conserve. C'est à cette propriété de la Terre à qui nous sommes redevables du bas prix auquel sont tant d'ouvrages de Poterie & de Fayance, si commodes pour une infinité d'usages. Un ouvrier exercé fait prendre sur le Tour les figures de vases arrondis à une masse de Terre informe, & cela presque sur le champ.

Toutes les Terres n'ont pas cette propriété à un même degré; celles qui l'ont le plus, sont appellées des *Terres grasses*; & celles qui l'ont le moins, des *Terres maigres*. Les Terres les plus maigres, les moins ductiles, sont celles qui se rapprochent le plus du Sable, car cette ductilité, propre à la Terre, manque entiérement aux Sables. Une masse de Terre peut être maigre de deux maniéres, ou parce que la vraye Terre ne fait qu'une portion du tout, dans lequel entre une portion considérable de Sable. Ainsi nos Terres labourables sont-elles toutes mêlangées avec une quantité de Sable sensible, qui en peut être séparé par des lotions; elles ne sont souvent plus maigres les unes que les autres, que parce que le Sable y est mêlé en plus grande proportion. Mais diverses Terres sont par elles-mêmes, indépendamment du Sable avec lequel elles sont mêlées, moins ductiles, moins grasses que bien d'autres Terres, la tissure de leurs grains se rapproche plus de celle des Sables, & s'éloigne de celle des Terres les plus grasses. Ces remarques fournissent le fondement de la division des Terres en bien des especes, toutes aisées à caractériser.

Quoiqu'il soit très-sûr que le Sable ordinaire, que le Sable dont les grains sont sensibles, n'a aucunement la ductilité des

des Terres grasses. On doutera peut-être, & avec vrai-semblance, si ce manque de ductilité ne doit pas être attribué uniquement à la grosseur de ses grains ; si le Sable réduit en grains aussi fins que ceux de la Terre, ne donneroit pas de même une pâte traitable : car il est évident que plus les grains seront fins, & plus ils auront de disposition à se lier ensemble. Cependant j'ai fait réduire par un long broyement le Sable dans une poudre extrémement fine, & j'ai eu grand regret de voir que quelque trituré qu'il eût été, il ne faisoit jamais une pâte qui eût cette liaison, cette onctuosité, qui met les pâtes de Terre en état d'être travaillées. Lorsque je traiterai de la maniére de faire les différentes especes de Porcelaines, on verra combien j'ai dû désirer de parvenir à avoir une pâte de pur Sable qui fût ductile, & avec quels soins j'ai dû tenter les expériences qui pouvoient la faire espérer.

Mais quelques soins que j'aye pris pour faire bien broyer du Sable, on peut pourtant penser que la petitesse à laquelle j'ai réduit ces grains, n'approchoit pas de celle où la nature les peut amener, & de celle que la nature a réellement donnée aux grains qui composent les Terres grasses. J'ai craint que cela ne fut ainsi; mais des expériences m'ont prouvé que j'avois des pâtes de Sable très-peu traitables, quoique leurs grains ne fussent peut-être pas plus gros, ou peut-être le fussent moins, que les grains de Terre. La meilleure maniére de séparer le Sable de la Terre avec laquelle il est mêlé, est de détremper la masse composée dans une suffisante quantité d'eau, de faire du tout une eau bourbeuse; & de laisser ensuite reposer cette eau pendant quelque temps, c'est-à-dire, jusqu'à ce qu'elle commence à s'éclaircir. Les grains les plus gros & les plus pesants se précipitent les premiers, bien-tôt ils tombent au fond du vase: si on verse l'eau doucement par inclination, elle n'emporte avec soi que les parties les plus fines & les plus légeres qui y étoient restées suspendües. Si cette eau a été reçûë dans un second vase, & qu'on l'y laisse reposer pendant un temps plus long que celui où on l'a laissée dans le premier, peu à peu elle y dépose les parties

dont elle étoit chargée, elle reprend avec le temps sa premiére limpidité. Dans le premier vase il est resté un sédiment sablonneux, qui n'est plus mêlé avec une aussi grande portion de Terre qu'il l'étoit d'abord, & ce qui a passé dans le second vase est une Terre mêlée avec peu de Sable, ou avec le Sable le plus fin. Si on repete un nombre de fois suffisant des opérations semblables sur le sédiment sablonneux du premier vase, ce sédiment se trouve purgé de toute Terre, c'est du Sable aussi pur que nous pouvons nous proposer de l'avoir. Comme l'un des sédiments venus de la premiére opération, n'étoit pas pur Sable, de même l'autre sédiment venu de cette même opération n'étoit pas pure Terre, il est resté de la Terre dans l'un, & il a passé du Sable avec la Terre dans l'autre. Si on répéte pareillement ces opérations sur le sédiment terreux, c'est-à-dire, si on travaille à séparer le Sable fin qui étoit resté mêlé avec la Terre, plus on donnera le temps à l'eau de se reposer, avant de la transvaser, & plus on donnera de facilité au Sable de se séparer, plus aussi on en dépurera la Terre.

Mais quand les opérations auront été répétées un certain nombre de fois, inutilement les repeteroit-on davantage; si les grains de Sable qui restent mêlés avec ceux de la Terre sont d'une telle petitesse, qu'ils n'ayent pas plus de force pour vaincre la résistance que l'eau oppose à leur descente, qu'en ont les grains de Terre, les grains de Terre & les grains de Sable se précipitent alors pêle-mêle. Reste à sçavoir, & c'est précisement la question à éclaircir, si ces grains de Sable qui ne sont pas plus en état de se précipiter que des grains de Terre, si des grains de Sable si petits n'ont pas les qualités que nous regardons comme particuliéres à la Terre, s'ils ne peuvent pas faire une pâte ductile. Une expérience bien simple me donne les éclaircissements nécessaires pour décider la question.

Je réduis par le broyement le Sable dans une poudre extrêmement fine, j'y réduis de même du Verre. J'entreprends de faire des pâtes avec l'une ou l'autre de ces poudres, & je

trouve que, dans quelque proportion que je les délaye avec de l'eau, je n'ai jamais une pâte grasse, onctueuse, en un mot, ductile. Si je puis démontrer que ces grains sont cependant aussi fins que ceux d'une Terre ductile, j'ai démontré que la ténuité seule des grains ne suffit pas pour donner une pâte grasse : or les remarques précédentes nous mettent en état de décider si ces grains de Sable ou de Verre sont aussi déliés que ceux de la Terre. Pour cela je n'ai qu'à prendre une Terre grasse, bien reconnuë pour Terre, & à l'allier avec une quantité connuë de poudre de Sable ou de Verre, c'est-à-dire, à faire une pâte de poudre de Sable & de Terre, de poudre de Terre & de Verre ; & après avoir bien fait ces mêlanges, tenter par des lotions de séparer le Verre ou le Sable d'avec la Terre. Si je n'y parviens point, je suis certain que les grains de Verre ou de Sable se soûtiennent aussi aisément dans l'eau que ceux de Terre ; d'où je suis en droit de conclurre que les grains de Sable & de Verre sont aussi déliés que ceux de Terre : je pourrois même conclurre qu'ils sont plus fins, parce qu'on sçait d'ailleurs que la pesanteur spécifique du Sable & du Verre sont plus grandes que celles de la Terre ; ainsi les grains de Sable, pour rester également suspendus dans le liquide, doivent être plus petits, il faut qu'une augmentation de surface compense leur excès de pesanteur sur celle des grains de Terre. Or j'ai composé des pâtes de Terre glaise, & d'autres Terres grasses mêlées soit avec du Sable réduit dans une poudre très-fine, soit avec du Verre broyé au même point, d'où je n'ai pû ensuite séparer par des lotions que peu ou point du Sable ou du Verre que j'y avois fait entrer : donc les grains de ces poudres de Verre & de Sable étoient aussi fins que ceux de la Terre. Cependant des pâtes faites uniquement de ces mêmes Sables, ou de ces mêmes Verres broyés ne sont pas ductibles : donc la finesse des grains ne suffit pas pour composer une pâte ductible.

Quoiqu'il y ait entre le Verre & le Sable des différences, je ne les regarde que comme celles qui sont entre les différentes especes de Verres, & nous sommes en droit ici de les

traiter également dès que les grains de l'une & de l'autre de ces matiéres ont des surfaces polies, & qu'elles sont l'une & l'autre impénétrables à l'eau. Une espece de Verre, dont on avoit fait des Bouteilles, où le Vin s'altéroit, a donné occasion à M. Geoffroy le cadet de faire une fort curieuse observation; c'est qu'il y a des Verres qui, comme les matiéres métalliques, se laissent dissoudre par l'Esprit de Nitre, & encore mieux par l'Huile de Vitriol. Les dissolvants sont des agents semblables à ceux que la Nature employe, les parcelles dans lesquelles ils divisent les corps sont bien d'une autre finesse que celles qui nous viennent après des triturations ordinaires. J'ai fait dissoudre de ces Verres altérables, & quand la dissolution a été faite, j'ai édulcoré, le mieux qu'il m'a été possible, le Verre dissout, c'est-à-dire, qu'en le lavant à bien des reprises, j'ai emporté tout le Sel que l'eau en pouvoit emporter. Cette poudre, toute fine qu'elle étoit, n'a point été propre à donner une pâte ductile. On auroit tort si on mettoit sur le compte des Sels, qui sont restés engagés dans le Verre, ce manque de ductilité. Une Terre ductile, après avoir été soulée de Sel, de quelque espece que ce soit, se laisse pétrir & bien étendre.

Dès qu'on y regarde de près, on apperçoit aussi qu'il ne suffit pas que les grains d'une poudre, qui a été détrempée par l'eau, soient extrémement fins, pour que la pâte qui en vient soit ductile. La ductilité de toute masse, de toute matiére, suppose que ses parties ont entr'elles un certain degré de liaison ; & elle suppose de plus, que lorsqu'on fait changer de forme à cette masse, que lorsqu'on déplace ses parties, qu'il y en a qu'on fait mouvoir sur d'autres; que les parties, pendant leur déplacement, sont aussi adhérantes aux parties qu'elles rencontrent, qu'elles l'étoient à celles qu'elles touchoient pendant qu'elles étoient en repos ; qu'il en est de chacune de ces parties à peu-près comme d'un morceau de Marbre qui touche par une surface plane & polie, une table de Marbre aussi plane & aussi polie ; qui voudroit l'enlever, auroit à vaincre une résistance plus grande que celle du poids

de ce morceau de Marbre; & on trouveroit la même résistance, soit qu'on voulût l'enlever pendant qu'il est en repos, soit pendant qu'il est forcé de glisser sur la surface de la table. Des grains anguleux, tels que ceux de tout Sable & de toute poudre de Sable, des grains d'ailleurs roides, ne sont pas propres à se lier, à s'attacher ensemble, par le seul attouchement; ils ne sçauroient se toucher que par des petites surfaces, &, pour ainsi dire, par quelques points. Si on remplit d'eau les interstices qu'ils laissent entr'eux, leur liaison en sera augmentée, parce que les parties de l'eau tiennent plus les unes aux autres que ne font celles de l'air: mais elle ne sera augmentée que de ce que l'eau a de liaison ou de viscosité, & cela ne va pas loin. Aussi si l'on veut pétrir cette masse, dont les grains sont si mal liés, il s'y fera des fentes, elle se séparera en plusieurs parcelles. Les déplacements des grains occasionneront ceux de l'eau; dans les endroits où les grains se trouveront séparés des autres par trop d'eau, & dans les endroits où ils se toucheront moins, il se fera des séparations.

Remplissons un vase d'une Terre bien séche, réduite en poudre. Pressons cette poudre autant qu'il est possible; les grains sont alors à peu-près dans le même cas où seroient ceux d'une poudre de Sable. Mais si nous arrosons ensuite cette poudre d'eau, nous allons avoir des effets fort différents de ceux qui arriveroient, si nous arrosions de même du Sable, & dont la cause est dûë à la premiére propriété de la Terre que nous avons établie; sçavoir, à ce qu'elle est spongieuse, à ce que ses grains se laissent pénétrer & gonfler par l'eau. L'eau qui n'iroit que dans les intervalles que les grains de Sable laissent entr'eux, s'insinüe dans les grains mêmes de Terre, elle fait effort pour les gonfler en tous sens; ils vont chacun s'étendre, & les côtés où ils s'étendront le plus, ce seront ceux où ils trouveront moins d'obstacles à leur extension, c'est-à-dire, vers les endroits où ils ne s'entretouchent pas. En se gonflant, ils vont à la rencontre les uns des autres; bien-tôt les attouchements des grains, les engrénements des parties des uns dans celles des autres, seront

confidérablement augmentés, ou, ce qui eft la même chofe, la liaifon, la ténacité de la maffe va être augmentée, car chaque grain eft contraint ici à s'appliquer contre fon voifin, par une force pareille à celle qui agit dans les cordes que l'eau pénétre.

Si on vient dans la fuite à faire fécher cette maffe, il arrivera même que fes grains, redevenus fecs, tiendront beaucoup plus enfemble qu'ils n'y tenoient avant qu'ils euffent été moüillés. L'eau les a engrénés les uns dans les autres, & l'engrénement n'a pas été détruit pendant qu'elle s'eft évaporée; la preffion de l'air extérieur a tenu unis des grains qui ne tendoient pas à fe féparer. Nôtre maffe de Terre féche fera plus dure que lorfqu'elle étoit moüillée, tout au contraire de ce qui arrive à un tas de grains de Sable. L'état de chaque grain de Sable eft le même, foit que le tas qu'ils compofent foit moüillé, foit qu'il ne le foit pas. Il n'en eft pas de même de celui de chaque grain de Terre dans ces deux différentes circonftances; la maffe qu'ils compofent ne fçauroit être moüillée, qu'ils ne foient chacun moüillés intimement. Nous avons tâché de donner quelque idée de la tiffure que nous leur concevons, en les comparant à de petits fragments d'éponge, de papier, à de la poudre de bois; ils boivent l'eau comme ces fortes de matiéres, & il eft à croire auffi que quand ils en font imbibés, ils ont comme elles une foupleffe qui leur manque, lorfqu'ils font plus fecs. Quand l'eau a donné à la Terre la confiftance d'une pâte médiocrement molle, elle a ramolli chacun de fes grains : l'eau plus molle que le corps dans lequel elle s'introduit, doit ramollir ce corps, fi elle en augmente les dimenfions précifément de la quantité du volume qu'elle y va occuper, au lieu qu'elle augmenteroit la dureté du corps où elle s'introduiroit fans le dilater; parce qu'elle y occuperoit la place d'une matiére plus tenüe. Le papier, le bois moüillés nous donnent un exemple de ce qui arrive dans le premier cas, & le tas de Sable nous en donne un de ce qui arrive dans le fecond.

La principale caufe de la ductilité qu'a la Terre ramollie

par l'eau doit, à mon sens, être tirée de ce qu'alors chacun de ses grains ont une souplesse qu'ils n'avoient pas auparavant; je n'exclus pas pourtant l'eau des vuides que les grains peuvent laisser entr'eux. Je comprends même que lorsqu'on vient à presser la masse, que lorsqu'une force tend à faire mouvoir une partie des grains, que l'eau qui est dans les interstices qu'ils ne remplissent pas, aide à les faire glisser. Mais je conçois que ces grains, qui en changeant de place, cedent à la force qui tend à les faire aller en avant, changent en même temps de figure pour s'appliquer contre les grains qu'ils rencontrent. Cet effet est une suite nécessaire de leur souplesse, dès qu'ils portent à faux quelque part, dès qu'ils ne touchent pas suffisamment leurs voisins, ils sont obligés de céder jusqu'à ce qu'ils ayent trouvé un appui qui les mette en état de résister à la force qui agit contre eux. Si un gâteau de pâte ne touchoit pas par-tout un plateau sur lequel il seroit posé, on l'obligeroit à le toucher par-tout, si on le pressoit au dessus des endroits où il n'y étoit pas appliqué. Ce qui arrive sensiblement à toute la masse de pâte, est ce qui arrive continuellement à ses grains, quand on la manie ou presse pour lui faire changer de forme. Les grains souples & hors d'état de se soûtenir, s'ils ne sont appuyés de toutes parts, obéissent jusqu'à ce qu'ils se soient presque moulés sur leurs voisins. Tout se passeroit différemment, si les grains étoient roides, infléxibles comme des grains de Sable; quelques points d'appuis suffisent à ces derniers, la force qui agit contre eux n'a d'autre effet que de les faire mouvoir. Quand la masse qu'ils formoient, auroit été sans gerçures, il s'y en feroit dès qu'ils seroient forcés à se déplacer, parce qu'alors les vuides cesseroient bien-tôt d'être aussi réguliérement distribués.

On pourroit croire que la figure seule des parties suffiroit pour expliquer la ductilité de la Terre moüillée; qu'en leur en imaginant une qui leur permit de s'appliquer éxactement les unes contre les autres, qu'on auroit une cause de leur tenacité, & d'une tenacité qui se conserveroit pendant qu'elles seroient mises en mouvement, ou, ce qui est la même chose,

pendant qu'on feroit changer de forme à la masse qu'elles composent. Mais quelles figures plus favorables leur pourroit-on imaginer que celles de lames bien polies? Avec de pareilles lames, on pourroit faire un tout dont les parties seroient liées, tant que l'arrangement régulier des lames subsisteroit. Mais cet arrangement seroit bien-tôt troublé, si on venoit à paîtrir la masse; les lames se trouveroient bien-tôt différemment inclinées les unes par rapport aux autres; & alors plus de liaison, plus de ductilité, si la souplesse de chacune des lames ne donnoit l'une & l'autre.

Les Gyps, les Talcs fournissent une preuve qui confirme fort le raisonnement précédent. On sçait qu'une des propriétés de l'une & de l'autre de ces matiéres est de se diviser en feüilles, qui elles-mêmes se subdivisent en d'autres feüilles, jusqu'à un terme que nous ignorons: de sorte que si on pulvérise du Gyps ou du Talc, la poudre ne sera pas composée comme celle du Sable de grains qui auront à peu-près d'égales dimensions en différents sens, mais elle sera composée de petites lames qui auront beaucoup moins d'épaisseur qu'elles n'ont de largeur & de longueur. Cependant quelques fines qu'ayent été les poudres de Talc & de Gyps, quand elles ont été humectées par l'eau, elles ne m'ont jamais donné ni une pâte liée, ni une pâte ductile. Aussi ces pâtes, comme celles du Sable pulvérisé, se séchent sans perdre rien de leurs dimensions; preuve que l'eau ne pénétre pas plus dans l'intérieur des grains de Gyps & de Talc que dans celui des grains de Sable; & preuve encore que la figure la plus favorable des parties d'une poudre ne suffit pas pour que cette poudre détrempée par l'eau devienne une pâte ductile, lorsque l'eau ne peut pas pénétrer & ramollir chaque grain. Les Métaux ne doivent aussi leur ductilité qu'à la souplesse de leurs parties; il y en a même, comme le Fer, & l'Acier sur-tout, qui ne sont bien ductiles que lorsqu'ils sont extrêmement chauds; il est nécessaire que le feu ramollisse des parties qui ont trop de roideur, lorsqu'elles sont froides. En un mot la ductilité demande que les parties qui composent un tout, puissent elles-mêmes changer aisément

aisément de figure, & que pendant qu'elles en changent elles restent toûjours appliquées les unes contre les autres.

Les Terres, les plus terres, si je puis me servir de ce terme, telles que sont les Glaises, ont une propriété bien connüe, celle de retenir l'eau, elle ne peut les traverser. C'est à cette propriété de la Glaise à qui nous sommes redevables des eaux de tant de Sources & de tant de Puits. Que la Glaise se laisse moüiller par l'eau, & que cependant elle ne permette pas à l'eau de la percer, que l'eau ne puisse se filtrer au travers d'un lit de Glaise qui est bien humecté, c'est un fait singulier, & dont l'explication pourroit embarrasser qui ignoreroit la propriété que nous avons reconnüe dans nos grains de Terre de se laisser pénétrer & gonfler par l'eau. Celle qui arrive sur une masse de Glaise séche, trouve des grains prêts à la recevoir, elle peut même alors trouver des passages entre les grains, qui lui permettent d'avancer jusqu'à une certaine profondeur. Mais bien-tôt elle va elle-même se boucher ces passages. A mesure qu'elle s'introduit dans les grains, elle les distend, elle les gonfle, & les force à s'appliquer exactement les uns contre les autres.

Rohault, qui apparemment n'avoit pas assés fait d'attention à nôtre premiére propriété de la Terre, attribüe cet effet à une autre cause qui semble d'abord suffisante. Il imagine que l'eau qui pénétre la Glaise, entraîne avec soi les grains les plus fins, qu'elle les dépose dans les passages, & qu'ainsi peu-à-peu elle les bouche. Mais ce sentiment auquel on seroit peut-être forcé de s'en tenir, si on n'en avoit pas un plus probable, seroit combattu par bien des difficultés. Si on humectoit un morceau de Glaise séche par la seule vapeur d'un air humide, il seroit difficile de concevoir qu'il s'y fît des déplacements de grains de Terre ; cependant la Glaise humectée ainsi, seroit capable d'arrêter l'eau, comme celle qui auroit été arrosée par une quantité d'eau considérable : il s'ensuivroit que dans un lit de Glaise de quelques pieds d'épaisseur, sur lequel l'eau coule, que le passage n'est bouché à l'eau qu'à une certaine profondeur de ce lit, & qu'elle en pénétre

aiſément les premiéres couches. Il ne lui eſt bouché, le paſſage, que où il y a eu aſſés de parties fines portées & dépoſées ; ces parties plus fines ont été priſes des couches les plus proches de la ſurface ; les premiéres couches devroient donc laiſſer paſſer l'eau, comme le font des couches de Sable. Or l'expérience démontreroit aiſément le contraire. Enfin un morceau de Glaiſe qui a une fois arrêté l'eau, lorſqu'il auroit été ſéché, & qu'on viendroit à en verſer deſſus, l'arrêteroit, lorſque l'eau ſeroit arrivée au premier endroit, ce qui n'eſt pas.

Ni la ductilité de la Terre, ni ſa propriété de ſe raccourcir en ſe ſéchant, ne peuvent donc être expliquées par la ſeule petiteſſe de ſes grains. Il faut de plus imaginer chacun de ſes grains ſpongieux & ſouples. La peine que j'ai eu à croire la premiére hypotheſe inſuffiſante, l'envie que j'ai eu pluſieurs fois d'y revenir, me fait penſer qu'on ne ſçauroit trop bien établir que l'un & l'autre effet ne ſçauroient uniquement dépendre de la fineſſe des grains. Les Sels concrets paroiſſent propres à le bien prouver. Il n'en eſt peut-être aucun qui ne ſoit compoſé de parties plus tenües que celles des Terres ordinaires; du moins eſt-il ſûr que leurs parties, qui ſe ſoûtiennent dans l'eau, pendant que celles de la Terre ne s'y ſoûtiennent pas, ſont prodigieuſement fines ; cependant je ne connois point de Sel, qui étant imbibé d'eau, faſſe une pâte ductile, ni dont l'eſpece de pâte qu'on en aura faite ſe raccourciſſe en ſéchant. J'ai formé des lames avec différents Sels réduits en poudre, & enſuite arroſées d'eau légerement, aucune de ces lames ne s'eſt raccourcie ſenſiblement pendant qu'elle s'eſt ſéchée. J'ai eſſayé de la ſorte de l'Alun, du Vitriol, du Borax, du Sel de Soude, &c.

Les caractéres particuliers que nous avons aſſignés au Sable & à la Terre, ne ſont pas uniquement propres à nous donner des idées plus diſtinctes de l'une & de l'autre de ces matiéres, que celles qu'on s'en étoit faites juſqu'ici ; ces caractéres nous aideront extrêmement à démêler la compoſition de bien des Minéraux. Il n'en eſt point dont la Terre & le Sable

ne fassent partie. Entre les différentes classes des matiéres minérales, la plus étenduë, & celle qui offre de plus belles variétés, est celle des pierres; une grande partie des genres qu'elle comprend, ne sont faits que d'un alliage de Sable & de Terre. C'est une idée que nous développerons plus au long dans quelques Mémoires que nous avons à lire sur la formation des Pierres, & sur leurs divisions en classes, en genres & en especes; nous en avons déja donné une ébauche, dans un Mémoire imprimé parmi ceux de 1720, où nous avons taché d'expliquer la formation des Cailloux. Nous avons dit alors que dans certaines circonstances, l'eau charrie une matiére sablonneuse qui est si fine qu'elle nage dans l'eau qui la transporte, qu'elle y est comme dissoute. Que l'eau pourtant dépose cette poudre sablonneuse & cristalline dans plusieurs Terres ou Sables au travers desquels elle se filtre. Que cette matiére déposée entre de purs Sables, en lie les grains ensemble. Que les grains sensibles d'un Sable ainsi liés, forment des Pierres de Grès. Que quand la même matiére se dépose entre les molecules de Terre, & qu'elle les lie, qu'elle compose des Pierres communes, telles que nos Pierres à bâtir, qui différent entr'elles selon la qualité de la Terre, dont les grains ont été liés ensemble, & aussi selon la quantité de la matiére employée à les lier. Enfin que la matiére cristalline introduite dans des Terres compactes, comme les Bols, les Glaises, &c. & dans des Pierres spongieuses, formoit des Cailloux qui, dans la derniére circonstance, étoient des Pierres, qui elles-mêmes s'étoient pétrifiées de nouveau, qui étoient devenuës plus Pierre, qu'elles ne l'étoient en leur premier état. Ces explications sur la nature des Cailloux, qui ne manquent pas de vrai-semblance, sont de plus prouvées, dans le Mémoire que je viens de citer, par des observations très-précises & très-décisives. Mais ni ces observations, ni les raisonnements qui les précédent, ne nous apprennent point s'il y a des Pierres où la Terre reste sous sa forme de Terre; s'il y a des Pierres aussi grossiérement construites avec la Terre que les Grès le sont avec le Sable; si comme les

grains de Sable des Grès ſont ſimplement liés entr'eux par une matiére ſablonneuſe plus fine. Il y a de même des Pierres où les molecules de Terre ſont ſimplement liés entre eux par une pareille matiére criſtalline; en un mot, ſi la Terre qui compoſe certaines Pierres a conſervé toutes les propriétés de la Terre, & ſi au contraire celle qui eſt entrée dans la compoſition de quelques autres Pierres a perdu ces propriétés, & a ceſſé d'être Terre, ou au moins une Terre qui nous ſoit connoiſſable.

Pour éclaircir la premiére queſtion, j'ai pris un morceau de Pierre d'auprès de Charenton qui ne faiſoit qu'arriver au haut de la Carriére; il étoit encore tendre & preſque mol. Je l'ai fait piler, il a preſque été réduit en une pâte médiocrement dure. J'ai lavé cette pâte pierreuſe dans une ſuffiſante quantité d'eau, & cela à diverſes repriſes. L'eau s'eſt chargée des parties les plus légeres, elle en a emporté aſſés les premiéres fois pour être rendüe très-trouble. J'ai mis cette eau dans des vaſes, afin qu'elle y laiſſât dépoſer la matiére qu'elle avoit enlevée. Je n'ai ceſſé de laver la pâte que quand j'ai vû que l'eau qui l'avoit lavée ne ſe troubloit plus.

Les différents ſédiments que ces opérations m'ont fournis, m'ont mis en état de décider ſi cette eſpece de Pierre n'eſt compoſée que d'un Sable extrêmement fin, ou ſi elle eſt compoſée en partie d'une véritable Terre. Le premier, le plus ſimple eſſai que j'ai fait des premiers ſédiments, auroit ſeul ſuffi pour me convaincre que ces ſortes de Pierres contiennent une Terre pure. La pâte en laquelle ils ont été réduits, après que je ne leur ai laiſſé que l'eau néceſſaire pour les tenir mols, étoit auſſi ductile que celles de pluſieurs Terres; plus ductile que celle de quelques Marnes. Cette matiére qui avoit la ductilité propre aux Terres, & qu'on ne trouve point aux Sables, étoit donc de la Terre, & non du Sable.

J'ai paſſé enſuite à l'épreuve de l'autre propriété de la Terre, de celle de ſe raccourcir en ſéchant. J'ai fait des lames de cette Terre, que j'ai meſurées éxactement; je les ai laiſſées ſécher à l'ombre. Elles ſe ſont raccourcies de 5 lignes ſur 6

pouces; ce qui eſt un des grands raccourciſſements dont ſoient capables les Terres pures.

Tous mes ſédiments ne ſe ſont pourtant pas raccourcis au même point; les premiers contenoient la Terre la plus pure, & celle des derniers étoit mêlée avec beaucoup de Sable. Auſſi les ſédiments tirés des derniéres lotions n'étoient pas une pâte ductile, comme celle des premiers : au lieu que les lames des premiers ſe ſont raccourcies de 5 lignes ſur 6 pouces, celles des derniers ne ſe ſont raccourcies que de 2 lignes ſur la même longueur.

Les ſédiments moyens ont eû auſſi des raccourciſſements moyens entre les précédents.

Enfin le réſidu dont l'eau n'emportoit plus rien, ſur lequel elle ne ſe blanchiſſoit pas, étoit un pur Sable.

Nous pourrions par d'autres eſſais déterminer plus particuliérement le caractére de la Terre contenuë dans cette eſpece de Pierre, déterminer de quel genre elle eſt, en déterminer les proportions avec le Sable. Mais cet examen ne doit pas précéder le reſte de ce Mémoire; ſa place même ne ſera que dans les Mémoires qui le doivent ſuivre. C'eſt aſſés d'avoir vû que nos premiéres propriétés de la Terre nous font connoître qu'il y a des Pierres où elle entre ſans être altérée.

La ſeconde queſtion que nous avons faite, eſt s'il y a des Pierres dans la compoſition deſquelles la Terre ſoit entrée, & où elle ne conſerve plus de ſes premiéres propriétés de Terre, celles qui la font diſtinguer du Sable. Pour la réſoudre, j'ai fait réduire des Cailloux de Marly dans la poudre la plus fine. Elle ſe ſoûtenoit dans l'eau à peu-près autant de temps que s'y ſoûtenoit la Terre tirée de nos Pierres de Charenton. Je l'ai pétrie, elle n'a eu nulle ductilité. J'ai fait des lames de cette pâte qui ont ſéché ſans ſe raccourcir ſenſiblement. Cependant ces Cailloux ont probablement eu pour baſe une Terre pareille à celle des Pierres blanches de Marly. Quand la Pierre eſt devenüe Caillou, la Terre a donc perdu ſes propriétés, elle ſemble être elle-même devenuë Caillou,

Sable, &c. Mais les Pierres d'auprès de Charenton nous fourniſſent encore de quoi mieux prouver cette eſpece de transformation de la Terre. On trouve de ces Pierres qui ont été changées en Cailloux, ce ſont celles dont j'ai parlé dans le Mémoire de 1720, ſur les Cailloux où leur métamorphoſe eſt bien prouvée. Or ces Pierres, tant qu'elles n'étoient que ſimples Pierres, contenoient une véritable Terre, comme il a été prouvé ci-deſſus. J'ai traité des Cailloux parfaits, qui devoient ſûrement leur premiére origine à des Pierres communes, de la même façon que j'avois traité des Cailloux de Marly, & ils ne m'ont pas plus donné d'indices de Terre. Je dis qu'ils étoient devenus des Cailloux parfaits, parce qu'il y a des Cailloux qui donnent encore des indices de matiéres terreuſes, mais ce ſont ceux dont le grain eſt le plus gros, & qui ont le moins de tranſparence.

Il réſulte de-là qu'il y a des Pierres qui ſont une Terre dont les grains ont été liés par la matiére criſtalline; mais qu'il y en a d'autres, qui ſont des Pierres plus parfaites, où la matiére criſtalline a pénétré les grains mêmes de la Terre, à peu-près comme on imagine que les Acides pénétrent les Alkalis: mais ces conſéquences demanderont à être plus détaillées & plus prouvées, elles doivent nous donner bien des éclairciſſements ſur la nature des différentes Pierres, & ſur leur formation, c'en eſt aſſés ici de les avoir indiquées.

Tous ceux dont la profeſſion eſt de façonner la Terre en ouvrages, ſçavent aſſés l'attention qu'il faut avoir à la propriété qu'ont les Terres ductiles de ſe retirer. Les Potiers de Terre, les faiſeurs de Creuſets, &c. ſçavent qu'il faut faire ſécher lentement les vaſes qu'ils en ont formés, qu'autrement ils ſont en riſque de ſe fendre, avant même qu'on les expoſe au feu qui les doit cuire; les forces avec leſquelles différentes parties tendroient à ſe raccourcir, n'étant pas égales, & étant ſupérieures à celles qui les tiennent unies, produiroient des ſéparations. Si une partie eſt épaiſſe, & que l'humidité s'en échappe trop bruſquement, la couche la plus proche de ſa ſurface eſt preſque ſéche, pendant que les couches intérieures ſont très

abbreuvées d'eau, ou, ce qui revient au même, la couche supérieure est devenuë plus courte que celle sur laquelle elle est appliquée. Il faut donc nécessairement qu'un espace vuide tienne lieu de ce qui manque à sa longueur, elle se fend dans un, ou dans plusieurs endroits, où elle étoit plus foible; de couches en couches il en arrive de même, & alors la partie se trouve partagée par plusieurs fentes qui traversent de part en part avant même qu'elle soit absolument séche. C'est pour n'avoir pas le désagrement de voir leurs ouvrages cassés avant qu'ils soient secs, que les ouvriers mêlent une certaine quantité de Sable avec leur Terre; ils lui en donnent ce qu'ils lui en peuvent faire porter, sans la rendre trop peu ductile. Plus le Sable fait une grande portion de la masse composée, & moins cette masse a de disposition à se retirer, moins aussi on a à craindre qu'elle séche trop promptement.

Ceux qui font des modelles en Terre sçavent aussi dans quelles proportions il faut les faire plus grands que ne le doivent être les ouvrages qu'on moulera dessus, parce que ces modelles secs n'auront plus les dimensions qu'ils avoient lorsqu'ils étoient humides.

Mais il y a une circonstance importante où on n'a pas fait assés d'attention à cette propriété de la Terre, c'est dans la construction des murs de revêtemens. Ces murs qui doivent soûtenir des Terrasses faites pour l'agrément, comme celles des Jardins, où les Terres d'ouvrages utiles comme ceux des fortifications, sont de conséquence, tant par rapport à leur usage, que par rapport à leur prix; au moins doit-on chercher à les rendre solides en leur donnant l'épaisseur & les talus ou fruits qui leur conviennent. Les dépenses ausquelles ils engagent, font aussi souhaiter de ne leur donner que la solidité convenable. On a eu recours à la Géométrie, pour déterminer les proportions qui leur sont nécessaires; mais la Géométrie ne résout les problemes que sur les conditions qui ont été proposées, & il n'arrive que trop souvent qu'on restraint ceux de Physiques à des conditions qui en excluent d'autres que la Nature y fait entrer: ou qu'aux conditions que la Nature

presente; on en substitüe de totalement différentes. Par rapport à nos murs de revêtements, on a calculé le poids qu'ils ont à soûtenir pour empêcher l'éboulement des Terres. M. Couplet, qui a traité cette matiére avec plus d'étenduë, de détail & d'exactitude que personne, dans plusieurs de nos derniers Volumes, a sur-tout cherché à donner à ces murs toute la force nécessaire. Pour cela il a pris l'hypothese où ils auroient à soûtenir des masses de pur Sable; il a même imaginé les grains de Sable comme autant de petites boules. Des murs bâtis avec la solidité nécessaire pour tenir ferme contre des masses composées de grains si roulants sembleroient avoir bien de la force de reste, car il s'en faut beaucoup que les grains des Terres ordinaires ayent une pareille disposition à rouler. Nous voyons tous les jours de longues & hautes masses de Terres coupées à pic, pour faire des chemins, ou des excavations, dont il ne s'éboule, au bout d'une année, que quelques hottées de Terre. Si des murs eussent été élevés le long de ces Terres, le poids qu'ils auroient eû à arrester, auroit égalé à peine celui que peut porter un homme robuste. Ce poids même n'auroit jamais été à ces hottées de Terre qui ont été détachées; ce n'est que par petites parcelles que tombe souvent cette Terre qui s'accumule avec le temps à une quantité un peu considérable; les secondes parcelles qui se détachent, ne se détachent, & n'ont de disposition à se détacher que parce que les premiéres sont tombées; si celles-ci eussent été soûtenuës, les autres n'eussent jamais fait d'effort pour sortir de leur place. Cependant, si on construit des murs contre de pareilles masses de Terre, il leur faut bien une autre solidité que celle qui leur eût suffi, s'ils eussent été bâtis en des endroits où ils eussent été isolés de toutes parts; sans quoi ils ne subsistent pas long-temps dans leur à plomb, bien-tôt quelques-unes de leurs portions se renflent, présentent des ventres. Le peu de Terre qui tend à tomber, soit verticalement, soit selon des lignes inclinées, ne semble pas capable de produire de si grands effets. Une force autrement puissante, n'agit aussi que trop souvent contre ces murs, &

toute

toute sa direction tend à les pousser horizontalement. Cette force est celle qui fait prendre aux Terres séches une augmentation de volume à mesure qu'elles s'imbibent d'eau, qui les contraint de se renfler; c'est une force pareille à celle qui agit sur les cordes moüillées. Nous avons déja dit que nous ne connoissons pas la mesure de cette derniére, mais nous sçavons qu'elle est prodigieuse, qu'elle met une corde en état d'enlever tout poids qui ne sera pas capable de la rompre; ou pour comparer la force de nôtre Terre qui se renfle avec une autre qui semble plus analogue, ou plûtôt qui est précisément la même, elle est pareille à celle du bois qui se renfle. Or on sçait que des coins de bois, engagés secs entre d'épaisses roches, lorsqu'ils viennent à être imbibés d'eau, font un effort pour se renfler; qui force les roches à se fendre, à éclater, qui les détache, & les souleve: & c'est l'expédient le plus commode pour détacher ces lourdes masses de Pierres dont on fait les Meules de Moulin. Si donc nous considérons ce qui va arriver à une masse de Terre bien séche, & bien compacte d'ailleurs, appliquée contre un mur, lorsque l'eau la pénétrera, nous devons nous représenter les efforts qu'elle va faire pour s'étendre, comme capables de vaincre les plus puissants obstacles.

Il est vrai que ce qu'il n'est pas permis, à la Terre qui s'imbibe, de prendre d'accroissement, de dimensions dans un sens, elle le prend dans un autre. Si la Terre, qui séche, remplissoit un vase, vient à s'humecter, en se gonflant elle s'élévera au dessus des bords du vase, qui est le seul côté où il lui soit permis de s'étendre: de même si les obstacles qui contiennent une masse de Terre, des murs, par exemple, s'opposent à l'extension qu'elle veut prendre dans une direction horizontale, elle sera forcée à s'élever. Mais aussi quels terribles efforts le mur a-t-il à soûtenir dans quelques circonstances! Qu'un lit de Terre séche, posé à 10 pieds de profondeur, vienne à être pénétré par l'eau, l'effet de la force qui le porte à s'étendre horizontalement, ne sera détruit que quand l'obstacle qui s'oppose à cet effet sera plus fort que la

résistance de la masse de la Terre supérieure à être soulevée: Il faut donc que cette résistance du mur tienne alors contre le poids d'une couche de Terre de 10 pieds d'épaisseur sur une longueur égale à la sienne, & sur une largeur plus ou moins grande, selon l'étendüe du lit de Terre dans ce sens.

L'action de la couche de Terre, qui se dilate, contre le mur, n'est pas seulement proportionnée au poids de la masse qu'il lui faut soulever pour se dilater, elle est encore augmentée par la résistance qui vient de la tenacité des parties de la Terre les unes avec les autres. La force des coins moüillés, qui enleve des portions d'un rocher, n'est pas seulement égale au poids de ces portions ; avant de commencer à les soulever, elle a eu à vaincre l'engrénement, l'adhésion de cette partie avec le reste, il a fallu la détacher dans le premier instant qu'elle a été soulevée. Les parties de la Terre ne sont pas liées entr'elles aussi solidement que le sont celles d'une roche, leur tenacité est pourtant considérable dans certaines Terres. D'ailleurs la couche qui commence à se renfler, ne se renfle pas par-tout également, dès-lors elle souleve plus la masse qu'elle porte, en certains endroits que dans d'autres, & de-là il suit qu'il faut vaincre la résistance de la tenacité de la Terre en bien des endroits. Une expérience, que je vais rapporter, prouve combien il faut avoir de considération à cette tenacité, & que le poids à soulever n'est pas à beaucoup près la mesure de l'effort nécessaire.

J'ai fait une lame de Terre glaise, qui, quand elle a été séche, a eu environ 9 pouces de longueur, un de largeur & 5 lignes d'épaisseur en quelques endroits, & dans d'autres 6. Je l'ai posée à plat sur le mur d'appuis d'une fenêtre, de façon qu'un de ses bouts touchoit un des murs montants de la même fenêtre. J'ai appliqué contre son autre bout une masse de Fer, dont il est inutile de déterminer le poids absolu; mais ce que j'ai cherché à déterminer, & qui étoit nécessaire, c'est le poids capable de faire glisser cette masse horizontalement. L'expérience m'apprit qu'il devoit être de 10 livres.

Contre les côtés de la lame de Terre j'ai posé deux barres de Fer, qui comme deux regles les touchoient tout du long. Ainsi cette lame de Terre étoit arrêtée par les deux côtés & par les deux bouts, le dessus seul étoit libre & à découvert. En cet état je l'ai arrosée d'eau, qui n'a pas été long-temps à la pénétrer. Je voulois éprouver si l'augmentation du volume se feroit toute en hauteur, lorsque dans les autres sens il y avoit des obstacles à vaincre plus considérables que le poids de la Terre. Je n'ai point été attentif à observer l'augmentation qui auroit pû se faire en largeur, une lame si étroite, eût-elle été libre, n'en eût pas pris une bien sensible en ce sens; mais j'ai observé soigneusement s'il s'en feroit en longueur, & j'ai vû qu'il s'y en est fait une. La masse de Fer, qui résistoit de 10 livres, a été portée à environ 2 lignes $\frac{1}{2}$ par de-là l'endroit où je l'avois placée. Cependant cette résistance de 10 livres étoit une force beaucoup plus considérable que celle qu'il eût fallu pour soulever toute la Terre qui avoit agi; cette Terre ne pouvoit pas peser plus de quelques onces. L'engrénement des parties les unes dans les autres, leur disposition à s'étendre dans une certaine direction, a donc mis la force dilatative en état d'agir efficacement contre le poids qui s'opposoit à l'allongement. Il est vrai pourtant que l'allongement n'a pas été aussi considérable qu'il l'eût été, si la bande n'eût pas trouvé d'obstacle à repousser; elle se fût alors allongée de plus de 4 lign. $\frac{1}{2}$, au lieu qu'elle ne s'est allongée que de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Quand des murs sont appuyés contre des Terres compactes, séches, & que l'eau parvient à les pénétrer jusqu'à une certaine profondeur, ces murs ont donc besoin d'une prodigieuse force pour se soûtenir. Aussi l'expérience a-t-elle appris que les temps à craindre pour les murs de Terrasses sont les temps de pluyes abondantes; alors les Terres sont imbibées à une profondeur considérable d'une eau qui met en action des forces immenses. Les pluyes d'orage qui viennent après une longue sécheresse, sont par-là extrémement à craindre.

Si la force de la dilatation de la Terre va jusqu'où nos

raisonnements & l'expérience précédente semblent la porter; on sera étonné qu'il y ait des murs de revêtements qui puissent se soûtenir pendant une année entiére. Il est vrai aussi qu'il leur faudroit une épaisseur prodigieuse pour soûtenir la poussée des Terres qui se dilatent, si bien des causes ne concourroient à en affoiblir l'effet. Les Terres qu'ils ont à arrêter se dilatent d'autant moins qu'elles sont plus sablonneuses; pendant qu'il est ordinaire de trouver des Terres grasses, qui étant séches, ont dans chaque dimension $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{13}$ de moins que lorsqu'elles sont humides; c'est-à-dire, des Terres que l'humidité étend de $\frac{1}{13}$, ou même de $\frac{1}{12}$ en tout sens; il est ordinaire aussi de trouver des Terres sablonneuses que l'humidité n'allongera que de $\frac{1}{25}$, ou $\frac{1}{30}$, & quelquefois moins.

Les Terres les plus grasses & les plus compactes, celles dont l'eau peut augmenter le plus les dimensions, lorsqu'elle les pénétre, sont aussi les plus difficiles à pénétrer; & lorsqu'elles ont été une fois imbibées d'eau, elles la laissent échapper difficilement; de sorte que celles qui se trouvent à une certaine profondeur, ne deviennent jamais séches à un point où leur force de se dilater puisse ensuite être mise en jeu dans toute son étendüe.

Il est sur-tout à remarquer que si un mur de revêtement étoit construit dans une circonstance où la masse de Terre qu'il a à arrêter, est aussi imbibée d'eau qu'elle le peut être, qu'il n'auroit jamais rien à craindre des effets de cette Terre pour se dilater, si cette masse de Terre restoit précisément la même. Quand cette Terre se sécheroit, elle se retireroit un peu du mur; il s'y feroit des fentes, des crevasses en une infinité d'endroits, qui seroient les places nécessaires pour la recevoir, lorsqu'elle viendroit à se gonfler de nouveau : mais malheureusement les vuides des fentes, des crevasses, faites par la Terre qui se retire, ne se conservent pas dans leur entier. Les mouvements des hommes & des animaux, le vent, la pluye, y portent des corps qui les remplissent en partie; de sorte que quand la Terre vient à être imbibée d'eau, elle

ne trouve plus pour se loger ces mêmes places qu'elle avoit abandonnées en se séchant, ou au moins elle ne les trouve plus en leur entier; & c'est proportionnellement à ce qu'elle est mise plus à l'étroit qu'elle fait des efforts contre les murs qui s'opposent à sa dilatation. Il résulte pourtant de-là que la circonstance la plus avantageuse pour construire des murs de Terrasse, est celle où les Terres, le long desquels ils sont élevés, sont le plus abreuvées d'eau qu'il est possible.

Tout ce que nous venons d'observer prouve que l'épaisseur qui suffiroit à des murs de revêtements opposés à certaines Terres, ne suffiroit pas à ceux qui seroient opposés à d'autres Terres. Les Terres les plus à craindre pour eux, sont celles qui joignent à la qualité de se dilater beaucoup, celle de se laisser aisément pénétrer par l'eau, & de laisser évaporer aisément l'eau dont elles ont été pénétrées. Elles sont alors sujettes à de plus fréquentes alternatives de contraction & de rarefaction, & à des alternatives plus considérables. Les différentes épaisseurs qui conviennent à différents murs de revêtements, selon la qualité des Terres qui agissent contre eux, ne seroient peut-être pas aisées à déterminer. Des expériences sur les extensions dont sont susceptibles différentes Terres, aideroient pourtant à établir quelques regles, à donner des limites entre lesquelles on pourroit se tenir. Nous rapporterons dans la suite un grand nombre d'expériences sur les dilatations des différentes Terres, qui pourront aider à établir ces regles qui nous paroissent à desirer.

Une remarque, qui d'avance me paroît essentielle, c'est que plus il y aura de gravois, de pierrailles amoncellées entre le mur & la masse de Terre, & moins la poussée de la Terre sera à craindre; on lui ménagera par-là des vuides qu'elle pourra occuper lorsqu'elle se gonflera : des gravois amoncellés dans la masse même de la Terre n'y pourroient produire qu'un utile effet. Du reste je ne me suis pas proposé de rechercher ici tout ce qui conviendroit pour assûrer la durée des murs de revêtements, j'ai seulement voulu faire remarquer qu'il importoit, quand on les construit, de faire attention à la

propriété qu'ont les Terres de se gonfler, lorsqu'elles s'imbibent d'eau, & que c'est une attention, toute importante qu'elle est, que je ne sçache point qu'on ait eûë jusqu'ici.

Nous ne nous sommes attachés encore qu'à considérer les deux propriétés de la Terre qui la distinguent des Sables & de tous les Minéraux qui nous sont connus, aussi ne l'avons-nous encore regardée que selon des vûës très-générales. Nous en ferons dans la suite un examen plus particulier; les variétés qu'elle nous offre, méritent chacune de l'attention; elles nous montrent de la Terre sous bien des apparences différentes. La plûpart de ces variétés ont été remarquées par ceux qui aiment l'Histoire naturelle, mais on a négligé d'en faire usage pour bien caractériser les différentes sortes de Terres; dans les ouvrages où il est fait mention de quelque espece de Terre, il nous est ordinairement difficile de démêler à laquelle de celles que nous connoissons, elle doit être rapportée. Nous avons donc crû qu'il seroit utile à l'Histoire naturelle, à la Physique & aux Arts, de distribuër les différentes Terres en classes, ou en genres premiers, en genres seconds & en especes. Les premiéres divisions doivent être tirées en partie des deux premiéres propriétés qui nous ont tant arrêté. Mais les caractéres des genres subalternes & des especes seront fournis par des différences propres à chacun de ces genres, ou à chacune de ces especes.

Des sources de différences se presenteront en nombre selon les rapports sous lesquels nous considérerons les Terres. Quoique communément elles soient faites par grains, elles ne sont pas composées de grains également fins. Il y en a qui au lieu d'être un amas de grains, dont on n'apperçoit pas l'arrangement, sont composées de feüilles aussi distinctes que celles des Ardoises. Les Peintres sçavent combien est grande la variété des couleurs des Terres, & c'est une connoissance qu'ils mettent à profit. L'action du feu sur les Terres nous fait voir combien elles différent les unes de autres. Il y en a qui se vitrifient plus aisément qu'aucune matiére à nous connüe; d'autres ne sont presque pas vitrifiables, elles se

soûtiennent contre la plus violente action du feu de nos fourneaux : il y en a que le feu calcine, au lieu de les vitrifier. Quand quelques-unes ont souffert le feu, qu'elles sont devenuës ce que nous appellons de la *Terre cuite*, elles sont rouges; d'autres alors sont blanches, d'autres sont grises. Il nous suffit d'indiquer actuellement ces sources de variétés, mais il y en a deux autres ausquelles nous nous arrêterons un peu plus, parce qu'on ne les a pas, ce me semble, assés bien remarquées.

Je veux d'abord parler de l'effet des Acides sur les Terres. En général elles sont regardées comme des matiéres très-alkalines, & des plus alkalines. Aussi des acides foibles, tels que le Vinaigre, versés sur quantité de Terres, y excitent une fermentation subite, accompagnée d'une ébullition considérable. J'ai observé que ces mêmes acides, & même les plus violents, tels que l'Esprit de Nitre, l'Esprit de Sel, &c. versés sur d'autres Terres, n'y causent pas plus d'ébullition que l'eau simple y en causeroit; au lieu qu'alors les premiéres Terres se couvrent sur le champ d'une écume épaisse, qui s'éleve haut, à peine peut-on observer quelques petites bulles d'air qui s'échappent des derniéres. Les Esprits acides ne viennent gueres à bout de ramollir plus vîte les Terres avec lesquelles ils ne boüillonnent pas, que feroit l'eau commune.

La maniére dont les Acides agissent sur la plûpart des Terres sur lesquelles ils peuvent le plus, est différente de celle dont ils agissent sur les Métaux. Ils produisent dans les Terres de plus promptes ébullitions, mais leur action se termine presque là; je veux dire, qu'au lieu que les liqueurs acides se saisissent des Métaux avec qui elles ont fermenté, qu'au lieu qu'elles les tiennent suspendus, qu'elles se les approprient, que les Acides n'enlevent la Terre que pour la laisser précipiter peu-après.

Il nous reste encore à examiner une propriété des Terres qu'on ne trouve ni aux Cristaux, ni aux Talcs, ni aux Gyps, ni aux Sables parfaits, c'est-à-dire, comme nous l'expliquerons ailleurs au long, aux Sables qui sont purement Sables,

qui ne sont pas des composés, où la Terre entre pour quelque chose. Cette propriété est d'avoir de l'odeur. Toutes les Terres sont capables de faire une impression sensible sur nôtre odorat, & il y en a de très-communes qui en peuvent faire une extrémement forte. Cependant c'est une propriété de la Terre à laquelle on ne paroît avoir fait assés d'attention, & à laquelle même on n'a presque pas pris garde ; aussi ne se fait-elle appercevoir que dans quelques circonstances, qui sont rarement celles où ceux même qui sont capables d'observer éxaminent la Terre. Quand on en prend un morceau entre les mains pour l'éxaminer, il est ordinairement sec ; alors les Terres les plus capables de donner de l'odeur, ne sentent rien, ou presque rien. Mais qu'on moüille légerement ce morceau de Terre, qu'on ne le moüille qu'autant qu'il faut pour le pétrir en pâte ferme, & que quelques instants après on l'approche du nés, il y a telle Terre alors qui fera sentir une odeur forte & pénétrante. Si au lieu d'humecter simplement la même Terre, on la noye d'eau, si on en fait une pâte trop liquide, elle ne donnera qu'une odeur beaucoup plus foible : l'odeur qui s'en exhalera, n'aura de la force que quand la pâte, devenüe épaisse, commencera à sécher. Une autre circonstance encore a empêché de faire attention aux odeurs des différentes Terres, c'est que leur atmosphere ne s'étend pas loin. Un morceau de Terre qui est capable d'affecter, même trop fortement, nôtre odorat, n'étant éloigné du nés que de deux ou trois pouces, n'y fera aucune impression sensible, si on l'en éloigne d'un pied, ou davantage.

Si la propriété de répandre de l'odeur est commune à la Terre avec un grand nombre d'autres corps, la circonstance où elle en donne le plus, lui est particuliére, ou presque particuliére. Quantité de corps n'ont de l'odeur pour nous que quand ils sont échauffés, & quelques-uns en ont d'autant plus qu'ils sont plus échauffés ; il faut que le feu aille jusqu'à en détruire d'autres pour en faire sortir des odeurs. Les Cheveux, la Corne, le Cuir, répandent quand ils se brûlent des odeurs très-fortes ; la Corne & les Cheveux ne sentent rien en toutes

autres

autres circonstances; les Pyrites, le Cobolt, & bien d'autres matiéres minérales, réduites simplement en poudre, ne sentent rien, ou sentent peu. La poudre des premiers, jettée sur des charbons allumés, répand une forte odeur de Soufre, & celle de la seconde matiére répand une desagréable & dangereuse odeur d'Ail. Les Terres qu'on fait cuire donnent aussi de l'odeur, mais une odeur très-différente de celle qu'elles ont étant humectées, & bien moins forte. Il y a des fleurs dont l'odeur est plus sensible pendant la fraîcheur du soir & du matin que pendant la chaleur du midi; mais si on excepte les farines, il y a peu de matiéres qui répandent plus d'odeur, quand elles ont été réduites en pâte au moyen de l'eau, que quand elles sont en une poudre presque séche.

Nous ne sçavons exprimer l'espece de sentiment que produit en nous une Rose, un Oeillet, une Jonquille, que par les termes d'odeur de Rose, d'Oeillet, de Jonquille : il ne nous est pas possible de faire connoître autrement ce qui se passe chés nous à l'occasion de l'approche d'une Rose, d'un Oeillet; nous ne sçaurions décrire nos sentiments, nous ne pouvons qu'indiquer en quels cas ils naissent, & nous pensons qu'il en naît de semblables dans les autres en pareilles circonstances, quoiqu'il nous soit impossible de reconnoître si le sentiment dont ils sont affectés est précisément semblable au nôtre. En un mot on ne sçauroit donner idée de l'odeur d'une Rose, à qui n'auroit jamais senti de Roses. Les odeurs de nos différentes Terres ont entr'elles des différences comme en ont celles de différentes fleurs, mais de même il est difficile, & souvent impossible, de les caractériser. On ne peut gueres les faire connoître que par le nom de l'odeur de la Terre même qui les donne, c'est-à-dire, en renvoyant à sentir cette Terre, comme nous renvoyerions à sentir une Rose celui à qui nous voudrions faire connoître son odeur. Les odeurs des Terres, en général, sont des odeurs particuliéres ; il y en a pourtant quelques-unes qui ressemblent assés à d'autres qui nous sont connües. Il y a, par exemple, des Terres dont l'odeur approche de celle du Poivre.

Lorsqu'il survient en Eté une petite pluye, qui humecte légerement des Terres qui avoient été desséchées pendant une suite de jours chauds, nous sentons dans toutes les campagnes une odeur qui nous plaît. On l'attribüe ordinairement aux Plantes des Bois ou des Jardins où l'on se promene. Mais si on fait attention que les champs les plus arides, que ceux qui ne sont couverts que d'un chaume sec, ou de Plantes aussi séches, en répandent alors une semblable, on pensera que la Terre même est la source de cette odeur, qui ne fait sur nous qu'une légere & douce impression, parce que nôtre tête est à une distance où l'atmosphere de cette odeur ne s'étend qu'à peine, & ou au moins elle est très-affoiblie; si on se couche sur la Terre, on sera bien frappé d'une odeur autrement forte.

Quand un morceau de Terre a été légerement humecté, & quand l'eau dont il a été pénétré s'évapore, elle emporte donc avec soi, de l'intérieur de la Terre, de petits corps capables d'affecter nôtre odorat. J'ai voulu voir s'il seroit possible d'épuiser cette odeur de la Terre. J'ai arrosé & fait sécher successivement de petits gâteaux de Terre pendant plus de quinze jours, & cela à diverses reprises chaque jour : à la derniére de ces expériences je n'ai point remarqué qu'aucun des gâteaux donnât moins d'odeur qu'à la premiére. S'il y a des corps dont l'odeur se dissipe aisément, il y en a d'autres qui la conservent, & qui en fournissent bien au de-là de ce qu'on pourroit imaginer. Des corps parfumés de Musc en conservent l'odeur pendant des siécles.

Au reste, de ce que les différentes Terres ne donnent de l'odeur qu'après qu'elles ont été humectées par l'eau, il semble qu'on en doive conclurre que la matiére qui fait les odeurs des Terres est trop pesante pour être élevée par la simple chaleur de l'air, qu'il est nécessaire que l'eau la dissolve, qu'elle s'en charge, qu'elle l'emporte ensuite avec soi. Peut-être même que l'eau ne peut pas l'emporter bien-loin, & de-là vient que l'atmosphere de l'odeur des Terres n'est pas fort étendu. Il résulte encore de-là que quand l'eau pénétre les

grains de Terre, qu'elle y occasionne quelque altération. Les bulles d'air qui sortent alors, disposent à penser qu'il s'y fait une fermentation. On pourroit cependant croire que ces bulles ne s'échappent que comme l'air s'échappe d'une bouteille qu'on remplit d'eau. Mais ici il y a quelque chose de plus: dès que l'eau qui sort de la Terre est en état d'affecter nôtre odorat autrement qu'elle l'affectoit avant d'y être entrée, il semble qu'elle y a occasionné quelque fermentation; & si cette fermentation étoit bien prouvée, on auroit une cause très-probable de l'augmentation de volume qui survient à chaque grain de Terre pendant que l'eau le pénétre. C'est ce que nous éxaminerons ailleurs.



SUITE DES OBSERVATIONS DE LA COMETE

Qui a commencé à paroître à la fin de Juillet de l'année 1729.

Par M. CASSINI.

19 Avril 1730.

NOUS avons déja rendu compte à l'Académie des Observations d'une Comete qui avoit commencé à paroître le 31 Juillet de l'année 1729 entre la Constellation du petit Cheval & celle du Dauphin, & que nous avions continué d'observer jusqu'au 10 Novembre de la même année.

Son mouvement propre, qui étoit contre la suite des Signes de l'Orient vers l'Occident, semblable à celui des Planetes supérieures, lorsqu'elles sont en opposition avec le Soleil, nous fit juger d'abord que cette Comete, qui se trouvoit aussi dans la même situation à l'égard de la Terre & du Soleil, avoit réellement, de même que toutes les autres Planetes, un mouvement de l'Occident vers l'Orient suivant la suite des Signes, & que son mouvement, rétrograde en apparence, n'étoit que l'effet du mouvement de la Terre autour du Soleil, qui étant plus prompt que celui de la Comete, la laissoit en arriére, quoiqu'elles s'avançassent toutes les deux du même sens. Que par conséquent le mouvement rétrograde de cette Comete paroîtroit se rallentir jusqu'à ce qu'il cessa entiérement, de même qu'on l'observe dans les Planetes supérieures après qu'elles ont passé leurs oppositions ; qu'on la verroit ensuite se mouvoir dans une direction contraire, & aller, suivant la suite des Signes, avec une vîtesse proportionnée à la distance & à la situation où elle se trouveroit à l'égard de la Terre & du Soleil.

Toutes ces apparences arriverent successivement comme

nous les avions prévûës ; car cette Comete, après avoir passé près de la queüe du Dauphin, s'avança vers l'Aigle avec un mouvement rétrograde qui se rallentit insensiblement jusqu'au 19 Octobre, après lequel on la vit aller suivant la suite des Signes, ayant parcouru 13 minutes de l'Occident vers l'Orient dans l'espace de 8 jours, depuis le 19 Octobre jusqu'au 27 du même mois.

On ne pouvoit appercevoir alors cette Comete que par le secours des Lunettes, où on la voyoit en forme d'une Etoile nébuleuse dont la lumiére étoit très-foible, mais dont le diametre ne laissoit pas d'occuper au moins une minute & demie de degré de la circonférence du Ciel, c'est-à-dire, qu'elle étoit encore plus grande en apparence qu'aucune des Planetes que nous appercevons dans le Ciel, à la réserve de la Lune.

Il est vrai que l'on peut attribuer la grandeur apparente de cette Comete à la chevelure qui l'environnoit, & qui se confondant avec son disque, en augmentoit considérablement l'étendüe.

Le mauvais temps qu'il fit ensuite, joint au clair de la Lune, nous fit cesser de voir cette Comete pendant près de quinze jours. Cependant comme par la comparaison des Observations précédentes, nous sçavions à peu-près l'endroit du Ciel où elle devoit se trouver chaque jour, & que sa grandeur, qui étoit encore fort sensible dans le temps que nous l'avions perdu de vûë, nous faisoit esperer qu'elle seroit encore visible pendant quelque temps, nous essayâmes de la chercher le 10 Novembre, jour auquel le Ciel fut serein, ce qui nous réüssit, & nous la trouvâmes plus avancée que le 27 Octobre d'un degré & quelques minutes, suivant la suite des Signes, avec un mouvement direct qui avoit accéléré depuis les derniéres Observations que l'on en avoit faites.

Dans le compte que nous en rendîmes à l'Académie dans la derniére Assemblée publique, nous promîmes de donner la continuation des Observations que nous espérions d'en faire dans la suite. En effet, quoiqu'elle eût déja paru l'espace

de trois mois dix jours, qui est un intervalle plus grand que celui d'aucune Comete qui ait été observée depuis plus d'un siécle, nous avons continué de l'appercevoir encore plus de deux mois & demi jusqu'au 21 Janvier de cette année 1730, après quoi le mauvais temps & le clair de la Lune qui survinrent, ne nous permirent plus de l'observer.

Elle étoit alors au dessus des Etoiles septentrionales de la tête du Dauphin, & répondoit au 18me degré du Signe du Verseau, le Soleil étant au premier degré du même Signe; ainsi elle ne se trouvoit éloignée en longitude que de 17 degrés du Soleil dont elle s'approchoit continuellement, ce qui ôtoit toute espérance de pouvoir encore l'appercevoir, parce qu'elle se devoit trouver alors près des rayons du Soleil où les Etoiles les plus éclatantes disparoissent.

La route qu'elle avoit faite depuis que son mouvement apparent étoit direct, étoit à peu-près égale à celle qu'elle avoit parcouru étant rétrograde, de sorte qu'elle se trouvoit répondre au même degré de l'Ecliptique où on avoit commencé à l'appercevoir, mais avec une latitude qui dans l'intervalle de 5 mois & 22 jours avoit augmenté de 14 degrés vers le Nord.

Après les premiéres Observations que nous fîmes de cette Comete, nous nous contentâmes de faire voir le rapport de son mouvement avec ceux des Planetes supérieures dans le temps de leurs oppositions avec le Soleil. Nous essayâmes même de démontrer que cette Comete étoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter, en supposant que son mouvement étoit réellement de l'Occident vers l'Orient suivant la suite des Signes.

La supposition du mouvement de cette Comete de l'Occident vers l'Orient, sur laquelle nôtre démonstration étoit fondée, pouvoit n'être pas reçûë généralement de tous les Philosophes, puisqu'il s'est trouvé de nôtre temps, de très-habiles & grands Géometres, qui ont crû que les Cometes faisoient leur mouvement autour du Soleil indifféremment de tous les sens. En effet on ne peut douter qu'on n'en

ait observé plusieurs, dont le mouvement apparent ait paru contre la suite des Signes, telles que celles de 1698, 1702 & 1706.

La Comete du mois d'Avril de l'année 1702 est remarquable entre les autres, en ce que son mouvement journalier étoit au commencement de son apparition de 15 degrés contre la suite des Signes, le lieu de la Terre étant éloigné de celui de la Comete d'environ trois Signes, qui est la situation où les Planetes paroissent stationaires.

On peut représenter cependant avec assés de précision son cours, & lui attribuer un mouvement réel suivant la suite des Signes, en supposant qu'elle étoit placée au commencement de son apparition beaucoup plus près de la Terre que du Soleil, ce qui d'ailleurs s'accorde assés bien à la rapidité de son mouvement apparent, qui étoit quinze fois plus grand que celui de la Terre. Car cette Comete étant au moins aussi éloignée du Soleil que la Terre l'est de cet Astre, comme il est aisé de le démontrer, il y a lieu de supposer que son mouvement réel à l'égard du Soleil n'étoit pas à beaucoup près si grand que celui que l'on y a observé, & que sa rapidité apparente n'étoit causée que par sa proximité de la Terre, ce qui se trouve d'ailleurs confirmé par la Parallaxe que M.rs Bianchini & Maraldi y ont observée de 13 minutes.

On trouvera de même qu'on peut représenter également bien les mouvements rétrogrades des autres Cometes dont nous venons de parler, en leur donnant un mouvement réel suivant la suite des Signes. Mais on n'a pas jugé devoir entrer dans ce détail, qui demande trop de discussion, & qui excéderoit les bornes que nous nous sommes prescrites pour ce Mémoire.

Ce que l'on vient d'exposer suffit pour faire voir que les mouvements de diverses Cometes qui ont paru rétrogrades, ne peuvent point servir pour combattre le systême de Descarte & celui des Tourbillons, suivant lesquels les Corps célestes doivent se mouvoir tous dans le même sens suivant la suite des Signes.

Pour nous renfermer dans ce qui regarde cette dernière Comete, nous ferons voir d'abord que le mouvement direct que nous lui avons attribué comme étant le plus vrai-semblable, s'est trouvé par la suite de nos Observations, susceptible d'une démonstration exacte que nous tâcherons d'expliquer, sans qu'il soit nécessaire d'y employer de Figures.

On suppose pour cela que les Etoiles fixes, avec lesquelles on compare les Cometes pour déterminer leur situation dans le Ciel & à l'égard de l'Ecliptique, sont à une distance si grande, que le chemin que la Terre parcourt sur son orbe dans l'espace de plusieurs jours n'y a aucun rapport sensible.

Cette supposition doit être admise, puisque dans les recherches les plus exactes qui ont été faites pour déterminer la distance des Etoiles fixes à la Terre par le moyen de son mouvement sur son orbe annuel, l'angle que font entr'elles deux lignes tirées d'une Etoile fixe à la Terre placée aux deux extrémités de cet orbe à la distance de plus de 60 millions de lieües, a été trouvé à peine d'une minute de degré.

Suivant ce principe, on peut considérer toutes les lignes tirées de la Terre en différents endroits de son orbe à une même Etoile fixe, comme des paralleles éloignées l'une de l'autre d'un intervalle mesuré par la quantité du mouvement de la Terre de l'Occident vers l'Orient.

S'il se trouve donc qu'une Comete, après avoir passé près d'une Etoile fixe, retourne à cette Etoile après quelque espace de temps, ou, ce qui revient au même, si elle retourne au même point de l'Ecliptique, où elle étoit quelques jours auparavant, il en résulte nécessairement qu'elle s'est avancée, de même que la Terre, de l'Occident vers l'Orient, d'une quantité comprise entre les deux paralleles tirées de la Terre au même point de l'Ecliptique, qui sera plus ou moins grande, suivant la différente direction & inclinaison de l'orbe de la Comete.

C'est ce qui est arrivé dans le cours de nos Observations, pendant lequel nous l'avons vûë répondre successivement aux mêmes lieux de l'Ecliptique, où elle s'est trouvée dans les précédentes

précédentes Obſervations. Ainſi il eſt démontré que cette Comete, rétrograde en apparence, avoit un mouvement réel de l'Occident vers l'Orient, & que par conſéquent, ſuivant ce que j'avois expoſé dans le Mémoire précédent, elle ſe trouvoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter.

Pour déterminer préſentement avec plus d'exactitude ſa diſtance au Soleil & à la Terre, de même que la quantité, la direction de ſon mouvement propre & les autres éléments de ſa Théorie, nous pourrions employer la Méthode générale que nous avons propoſée dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1727. Mais comme les circonſtances de cette Obſervation nous fourniſſent une Méthode nouvelle, beaucoup plus ſimple & plus aiſée pour déterminer ces éléments, nous l'employerons ici, après en avoir donné une idée la plus ſenſible qu'il nous ſera poſſible.

On choiſira pour cette recherche trois Obſervations exactes, dont deux ont été faites, lorſque la Comete s'eſt trouvée répondre à un même point de l'Ecliptique, & la troiſiéme à un autre lieu quelconque. Si ces trois Obſervations avoient été dirigées à un même lieu de l'Ecliptique, il eſt clair, par les raiſons que nous avons rapportées ci-deſſus, que le mouvement de cette Comete auroit été meſuré par l'intervalle compris entre les lignes tirées de la Terre à ce même point, que l'on peut regarder comme paralleles entre elles; ainſi connoiſſant la direction & l'inclinaiſon de la route de la Comete, de même que l'intervalle entre ces paralleles, qui eſt meſuré par le mouvement de la Terre ſur ſon orbe, on trouveroit la quantité du mouvement de la Comete, mais non pas ſa diſtance à la Terre, que l'on pourroit ſuppoſer telle que l'on voudroit.

Mais ſi la ligne tirée de la Terre dans une troiſiéme Obſervation ne ſe rapporte pas au même lieu de l'Ecliptique, où étoient les deux autres, mais qu'elle leur ſoit inclinée, il eſt évident que la Comete a dû paſſer en de-çà ou au de-là du point du concours de ces lignes, & que par conſéquent

son inclinaison plus ou moins grande doit déterminer sa véritable distance à la Terre.

Soit dans la Figure ci-jointe *T* & *B*, le vrai lieu de la Terre sur son orbe annuel dans deux différentes Observations. *TC*, *BR*, deux lignes tirées de la Terre au vrai lieu de la Comete que l'on suppose répondre au même point de l'Ecliptique, & que l'on peut regarder comme paralleles entre elles. *PC* la ligne tirée de la Terre à la Comete dans une Observation précédente. Du point *T* soit menée la ligne *TD* perpendiculaire à *BR* que l'on prolongera en *G*, ensorte que *TG* soit à *TD*, comme l'intervalle entre le temps de l'Observation de la Comete, lorsque la Terre étoit aux points *T*, & *B* est à l'intervalle entre le temps de l'Observation, lorsque la Terre s'est trouvée aux points *T* & *P*. Du point *G* soit menée la ligne *GL* parallele à *BR* & *TF* qui rencontre *PC* au point *L*. Je dis que supposant que la Comete ait parcouru des espaces égaux en temps égaux sur une ligne sensiblement droite, le point *L* marque le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique, lorsque la Terre étoit au point *P*. Car si l'on tire du point *L* une ligne quelconque *LFR* comprise entre les lignes tirées de la Terre au lieu de la Comete dans les trois Observations, à cause des paralleles *GL*, *BR*, *TF*, on aura *LF* à *RF*, comme *TG* à *TD*, c'est-à-dire, par la construction comme l'intervalle entre la premiére & la seconde Observation est à l'intervalle entre la seconde & la troisiéme, & par conséquent le point *L* marquera le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique dans toutes les directions qu'on ait pû lui attribuer.

Si l'on choisit presentement une autre Observation où la Terre étant, par exemple, au point *A*, la ligne *AI* détermine son vrai lieu sur l'Ecliptique. On prolongera *TD* en *H*, ensorte que *DH* soit à *DT* comme l'intervalle de temps entre la troisiéme & la quatriéme Observation est à celui qui est entre la seconde & la troisiéme ; & du point *H*, on tirera la ligne *HI* parallele à *BR*, qui rencontrera *AI* au point *I*.

Ce point repreſentera le lieu de la Comete dans la quatriéme Obſervation, & la ligne *LI* tirée du point *L* au point *I*, meſurera la quantité du mouvement de la Comete réduit à l'Ecliptique depuis la premiére juſqu'à la quatriéme Obſervation. Car *IR* eſt à *RF* comme *DH* eſt à *DT*, c'eſt-à-dire, par la conſtruction comme l'intervalle entre la troiſiéme & la quatriéme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la ſeconde & la troiſiéme. Mais nous venons de démontrer que *LF* eſt à *FR* comme l'intervalle entre la premiere & la ſeconde Obſervation eſt à celui qui eſt entre la ſeconde & la troiſiéme. Donc la ligne *LI* eſt telle que ſes portions *LF*, *FR*, *RI*, compriſes entre les lignes *PC*, *TC*, *BR* & *AI*, tirées de la Terre au lieu de la Comete dans ces différentes Obſervations, ſont entr'elles comme les intervalles de temps entre ces Obſervations, c'eſt-à-dire, comme les eſpaces parcourus, & par conſéquent la ligne *LFRI* repréſente le cours véritable de la Comete réduit à l'Ecliptique. Ce qu'il falloit trouver.

Pour déterminer en nombres tous ces éléments, on trouvera par la théorie du Soleil, les diſtances *SP*, *ST*, *SB*, *SA*, de la Terre au Soleil dans le temps de ces quatre Obſervations, & les angles *PST*, *TSB*, *BSA*, compris entre ces lignes ; & dans les triangles *PST*, *TSB* & *BSA*, dont les côtés ſont connus & les angles compris entre ces côtés, on aura la valeur des cordes *PT*, *TB*, *BA*, & des angles *SPT*, *STP*, *STB*, *SBT*, *SBA* & *SAB*. Retranchant l'angle *STP* de l'angle *STC* qui meſure la diſtance de la Comete au Soleil au temps de la ſeconde Obſervation, on aura l'angle *CTP* & dans le triangle *CTP*, dont le côté *TP* eſt connu, de même que l'angle *CTP* & l'angle *PCT*, différence entre le vrai lieu de la Comete dans les deux premiéres Obſervations, on aura la valeur du côté *CP*.

Retranchant pareillement l'angle *SBT* de l'angle *SBR*, diſtance de la Comete au Soleil au temps de la troiſiéme Obſervation, on aura l'angle *TBD*, & dans le triangle *BDT* rectangle en *D*, l'angle *DBT* & l'hypothénuſe *BT* étant

connus, on trouvera la valeur de *DT*. On fera enſuite comme l'intervalle de temps entre la ſeconde & la troiſiéme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la premiére & la ſeconde, ainſi *DT* eſt à *TG* ou *LK* & dans le triangle *CKL* rectangle en *K*, dont le côté *LK* eſt connu, & l'angle *PCT* ou *LCK*, on trouvera le côté *CL*, qui étant retranché de la ligne *CP*, déterminée ci-deſſus, donne la valeur de *LP*, diſtance de la Terre à la Comete dans la premiére Obſervation réduite à l'Ecliptique. On trouvera de la même maniére la diſtance *AI* de la Terre à la Comete dans la quatriéme Obſervation. Car ſi l'on retranche de l'angle *SAB* connu, l'angle *SAI* qui meſure la diſtance de la Comete au Soleil dans cette Obſervation, on aura l'angle *EAB*, & dans le triangle *EAB* dont le côtés *AB* eſt connu, de même que l'angle *EAB* & l'angle *AEB*, différence entre le vrai lieu de la Comete dans les deux derniéres Obſervations, on trouvera le côté *AE*.

On fera enſuite comme l'intervalle de temps entre la ſeconde & la troiſiéme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la troiſiéme & la quatriéme. Ainſi *DT* eſt à *DH* ou *IZ*; & dans le triangle *EZI* rectangle en *Z*, dont le côté *IZ* eſt connu & l'angle *IEZ* ou *AEB*, on trouvera la valeur de l'hypothénuſe *EI*, qui étant ajoûtée à *AE*, donne la diſtance *AI* de la Comete à la Terre dans la quatriéme Obſervation réduite à l'Ecliptique.

Ayant employé la Méthode que nous venons d'expoſer dans les Obſervations qui ont été faites le 2 & le 26 Septembre, & le 18 Novembre 1729, on trouve que ſuppoſant la diſtance moyenne de la Terre au Soleil de 22 mille demi-diametres de la Terre, ou 33 millions de lieües, telle qu'on l'a déterminée par les Obſervations de ſa Parallaxe, la diſtance véritable de la Comete à la Terre étoit le 2 Septembre 1729 de 113 millions & 372 mille lieües.

Par d'autres Obſervations des 20 Septembre & 18 Novembre, on trouve la diſtance véritable de la Comete à la Terre le même jour 2 Septembre 1729 de 113 millions 413 mille lieües, qui comparée à la premiére détermination,

eſt environ comme 900 à 901 ; ainſi ces deux diſtances trouvées par des Obſervations différentes, ne ſont éloignées l'une de l'autre que d'un milliéme, ce qui eſt une préciſion beaucoup plus grande que celle que l'on oſeroit eſpérer dans de pareilles recherches.

Comme nôtre Méthode & les calculs qui en réſultent ſont fondés ſur la ſuppoſition que la Comete a décrit pendant l'intervalle entre les Obſervations que l'on a comparées enſemble, des eſpaces égaux en temps égaux ſur une ligne ſenſiblement droite, la conformité qui ſe trouve entre ces diſtances eſt une preuve que les inégalités apparentes, cauſées par la courbure de ſon orbe, ont été compenſées par celles de l'augmentation ou de la diminution de ſon mouvement.

A l'égard de la diſtance de la Comete à la Terre dans les derniéres Obſervations que nous en avons faites, nous la trouvons par celles du 18 Janvier de cette année 1730 de 171 millions 206 mille lieües; ainſi elle s'eſt éloignée de la Terre, dans l'eſpace de quatre mois & demi, d'environ 58 millions de lieües, la moitie de la diſtance où elle étoit le 2 Septembre; d'où il ſuit, par les regles de l'Optique, que ſon diametre ne devoit être diminué que d'un tiers, & ſa lumiére d'un peu plus de la moitié de celle qu'elle avoit au commencement que nous l'avons apperçûë, de ſorte qu'il n'eſt point ſurprenant que l'on ait continué à l'obſerver pendant ſi long-temps, quoiqu'elle ait paru fort petite dès le commencement qu'on l'a apperçûë.

Après avoir déterminé la diſtance de la Comete à la Terre dans les différentes Obſervations que nous en avons faites, nous avons crû devoir chercher ſa diſtance au Soleil, que l'on peut regarder comme le principe de ſon mouvement. Car quoique l'on puiſſe ſuppoſer que les Cometes ſont des Planetes qui ont pour foyer des Soleils différents du nôtre, & que quelques Auteurs ayent crû que ce pouvoient être des Satellites de quelque Planete principale de nôtre Tourbillon, mais ſi éloignée de nous, qu'elle eſt toûjours inviſible à nos yeux, & que les Satellites ne deviennent viſibles que lorſqu'ils

ſont par rapport à nous dans la partie la plus baſſe de leur cercle. Cependant en attendant que ces ſuppoſitions ſoient confirmées par des Obſervations qui ayent quelque évidence, nous avons eſtimé qu'il étoit convenable de déterminer le mouvement des Cometes par rapport au Soleil, que preſque tous les Philoſophes conſiderent comme le centre du mouvement des autres Planetes.

Nous avons donc calculé la diſtance de cette Comete au Soleil ſuivant nôtre théorie, & nous avons trouvé qu'elle étoit le 2 Septembre de 139 millions 667 mille lieües, le 22 Novembre de 144 millions 126 mille lieües, & le 18 Janvier 1730 de 148 millions 89 mille lieües.

La moyenne diſtance du Soleil à la Terre eſt à celle de cet Aſtre à Jupiter comme 100 à 521; d'où il ſuit que la diſtance de cette Comete au Soleil étoit le 2 Septembre 1729 à celle de Jupiter au même Aſtre, environ comme 4 à 5, de ſorte que cette Comete étoit alors, comme nous l'avions ſuppoſé dans le Mémoire précédent, entre les orbes de Mars & de Jupiter, où elle eſt reſtée pendant tout le temps que nous l'avons apperçûë.

A l'égard de la quantité de ſon mouvement, nous trouvons que depuis le 2 Septembre juſqu'au 22 Novembre 1729 dans l'intervalle de 81 jours, elle a décrit par rapport au Soleil 13 degrés & 3 minutes ſur ſon orbe, ce qui eſt à raiſon de 9′ 40″ par jour, & que depuis le 22 Novembre 1729 juſqu'au 18 Janvier 1730, dans l'intervalle de 57 jours, elle a parcouru 8ᵈ 11′ 20″, ce qui eſt à raiſon de 8′ 37″ par jour; nous trouvons auſſi que ſon mouvement réel ſur ſon orbe dans le premier intervalle de temps eſt à ſon mouvement dans le ſecond comme 1215 à 1140, de ſorte que la diminution de ſa vîteſſe réelle ſur ſon orbe eſt comme 15 à 14, moindre à peu près de la moitié de celle de ſa vîteſſe apparente qui eſt comme 18 à 16; ce qui eſt conforme à ce que l'on obſerve dans les Planetes, lorſqu'elles s'éloignent du Soleil, où l'on remarque deux ſortes de diminutions; l'une apparente, qui n'eſt que l'effet de leur plus

grande distance au Soleil, & l'autre réelle sur leur orbe, à cause qu'elles s'éloignent de plus en plus du principe de leur mouvement.

Il faut présentement éxaminer si les degrés de vîtesse que l'on a remarqué dans cette Comete s'accordent à la regle de Kepler, qui s'observe non-seulement dans les Planetes autour du Soleil, mais même dans les Satellites autour des Planetes principales. Suivant cette regle, une Planete éloignée du Soleil quatre fois plus que la Terre, doit faire sa révolution dans l'espace de 8 années, qui est la racine quarrée du cube de sa distance au Soleil, son mouvement réel sur son orbe doit être deux fois plus lent que celui de la Terre, & son moyen mouvement journalier de 7′ 30″.

Quoique cette Comete, dans le temps que nous l'avons apperçûë, se soit trouvée éloignée un peu plus de quatre fois du Soleil que la Terre ne l'est de cet Astre, cependant son mouvement journalier a été déterminé de 9′ 40″, plus grand de près d'un quart qu'il n'auroit dû l'être, suivant cette regle, à laquelle il s'accorderoit plus parfaitement, en supposant que cette Comete, après avoir passé par son Périhélie, n'étoit pas encore arrivé à ses moyennes distances, où sa vîtesse qui alloit en diminüant, devoit être plus petite que celle que l'on avoit observée.

En effet, si l'on considere la direction de la route de cette Comete, & sa distance à la Terre dans les différentes Observations, dont le rapport a augmenté continuellement, pendant que son mouvement diminüoit continuellement de vîtesse, il résulte de la figure elliptique, qu'au temps de son apparition elle devoit être près de son Périhélie, d'où elle s'éloignoit en s'approchant de ses moyennes distances.

Ainsi la regle de Kepler reçoit un nouveau degré de confirmation de la théorie de cette Comete dans le rapport des distances des corps célestes aux divers degrés de leur vîtesse, puisqu'outre les Planetes principales & leurs Satellites, elle représente assés éxactement la quantité du mouvement & de la vîtesse de cette Comete, qui est peut-être la seule dont la

diſtance au Soleil & à la Terre ait été déterminée avec preſque autant d'exactitude que celle des autres Planetes.

Connoiſſant la diſtance de cette Comete au Soleil & la quantité de ſon mouvement en divers endroits de ſon orbe, on pourroit déterminer géométriquement la figure de l'Ellipſe ſur laquelle elle fait ſa révolution ; mais comme cette recherche, pour être exacte, demande que l'on connoiſſe avec une très-grande préciſion ſa diſtance au Soleil dans les diverſes Obſervations que l'on y employe, nous nous contenterons de remarquer que l'on peut repréſenter aſſés exactement ſon cours, en ſuppoſant que ſa moyenne diſtance au Soleil eſt à celle de la Terre au Soleil comme 4800 eſt à 1000. D'où il ſuit, ſuivant la regle de Képler, que ſa révolution ſur ſon orbe doit être d'environ dix années, & ſon moyen mouvement journalier de 6 minutes.

Par ce moyen, attribuant à l'orbe de cette Comete une excentricité de 1000 parties, enſorte que la proportion de ſon grand axe à celle du petit ſoit comme 5800 à 3800, on aura ſon mouvement vrai dans ſon Aphélie de près de 4 minutes, & dans ſon Périhélie de plus de 9 minutes, conformément à celui que nous avons obſervé dans cette ſituation.

A l'égard du lieu du Nœud de cette Comete, nous l'avons trouvé par les premiéres Obſervations à $10^d\ 16'$ du Verſeau, & par les derniéres à $10^d\ 6'$ du même Signe, éloigné ſeulement de 6 degrés du lieu où nous avons commencé à l'appercevoir. Nous avons auſſi trouvé l'inclinaiſon de l'orbite de cette Comete à l'Ecliptique par les premiéres Obſervations comparées enſemble, de $76^d\ 56'$, & par les derniéres, de $76^d\ 34'$, avec une différence ſeulement de $22'$ de l'une à l'autre, ce qui eſt bien différent de celles des autres Planetes, dont la plus grande, qui eſt celle de Mercure, n'eſt au plus que de 7 degrés ; mais comme l'on ne connoît point encore, du moins avec évidence, la cauſe phyſique de l'inclinaiſon des Orbites des Planetes à l'Equateur du Soleil, & la raiſon pour laquelle ces inclinaiſons ſont différentes entr'elles, peut-être que les Traités que l'on compoſera pour le Prix que l'on vient

vient de proposer, nous donneront quelque éclaircissement sur la cause d'une si grande inclinaison.

Il nous reste présentement à déterminer les lieux par où cette Comete a dû passer depuis que nous avons cessé de la voir, ceux où elle se trouve présentement, & où on pourra l'appercevoir dans la suite, afin de la pouvoir chercher dans le Ciel au temps qu'elle sera dans la situation la plus convenable.

Elle étoit à la fin de Janvier 1729 au dessus de la Constellation du Dauphin, d'où elle s'est avancée vers le Pégase, & elle doit se trouver présentement dans l'aîle du Cygne avec une latitude septemtrionale de près de 50 degrés, elle passera ensuite vers la queüe de cette Constellation, & se trouvera dans le mois de Septembre en opposition avec le Soleil, qui sera la situation la plus propre pour la voir, parce qu'elle sera alors plus près de la Terre que dans toute autre saison de cette année. Il sera cependant alors très-difficile à la découvrir, parce que sa distance sera encore plus grande que lorsqu'on a cessé de la voir à la vûë simple.

Longitude & Latitude de la Comete qui a paru en 1729 & 1730.

1729.				Longitude.				Latitude Boréale.		
Août	31 à	9^h	34′	♒	8^d	34′	0″	28^d	48′	9″
Sept.	2	9	25		8	3	10	29	6	30
	3	9	28		7	48	42	29	14	4
	10	8	6		6	18	34	29	55	7
	11	7	59		6	6	49	30	4	35
	12	7	33		5	55	20	30	9	32
	15	8	28		5	21	29	30	24	45
	16	8	24		5	11	22	30	29	0
	18	7	55		4	50	51	30	39	25
	19	7	7		4	42	58	30	43	50
	21	7	8		4	25	50	30	51	48
	23	7	0		4	8	36	31	0	17
	26	7	0		3	48	39	31	13	57

1729					Longitude.			Latitude Boréale.		
Octob.	10	à 7h	10'	♒	2d	38'	1"	31d	54'	29"
	11	7	5		2	36	5	31	56	10
	12	7	8		2	34	32	31	59	19
	14	7	48		2	30	20	32	3	1
	19	6	40		2	26	13	32	15	13
	22	7	7	Directe	2	33	42	32	21	31
	24	6	15		2	34	17	32	23	8
	26	6	32		2	36	46	32	28	0
	27	8	33		2	39	43	32	30	0
Nov.	10	8	24		3	42	37	32	57	17
	14	6	12		4	8	27	33	3	9
	16	7	40		4	23	5	33	6	2
	17	6	37		4	29	55	33	10	0
	18	5	38		4	38	14	33	11	40
	20	9	12		4	54	33	33	16	30
	12	6	28		5	10	31	33	18	40
	24	5	54		5	29	29	33	26	0
	30	7	55		6	27	23	33	39	34
Dec.	2	6	54		6	50	20	33	43	58
	3	6	19		6	59	13	33	45	45
	9	6	17		8	6	41	34	1	52
	14	6	0		9	7	11	34	18	10
	19	5	32		10	6	46	34	32	38
	20	5	29		10	19	16	34	37	24
	24	6	34		11	14	52	34	45	32
	27	5	36		11	57	32	35	1	39
1730										
Janv.	7	5	35		14	41	31	35	44	34
	8	6	10		14	57	23	35	48	50
	16	5	48		17	1	29	36	27	30
	17	5	51		17	16	12	36	33	22
	18	5	57		17	34	16	36	38	50

4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

40 39 38 37 36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22 21

21 Janvier 1730.

Route de la Comete de 1729

31 Juillet 1729

5 10 15

Simonneau Sculp.

ANATOMIE DE LA POIRE.

Par M. DU HAMEL.

IL n'eſt guére poſſible de raiſonner juſte ſur un corps organiſé, & de décider des uſages des parties qui le compoſent, ſans avoir auparavant une connoiſſance éxacte de leur ſtructure, de leur ſituation, & de la connexion qu'elles ont les unes avec les autres. 19 Juillet 1730.

C'eſt la voye qu'ont tenu juſqu'ici tant d'habiles Anatomiſtes pour débroüiller le méchaniſme prodigieux qui ſe trouve dans le corps des Animaux. C'eſt à cet ordre, qu'ils ont gardé dans leurs recherches, que nous ſommes redevables de tout ce que nous avons aujourd'hui de plus certain ſur l'œconomie du Corps humain, & cet ordre ne peut être changé, ſi l'on veut réüſſir dans l'examen de quelque corps organiſé que ce ſoit.

Il arrive cependant aſſés ſouvent que cet éxamen ſcrupuleux des parties rend la connoiſſance des uſages très-difficile.

A force de travail & de recherches, on découvre une ſtructure fine, délicate & compoſée. Les deſſeins ſur leſquels elle a été formée ſont incertains, & les effets qu'elle doit produire, bien différents de ceux que nous attribuons (par conjecture ſeulement) à une organiſation ſimple & unie, dont nous nous étions formé une idée peu conforme à la réalité.

C'eſt ce que m'a fait connoître le travail que j'ai fait ſur la Poire. La ſtructure d'une pelote de coton, ou, ce qui eſt la même choſe, d'une éponge, d'un parenchyme, chargé des ſucs du Poirier, me paroiſſoit d'abord ſuffiſante pour ſatisfaire à l'explication de tout ce que je connoiſſois de ce fruit; mais depuis qu'en y prêtant plus d'attention, j'y ai découvert des parties ſolides, & d'autres molles, des vaiſſeaux contournés de différentes maniéres dans le même fruit, & toûjours

uniformément dans les différents fruits du même genre; depuis que j'ai obſervé des eſpeces de membranes, de cartilages, de glandes, de ligaments, & de pores, j'ai bien reconnu que les explications ſimples n'étoient pas toûjours les meilleures en Phyſique, & qu'il falloit abandonner les préjugés que j'avois ſur la nature de la Poire : pour y parvenir, je réſolus de m'attacher uniquement à la ſtructure & à la ſituation de ſes parties, & de mettre après cet éxamen celui de leurs uſages.

Sur ce projet, il y a environ trois ans que j'eſſayai de diſſéquer pluſieurs fruits mols, pourris ou cuits de différente maniére. Mais après ces préparations, à peine les parties les plus groſſiéres ſe trouverent-elles conſervées; mon travail ne ſervit donc qu'à me faire entrevoir un nombre d'organes, ſans en pouvoir reconnoître aucun un peu clairement.

Il eſt vrai qu'on employe même avantageuſement ces ſortes de préparations dans l'anatomie des Animaux, mais ce n'eſt que ſur certaines parties; la cuiſſon, par exemple, fait appercevoir bien clairement la direction des fibres d'un muſcle; mais elle détruit entiérement les vaiſſeaux & les membranes, elle les réduit en gelées.

Les macérations conviennent en plus d'occaſions, elles ne détruiſent que les parties extrêmement fines qui lient & uniſſent les autres qu'on ſe propoſe de connoître; par ce moyen on eſt donc en état d'en éxaminer la ſtructure, ce qui me détermina à mettre tremper dans différentes liqueurs pluſieurs eſpeces de Poires que je choiſis à deſſein, les unes fort mûres, & les autres encore vertes.

Je n'ai pû retirer aucun avantage des Eaux fortes, elles détruiſent tout, & lorſque les fruits y ont trempé long-temps, ils deviennent d'une ſubſtance qui paroît uniforme & preſque comme de la pâte.

Ce que j'ai remarqué ſeulement, c'eſt que les fruits caillent fort promptement l'Eau-forte, & la rendent comme de la gelée, qui ſe réduit enſuite, quoique difficilement, en une eſpece de *Serum*.

Les fruits acides & les doux produisent également cette coagulation, j'en ai fait l'expérience sur les Oranges douces & aigres, sur les Cerises & les Groseilles, sur les Poires & les Pommes, &c.

On ne tire pas non plus un grand avantage de la macération des fruits dans l'Eau-de-vie & le Vinaigre distillé; ces liqueurs, au lieu de commencer la desunion des parties, les racornissent, & les rendent ainsi plus difficiles à disséquer.

C'est de la macération dans l'eau commune dont j'ai retiré le plus d'avantage, elle pénetre petit-à-petit, elle s'insinüe entre les parties des fruits, elle en détruit un nombre d'infiniment fines, & épargne les autres, elle en augmente seulement un peu le volume, ce qui les fait plus aisément appercevoir, mais elle agit très-lentement, de sorte que quelques-uns n'ont été dans l'état où je les demandois qu'au bout de deux ans.

Par les macérations j'étois donc parvenu à attendrir mes Poires, mais cela ne suffisoit pas, il falloit achever la desunion d'un nombre de parties qui par leur entrelassement forment la substance de ce fruit. Voici comme je m'y suis pris.

Je les ai toûjours disséqué nageant dans l'eau, quelquefois avec une Lancette ou un petit Scapel, d'autres fois avec la pointe d'un Canif très-délié ou une érigne très-fine; souvent même la délicatesse des parties est si grande, que la seule pointe d'un curedent m'a fort bien servi, mais rien ne m'a mieux réussi que de darder de l'eau chaude avec une Seringue à injection sur les endroits difficiles à séparer, ou de souffler simplement avec un tuyau sur ces endroits, cependant cela n'a quelquefois pas suffi, & j'ai été obligé de presser mollement entre les doigts ou avec des petites pinces, & de secoüer & agiter dans l'eau la piéce que je préparois pour occasionner avec douceur & ménagement la desunion que je souhaitois; mais ce qu'il est important de remarquer, lorsqu'on veut préparer proprement une partie, c'est de ne pas entreprendre de la disséquer tout de suite, il faut, après l'avoir travaillée un temps, la laisser reposer & se macérer encore pendant une quinzaine de jours.

Ces préparations, si néceſſaires en Anatomie, dépendent d'un grand nombre de précautions qui paroiſſent quelquefois dégénérer en ſcrupules, elles n'en ſont cependant pas moins importantes, c'eſt ce qui m'a engagé à détailler les moyens que j'ai employés pour reconnoître les parties que je me ſuis propoſé de décrire, afin que ceux qui voudront perfectionner cette recherche, puiſſent profiter des mêmes ſecours qui m'ont été ſi utiles.

Après m'être ſuffiſamment étendu ſur ces ſortes de préparations en général, je crois qu'il ſera plus utile de joindre à la deſcription de chaque partie la maniére de la découvrir, ainſi je paſſe à la diviſion générale de la Poire.

La Poire, comme l'a décrite M. de Tournefort, eſt un fruit charnu, plus mince ordinairement vers la queüe que vers l'autre bout, où il eſt garni d'un nombril formé par les découpures du calice, on trouve dans ſon intérieur cinq loges remplies de pépins, c'eſt-à-dire, des ſemences couvertes d'une peau cartilagineuſe.

Pl. I. Fig. 1. Pl. II. Fig. 1. & 2.

Cette définition, qui ſuffiſoit à cet Auteur pour caractériſer la Poire, peut bien nous ſervir à faire la diviſion de ce fruit en trois parties, qui ſont, la tête ou l'ombilic, la queüe ou le pédicule, & le corps, parties à décrire chacune en particulier : mais comme actuellement ma vûë eſt différente de celle de cet illuſtre Botaniſte, & que l'éxamen que je me propoſe de ce fruit eſt plus intime que celui qu'il avoit pour but, il m'a paru que j'étois obligé de le conſidérer dans ſes téguments, dans ſes vaiſſeaux & dans les organes qui appartiennent à ſes pépins ; trois objets aſſés conſidérables pour donner de l'étendüe à autant de parties de mon Mémoire. Je commence par celle qui eſt extérieure.

DES TEGUMENTS.

On retranche de deſſus ces fruits une peau qui eſt ordinairement dure & deſagréable. Par l'examen que j'en ai fait, j'ai reconnu que ce qu'on enleve avec le couteau eſt compoſé de quatre ſubſtances différentes qui s'étendent ſur tout

le fruit, & le recouvrent en entier, c'eſt pourquoi je les nomme ſes *téguments* ou ſes *enveloppes communes*, dont la premiére, en commençant par l'extérieur, peut s'appeller l'*épiderme*, la deuxiéme le *corps muqueux*, la troiſiéme le *tiſſu pierreux*, & la quatriéme la *peau*. J'ai crû devoir diſtinguer ainſi ces quatre téguments, par la reſſemblance qu'ils ont avec ceux du Corps humain, comme il ſera aiſé de s'en convaincre par l'éxamen que nous allons faire de chacun d'eux en particulier.

DE L'EPIDERME.

L'orſqu'on éxamine avec une Loupe la ſuperficie de la plûpart des Poires, elle paroît chagrinée, & on découvre deſſus, outre des petites gales dont nous parlerons dans la ſuite, une quantité de petits points blancs, qui examinés avec un bon Microſcope, ne paroiſſent être qu'une membrane mince, tranſparente & blancheâtre qui s'eſt détachée du fruit, & s'eſt relevée, comme on le voit dans la Fig. 2. Pl. I. Pl. I. Fig. 3. Figure 2.

De plus j'ai encore remarqué ſur l'écorce de quelques fruits macérés, qu'il reſtoit de petits morceaux de membranes qui ſe diſtinguoient du reſte en ce qu'ils étoient bruns, brillants, gerçés, & qu'ils ne ſe détachoient que par écailles.

Je crûs d'abord que ces morceaux de membrane appartenoient à une cinquiéme enveloppe très-mince, délicate, fort adhérente, & que je ne pouvois à cauſe de cela appercevoir que dans quelques endroits, quoiqu'elle recouvrît toute la Poire, cela paroiſſoit probable ; cependant par les moyens que j'ai employés pour m'en aſſûrer, j'ai reconnu parfaitement que ce que j'avois apperçû tant ſur les fruits verts que ſur les macérés, n'étoit que des parcelles d'épiderme qui s'étoient deſſéchées, & ſous leſquelles il s'en étoit régénéré un nouveau.

Pour examiner la ſtructure de ces parcelles d'épiderme, j'en mis de très-petits morceaux au foyer d'un Microſcope à liqueur, ils me parurent d'une ſubſtance très-uniforme, & je n'y reconnus ni ramification de vaiſſeaux ni pores (peut-être

à cauſe de leur deſſéchement) je remarquai ſeulement qu'ils étoient très-tranſparents : mais une membrane ſi mince peut-elle être opaque ?

On a coûtume d'employer un fer rouge ou l'eau boüillante pour détacher l'épiderme des Animaux ; ces mêmes ſecours m'ont été auſſi très-utiles pour reconnoître celui de nôtre fruit, de ſorte que par leur moyen je l'ai apperçû auſſi clairement dans les jeunes fruits que je l'avois fait dans les fruits mûrs à l'aide des macérations, & dans les mols ſans aucune préparation.

PL. I. Fig. 1. Cette membrane ſe trouve par tout le fruit, je l'ai obſervée à la queüe, au corps & dans l'ombilic, elle eſt mince, d'un tiſſu uni, qui ne paroît point composé de vaiſſeaux, mais elle eſt ferme, & fortement attachée au corps muqueux.

Fig. 4. Le Microſcope nous la fait encore appercevoir percée d'une infinité de pores qui ne ſont pas tous de la même groſſeur, les uns ſont très-fins, & forment comme un fond de ſable, les autres ſont plus conſidérables, & arrangés de telle ſorte, qu'ils imitent en quelque maniére un réſeau.

La couleur de l'épiderme eſt incertaine, quelquefois elle paroît tranſparente comme de l'écaille blonde ; pour lors elle prend, ou plûtôt elle laiſſe appercevoir la couleur du corps muqueux, mais d'autres fois, & ſur-tout dans les endroits où le fruit a été le plus expoſé au Soleil, elle paroît rouge.

On pourroit donc à cette occaſion faire la queſtion, ſi la couleur des fruits réſide dans l'épiderme ou dans le corps muqueux.

Je ſçais que dans les fruits qui ſont colorés naturellement comme la Pomme de calville, pluſieurs Pêches, la Poire ſanguinole, &c. la couleur réſide non ſeulement dans le corps muqueux, mais même dans les vaiſſeaux, & ſur-tout dans leur épanoüiſſement aux approches du tiſſu pierreux.

Mais dans les Poires qui ne ſont pas rouges naturellement, & qui ne prennent cette couleur que par l'action du Soleil, elle ne paſſe jamais le corps muqueux, & paroît ſouvent ne réſider que dans l'épiderme, ou du moins dans la ſurface externe

externe du corps muqueux, ce qui n'eſt pas aiſé à vérifier, car la couleur rouge diſparoît, ſoit qu'on mette les fruits dans l'eau boüillante, ſoit qu'on eſſaye d'en détacher l'épiderme avec un fer rouge ; ainſi pour conſerver la couleur, on n'a d'autre moyen de détacher l'épiderme qu'avec la pointe du Scalpel. Qui ſçait pour lors ſi on n'emporte pas une partie du corps muqueux avec l'épiderme ? ces deux membranes ſont fort minces, avec cela très-intimement unies, ainſi elles ſont très-difficiles à ſéparer l'une de l'autre : je ſuis cependant venu à bout de le faire dans quelques eſpeces, ce qui paroîtroit décider la queſtion ; mais comme cette obſervation a beaucoup de rapport avec celle que j'ai été obligé de faire pour reconnoître ce corps muqueux, je n'en parlerai que lorſque j'examinerai cette membrane.

Les petits points blancs que j'ai remarqués être des petits morceaux d'épiderme deſſéchés, & qui tombent par écailles, font voir qu'il ſe détruit petit à petit comme dans les Animaux ; & ce qui eſt encore admirable, c'eſt que ſa régénération ſe fait auſſi de la même maniére ; car ſi, comme je l'ai déja remarqué, l'on examine le deſſous de ces écailles blanches dont je viens de parler, on y trouve un nouvel épiderme tout régénéré ſans aucune cicatrice. En effet comme l'épiderme ſe détruit peu-à-peu, & ſe régénere de même, la ſuperficie des fruits ne ſeroit-elle pas toute galeuſe, ſi ſa régénération ſe faiſoit avec cicatrice. Pl. I. Fig. 2.

Le rapport & la conformité eſt ſi exacte entre l'épiderme de nôtre fruit & celui de l'Homme, que je ſerois fort porté à lui attribuer une pareille origine : mais comment l'épiderme de l'Homme eſt-il produit ? eſt-ce par une liqueur, par un ſuc, ou une roſée qui ſe condenſe & s'épaiſſit ſur la peau, ou par l'expanſion de quelques vaiſſeaux ? Si c'eſt une roſée, s'échappe-t-elle des nerfs ou des vaiſſeaux ſécrétoires, ou indifféremment de tous les vaiſſeaux ? Si c'eſt plûtôt par l'expanſion de quelques vaiſſeaux, eſt-ce par celle des papilles nerveuſes, des vaiſſeaux ſécrétoires ou des lymphatiques, ou ſans diſtinction de tous les vaiſſeaux ? Quoique la production

de cette membrane ait été un point fort discuté, il est cependant encore très-incertain, chaque Anatomiste a presque eu son sentiment particulier, & chaque sentiment a encore ses partisans.

En attendant que nôtre travail sur l'anatomie des Végétaux nous ait fourni quelques lumiéres sur ce sujet, je me contenterai de remarquer que les nerfs étant les organes de la sensation & du mouvement, nôtre Poire qui n'a point de mouvement, & qui ne nous donne aucune marque de sensibilité, n'a probablement point de nerfs, d'ailleurs les dissections les plus exactes ne nous y ont rien fait découvrir qui en eût le caractere, ainsi l'épiderme de nôtre Poire n'est probablement formé ni par l'épanoüissement des houppes nerveuses, ni par l'épaississement du suc nerveux.

Mais ce fruit transpire (nous nous en sommes assûrés par des expériences particuliéres) ainsi il y a des vaisseaux excrétoires; d'un autre côté il est recouvert par un corps muqueux (comme nous allons le voir) ainsi son épiderme pourroit être formé ou par l'épanoüissement des vaisseaux sécrétoires, ou par l'épaississement de la superficie extérieure du corps muqueux. Je serois fort porté à embrasser ce dernier sentiment, sur-tout si cette muquosité qu'on remarque en touchant ce corps, qu'on appelle à cause de cela *muqueux*, vient d'une espece d'extravasion de la lymphe glutineuse qui sert à la réparation des vaisseaux & des membranes; mais encore un coup la nature de l'épiderme n'est gueres plus éclaircie par l'anatomie de la Poire que par celle des Animaux, ainsi j'attends, pour embrasser un sentiment, que l'anatomie de quelques autres fruits m'ait été plus favorable.

Enfin, pour dire un mot des usages de cette membrane, il me paroît probable que sa situation, sa solidité, & les autres caracteres que nous avons remarqués en elle, sont des preuves manifestes que la Nature l'a destinée à défendre des injures de l'air les autres parties de la Poire qui sont tendres, molles & délicates.

La fermeté de l'épiderme peut encore écarter quantité de

petits insectes, qui sans cela détruiroient toutes les Poires, comme il arrive au Beurré & au Doyenné. Lorsque leur épiderme est fort éminci par une grande maturité, cette membrane peut encore diminuer la transpiration, qui étant trop abondante, dessécheroit les fruits dans les grandes chaleurs.

Je finis cet article sans parler des maladies de l'épiderme, parce que je crois qu'on lui attribüe mal-à-propos celles du corps muqueux.

Quand, par exemple, on voit l'épiderme se détacher presque entiérement, & tomber par grandes piéces, il m'a toûjours paru que c'étoit le corps muqueux, qui étant attaqué, laissoit l'épiderme sans soûtien; & si quelquefois après cette maladie il ne reste point de cicatrice sur la Poire, c'est que quand le corps muqueux n'est pas détruit dans toute son épaisseur, mais seulement dans sa partie externe, ou qui est contigüe à l'épiderme, il peut alors se réparer sans cicatrice.

DU CORPS MUQUEUX.

Quand par les macérations on est parvenu à enlever l'épiderme seul, on apperçoit une membrane fort mince, déliée & très-délicate, qui demeure attachée au tissu pierreux qu'elle couvre immédiatement & dans toute l'étendüe de la Poire. Pl. I. Fig. 5.

En la touchant, on remarque une certaine douceur ou une viscosité qui nous la fait appeller le *corps muqueux*, nom qui convient encore par la place qu'elle occupe entre l'épiderme & la peau.

Cette membrane reste communément adhérente, tantôt à l'épiderme, & tantôt au tissu pierreux, ce qui prouve bien son éxistence & son caractere de membrane; mais pour observer sa tissure, il falloit la voir seule & détachée de toute autre partie. Elle est si délicate, que je n'ai pû en avoir que de petits morceaux : ainsi séparés, je les ai éxaminés avec un Microscope à liqueur, qui me les a fait appercevoir très-transparents, & percés comme l'épiderme de quantité de pores, quoique moins apparents.

Le corps muqueux de beaucoup de Poires est vert, cela

ne fait pas de difficulté. Il n'en est pas de même aux endroits exposés au Soleil, comme je l'ai fait sentir en parlant de l'épiderme, & il n'est pas aisé de décider à laquelle de ces deux membranes appartient cette couleur rouge. Voici quelques observations qui tendent à éclaircir la question.

Ayant essayé plusieurs fois, & sur différents fruits, d'emporter avec un Scalpel très-fin l'épiderme d'une petite partie de Poire que j'avois exposé à une Loupe de trois à quatre lignes de foyer : J'ai remarqué,

Que quelquefois je n'ai pû enlever l'épiderme, sans être teint de rouge, & d'autres fois je l'ai détaché clair & transparent, sans être teint en aucune maniére; lorsque j'ai gratté pour enlever le corps muqueux, tantôt la couleur rouge s'est conservée jusques sur les pierres, & tantôt je l'ai apperçûë superficielle, de sorte que la partie interne du corps muqueux étoit encore verte.

Ces observations me font croire que la couleur rouge réside dans le corps muqueux, mais qu'elle l'affecte diversement, de sorte que tantôt elle ne paroît que sur la surface externe ou voisine de l'épiderme, & tantôt toute la surface en est teinte.

Si quelquefois je n'ai pû détacher l'épiderme, sans être coloré, sa grande délicatesse ou son adhérence au corps muqueux pouvoient bien en être la cause.

Quoique je n'aye rien de bien certain sur la nature de cette membrane, je crois cependant qu'elle est formée d'un lassis de vaisseaux infiniment fins, baignés d'une liqueur mucilagineuse qui lui donne sa douceur.

Pour ce qui est de ces usages, la maniére avec laquelle elle embrasse les pierres du tissu pierreux, m'a fait conjecturer qu'elle sert à les assujettir & les tenir dans une même situation; il arrive peut-être encore qu'elle sert à la régénération de l'épiderme, mais il est bon de remarquer que la surface chagrinée que nous avons observée sur beaucoup de Poires, leur vient de cette sorte d'adhésion du corps muqueux au tissu pierreux.

J'ai dit que beaucoup d'Animaux s'accommoderoient fort

de cette membrane pour leur nourriture, si l'épiderme ne la mettoit à couvert. Cette défense n'empêche pas qu'une espece de Mites très-petites, que je n'ai observées que confusément, ne mangent le corps muqueux sous l'épiderme, qu'elles laissent en son entier : il y a encore quelquefois une troupe de ces Chenilles, qu'on appelle des *Livrées*, qui après avoir détruit l'épiderme, mangent entiérement le corps muqueux, ce qui produit ces petites gales fines qu'on remarque si souvent sur les Poires ; car lorsque le corps muqueux est détruit en entier, il ne se régénére plus, mais il se forme à la place une espece de gale gommeuse.

Le corps muqueux est encore sujet à bien des accidents, qui presque tous altérent sa couleur.

Les meurtrissures, comme les coups de grêles, le desséchent, & font des taches noires sur les Poires.

Les humidités, quand elles sont longues & froides, interrompant la transpiration, occasionnent sa corruption, qu'on reconnoît à la couleur grise & livide qu'elle prend alors. J'observerai à cette occasion, que quelques Auteurs recommandent, pour faire grossir les fruits, de les mettre, lorsqu'ils sont encore petits, tremper dans l'eau jusqu'à ce qu'ils ayent acquis leur maturité. J'ai fait cette expérience, & mes fruits ont été d'abord attaqués de la maladie dont je viens de parler, se sont ensuite fendus, & enfin se sont détachés de l'arbre presque pourris & avant leur maturité.

La trop grande ardeur du Soleil quelquefois le desséche petit à petit, mais assés souvent produit cette maladie, qu'on appelle les *coups de Soleil*, qui n'est autre chose que la rupture des vaisseaux & des sacs aëriens, occasionnée par la trop grande raréfaction de l'air & des liqueurs, comme on peut s'en assûrer en approchant un fer chaud d'une Poire encore verte, car alors on entend une espece de décrépitation & un craquement considérable qui change sur le champ la couleur du corps muqueux.

DES PIERRES.

Pl. I. Fig. 6. Les deux enveloppes dont je viens de parler, étant levées; on découvre une quantité de corps solides, qui sont tellement arrangés sur toute la superficie de la Poire, qu'ils lui en forment une troisiéme que nous nommerons l'*enveloppe pierreuse*, parce qu'on a coûtume d'appeller des pierres, les petits corps dont il s'agit *.

Je mets ce tissu pierreux au nombre des enveloppes, quoique dans la Poire il se trouve des pierres ailleurs que sous son corps muqueux, mais cet ordre n'est point opposé à celui que les Anatomistes observent à l'égard des Animaux, puisque le corps graisseux, qui est mis au nombre de leurs téguments, se trouve encore répandu dans toutes les parties de leur corps.

Les pierres de la superficie, & celles qui se rencontrent dans les différentes parties de la Poire, m'ont paru, tant par leur solidité que par les organes qui les accompagnent, d'une nature assés semblable pour n'être point séparées; ainsi j'ai crû qu'il seroit plus à propos, même plus conforme à l'usage des Anatomistes, d'éxaminer dans un seul & même article les pierres qui sont arrangées sous le corps muqueux, & celles qui sont répanduës dans la substance de la Poire, quoique je me fusse proposé, dans cette premiére Partie, de n'éxaminer que ce qui concerne les téguments.

Les pierres sont donc répanduës dans toute la substance de la Poire, mais elles n'y sont pas jettées tout-à-fait au hazard.

Pl. II. Fig. 1. Elles sont amoncelées auprès de l'ombilic, & y forment une espece de roche.

Pl. I. Fig. 6. Pl. II. Fig. 1. Sous le corps muqueux, elles sont arrangées assés réguliérement à côté les unes des autres, ce qui m'a fait nommer cet assemblage, le *tissu* ou l'*enveloppe pierreuse*.

Le long de l'axe du fruit, excepté dans le centre, elles forment par leur disposition une espece de canal; ce canal est divisé en deux parties par les pépins. Dans l'éxamen que je

* M. Ruich a parlé des pierres, & les a nommés *corps aciniformes*, M.rs Grew & Malpighi en ont aussi parlé.

ferai de ces deux parties, j'appellerai la supérieure, ou celle qui est proche de l'ombilic, le *canal pierreux*, & l'inférieure, ou celle qui est proche de la queüe, la *gaine pierreuse*; car pour reconnoître ces parties, il faut leur donner des noms. PL. II. Fig. 1.

Il n'y a point d'endroit dans le fruit où les pierres soient plus grosses qu'aux environs des pépins, elles y sont plus écartées les unes des autres que par-tout ailleurs, & les espaces qui sont entr'elles sont remplis par une substance fine & ordinairement bien différente, à la vûë & au goût, de la substance propre de la Poire, mais elle est assés semblable à celle qui unit les grains du tissu pierreux; c'est cette espece d'enveloppe des pépins que j'ai appellé la *substance pierreuse*. Fig. 1. 2. & 3.

Depuis cette substance jusqu'au tissu pierreux, il se trouve répandu dans la substance propre de la Poire un nombre de petites pierres très-écartées les unes des autres, & qui, à cause de cela, ne se remarquent pas aisément : j'ai observé qu'elles vont toûjours diminüant en nombre & en grosseur depuis le centre jusqu'à la circonférence. Fig. 1. & 2.

Enfin, il y en a encore une grande quantité de très-fines qui sont répanduës par toute la Poire entre les pierres dont j'ai parlé, on ne peut cependant les y découvrir qu'à l'aide d'une Loupe, & après de longues macérations.

Mais une chose singuliére, c'est que toutes ces pierres qui sont, comme nous venons de le voir, situées si différemment dans nôtre fruit, ont cependant une grande connexité les unes avec les autres, & forment toutes ensemble une continuité que nous allons suivre dans toute son étendüe.

D'abord elles sont situées tout le long de la queuë entre les téguments & un faisceau de vaisseaux qui en occupent le centre. Fig. 1.

A l'insertion de la queuë au corps de la Poire, elles se divisent en deux portions, dont une qui est le tissu pierreux, s'épanoüit sur la surface de la Poire, & l'autre qui est la gaine pierreuse, se prolonge encore selon son axe, enveloppant, comme dans une espece de gaine, un gros faisceau de vaisseaux que tout le monde connoît en cet endroit. Fig. 1.

Un peu au-dessous de la base des pépins, cette gaine

PL. II. Fig. 1. 2. & 3. s'épanoüit, & c'est en cet endroit que commence la substance pierreuse que je regarde comme le foyer de toutes les pierres qui sont répanduës dans la substance propre du fruit, de sorte que je crois que par les pierres intermédiaires, il y a une espece de communication entre cette substance pierreuse & le tissu pierreux : quoiqu'il en soit, elle forme autour des pépins une enveloppe sensible, épaisse, & de figure à peu-près ovoïde, qui par son retrécissement devient ce que nous avons appellé le *canal pierreux*, qui s'étend jusqu'à l'ombilic ; la longueur de ce canal varie beaucoup, suivant les différentes especes de Poires. Dans les Bergamottes & les autres Poires qui ont la tête renfoncée, il est fort court, au lieu que dans le Bon-chrêtien & beaucoup d'autres especes il est assés long : les Pierres dans cet endroit sont ordinairement grosses, très-serrées les unes contre les autres, de sorte que souvent elles s'unissent plusieurs ensemble, quelquefois même j'ai trouvé le canal tout d'une piéce. (Fig. 1. — Fig. 8.)

Fig. 1. 4. & 5. J'ai dit que le canal pierreux se terminoit à l'ombilic, c'est aussi en cet endroit que vient finir le tissu pierreux, & la réünion de l'un & de l'autre y forme ce que nous avons appellé *la roche*.

Fig. 4. & 5. Cette roche a la figure d'un cone renversé, de maniére que la base répond à l'ombilic, & la pointe qui, à la vérité est tronquée, regarde les pépins. Elle ne paroît d'abord composée que d'un amas de pierres soudées fort irréguliérement ensemble, cependant elle se divise fort aisément, & d'une maniére très-distincte en deux parties, une extérieure, & l'autre intérieure; celle-ci, qui en est comme le noyau, a aussi la figure d'un cone tronqué, & c'est la continuation du canal pierreux, qui en s'épanoüissant par son extrémité en maniére de trompe, forme à l'endroit de l'ombilic la base du cone. (Fig. 4. — Fig. 9.)

Pour ce qui est de la partie extérieure de la roche, c'est un prolongement du tissu pierreux qui fournit une espece d'enveloppe au noyau dont je viens de parler, de maniére cependant qu'elle est beaucoup plus épaisse du côté de l'ombilic que de l'autre, ce qui augmente la largeur de la base du cone.

Enfin,

Enfin, je crois que par ce prolongement le tiſſu pierreux communique encore avec la ſubſtance pierreuſe.

L'on connoît par cet éxamen général, que les pierres affectoient de certaines poſitions conſtantes, quoique différentes preſque dans chaque partie de la Poire. Ces poſitions ne ſont certainement pas inutiles, mais avant de former aucune conjecture ſur leur uſage, il faut bien connoître la nature de ces pierres; pour cela, j'ai commencé par les conſidérer ſeules & détachées de toutes les parties qui les environnent, & enſuite je les ai examinées jointes avec les parties qui s'uniſſent à elles.

Suivant mes obſervations, il ſeroit inutile de chercher des pierres dans les fruits nouvellement noüés; cette partie du fruit qui doit s'endurcir, ne m'a paru dans ce temps qu'une maſſe blanche, compacte, à la vérité, mais toute tendre & toute pleine d'eau. Dans la ſuite cette ſubſtance paroît ſe diviſer par grains blancs qui n'ont encore guéres de ſolidité, & qui ſont preſque toute la ſubſtance intérieure du fruit. Enfin ces grains groſſiſſent & durciſſent peu à peu, de ſorte que les fruits étant encore fort petits, ſont tous remplis de pierres: ces pierres ne ſont cependant pas ſi dures que dans les fruits parvenus à leur maturité, & elles conſervent une legére tranſparence, qui donne lieu d'appercevoir quelques vaiſſeaux qui vont s'inſérer & ſe ramifier dans leur ſubſtance. A meſure que les Poires approchent de leur maturité, les pierres diſparoiſſent en quelque maniére, & il ſemble que la meilleure partie s'en détruiſe; nous verrons cependant par la ſuite de ce Mémoire, qu'elles ne diminuënt ni en nombre ni en groſſeur, bien-loin de cela elles deviennent plus dures & plus opaques, ſur-tout celles du tiſſu pierreux.

PL. II. Fig. 7.

C'eſt dans cet état que ces pierres éxaminées au Microſcope, ne m'ont jamais paru formées par couches, ou par l'union de pluſieurs lames pierreuſes, mais ſeulement par l'aſſemblage de pluſieurs grains, ou ſi l'on veut, par l'union de pluſieurs pierres beaucoup plus petites, qui communiquent les unes avec les autres par des vaiſſeaux.

PL. II. Fig. 11. J'ai outre cela quelque fois apperçû dans ces grosses pierres, qui forment la gaine pierreuse, une espece de lassis de la même substance que la pierre, qui imite assés bien les cellules de la moëlle des os, & qui est formé par des vaisseaux endurcis.

Il est encore bon d'observer que ces pierres brûlent au feu, & exhalent une odeur pénétrante assés semblable à celle du pain brûlé.

Enfin il y en a beaucoup qui par une forte ébullition se dissolvent entiérement dans l'eau commune, ou encore plus aisément dans les liqueurs spiritueuses.

Pour examiner les pierres nües & détachées des parties qui les environnent, j'ai eu besoin d'une bonne Loupe & d'un Microscope à trois verres; mais pour les observer avec toutes leurs dépendances, il m'a fallu d'autres secours, car étant ordinairement accompagnées de vaisseaux d'une finesse extrême, ces vaisseaux s'affaissent les uns sur les autres, si-tôt qu'on les tire de l'eau, & ne forment alors qu'un peloton auquel on ne peut rien connoître, ce qui m'obligeà de chercher un moyen commode pour les examiner flotant dans l'eau : rien ne m'a mieux réüssi que de border une glace avec de la cire, & de mettre la piéce que je voulois observer nageant dans l'eau avec laquelle j'avois rempli ce petit bassin. Il est bon de remarquer en passant que les liqueurs flegmatiques, pourvû qu'elles soient bien claires, sont préférables aux spiritueuses, parce que ces derniéres s'évaporant aisément, sur-tout lorsqu'elles sont exposées au Soleil, forment par une partie de ces exhalaisons qui se condensent sur la lentille du Microscope, une espece de broüillard qui nuit beaucoup à l'observateur.

Ayant donc examiné de la maniére dont je viens de parler, quelques pierres garnies de la matiére qui les environnoit, & que j'avois tirées des fruits qui avoient maceré fort longtemps, j'apperçus un nombre prodigieux de fibres que je
Fig. 6. crois être des vaisseaux très-fins, qui étoient disposées en maniére de rayons autour de chaque pierre, avec quelqu'autres

vaisseaux beaucoup plus gros, qui quelquefois venoient se terminer & se perdre, pour ainsi dire, à une pierre; d'autrefois ils en sortoient, ou sans s'y être divisés, & presque aussi gros qu'ils y étoient entrés, ou après s'y être divisés en trois ou quatre branches.

J'ai remarqué que pour faire ces observations, il falloit prendre des fruits qui eussent atteint leur grosseur, car on ne pourroit pas découvrir cet épanoüissement de vaisseaux dans les jeunes fruits; ces vaisseaux ne se développent pas tout d'un coup, il est même un temps où on ne peut presque les y appercevoir.

Immédiatement après que les Poires sont noüées, je n'ai pû découvrir dans leur intérieur, comme je l'ai remarqué, qu'une substance blancheâtre & uniforme où les principes des pierres & des vaisseaux sont confondus.

Quelque temps après, lorsque les pierres commencent à se diviser par grains, ces petits vaisseaux ne sont guéres apparents.

Enfin on commence à les appercevoir lorsque les pierres prennent une certaine solidité, mais c'est encore bien confusément, ils sont courts, gros, & assés solides, de la même couleur que les pierres, ce qui fait qu'on a bien de la peine à les distinguer d'avec elles; mais peu à peu, & à mesure que la Poire approche de sa maturité, ces vaisseaux s'emplissent de liqueur, s'éminciissent, s'allongent, s'attendrissent & blanchissent, pendant que les pierres durcissent, deviennent opaques, & rougissent un peu, ce qui fait qu'on peut alors distinguer beaucoup plus aisément ces deux parties. C'est dans ce temps que par le secours des macérations, on découvre la route, la multitude & la disposition des vaisseaux, tels que nous venons de les décrire.

On voit encore assés distinctement ce même arrangement dans un petit morceau de Poire coupé très-mince, en l'examinant avec un Microscope à trois verres. PL. II. Fig. 12.

Il ne faut pas croire que ce que je viens de dire de ces pierres se rencontre seulement dans les Poires qu'on appelle

communément *pierreuses*, je les ai trouvées dans la Magdelaine d'Eté, la Virgouleuse & l'Ambrette, qui sont des fruits fondants, aussi-bien que dans le Bon-chrêtien & le Saint-Martial, qui en sont de cassants, cependant elles sont plus grosses & plus sensibles dans les derniéres que dans les premiéres.

On souhaitera peut-être sçavoir comment se forment certaines grosses pierres qui se trouvent par accident dans quelques Poires; mais comme je crois qu'à cela près qu'elles prennent plus de nourriture, elles croissent de la même maniére que les autres pierres, je me réserve à en parler, lorsque je donnerai mes conjectures, qui s'étendront sur les unes & les autres en même temps.

Ainsi, pour le présent, je me contenterai de remarquer qu'il ne manque presque jamais de s'y aboucher un, deux, ou trois gros vaisseaux, quand même ces pierres se trouveroient dans le tissu pierreux, lieu où les vaisseaux sont ordinairement très-fins.

A cette occasion on peut encore observer que quand les pierres se trouvent dans le tissu pierreux, il n'y a ordinairement en cet endroit ni épiderme, ni corps muqueux, mais seulement une espece de gale qui est fortement attachée aux pierres, ce qui n'est pas surprenant; car ces grosses pierres, qui sont de la nature des exostoses, ou de quelque autre concrétion osseuse, sont occasionnées ordinairement par un coup de grêle, la picqueure d'un insecte, ou quelques autres causes extérieures qui détruisent l'épiderme & le corps muqueux: or, comme nous l'avons remarqué en parlant de ces membranes, elles ne se régénérent point, quand le corps muqueux a été détruit jusques sur le tissu pierreux.

Depuis que nous parlons de ces petits corps durs qui sont répandus en si prodigieuse quantité dans les Poires, je leur ai toûjours donné le nom de *pierres*, mais ce n'est que pour me conformer au langage ordinaire, je n'ai garde de les confondre avec les pierres minérales ou fossiles, ni même avec les pierres qu'on trouve dans les reins & la vessie des

Animaux; elles se forment bien différemment.

Les pierres minérales ne sont point des corps organisés qui reçoivent leur nourriture par l'entremise des vaisseaux.

Un suc pétrifiant peut être de la nature du cristal ou de la sélénite, pénetre de la terre, du bois, des coquillages, & ces corps deviennent ainsi des pierres.

Ce n'est point non plus une cause intérieure qui les fait grossir, la chose est bien plus simple, ce sont des incrustations de la même matiére à peu-près que celles du noyau de la pierre, & qui s'endurcissent de la même maniére, ainsi le volume de la pierre augmente à mesure qu'il s'en forme de nouvelles.

Pour peu qu'on fasse attention à nos observations, on reconnoîtra que les pierres de nos Végétaux (car je conserve le terme en faveur de l'usage) ne grossissent point par des incrustations, mais par les sucs que leur charrient le nombre prodigieux de vaisseaux qui viennent y aboutir. Pourquoi en effet tant & de si gros vaisseaux qui aboutissent principalement à ces pierres monstrueuses, qui les pénétrent, & en sortent divisés en trois ou quatre ramifications, s'ils ne servoient en rien à leur accroissement?

Pourquoi ce nombre prodigieux de petits vaisseaux qui forment des rayons autour de ces pierres, sinon pour charrier la liqueur de quelques sécrétions?

Enfin si ces pierres étoient formées par incrustations, pourquoi n'apperceverions-nous pas ces lames qui en sont le caractere?

Pour établir encore plus la différence entre nos pierres & les minérales, nous pourrions dire que celles-ci brûlent au feu, & se dissolvent pour la plûpart par l'ébullition, ce qui n'arrive pas ordinairement aux pierres minérales.

Il paroît donc probable que les pierres de nos Poires sont des corps organisés.

Il reste encore deux questions aussi curieuses & aussi embarrassantes l'une que l'autre : comment ces pierres ont-elles été formées, & pourquoi l'ont-elles été?

Nous avons remarqué que les Poires, immédiatement après être noüées, n'avoient point de pierres, que peu de temps après elles en étoient toutes remplies, & qu'enfin, lorſqu'elles étoient groſſes & approchantes de leur maturité, ces pierres diſparoiſſoient preſque entiérement. Ces circonſtances rendent la premiére queſtion embarraſſante; car enfin d'où viennent-elles, quand elles commencent à paroître? & que deviennent-elles, quand on ne les apperçoit plus? D'un autre côté les uſages deviennent ainſi compliqués pluſieurs enſemble; car eſt-il probable qu'un corps qui change ſi viſiblement de conſiſtance & de nature, produiſe conſtamment les mêmes effets.

Pour eſſayer de ſatisfaire à l'une & à l'autre queſtion, je commence à examiner les pierres dès leur origine, dans le temps qu'elles n'ont pas encore cette ſolidité qui les rend ſi ſenſibles & ſi aiſées à découvrir, lorſqu'on ne les diſtingue encore que parce qu'elles ſont d'une ſubſtance plus ſerrée que le reſte de la Poire, en un mot telles qu'elles paroiſſoient dans les fruits nouvellement noüés. Que ſont-elles alors? pour moi je les regarde comme des pelotons de vaiſſeaux ou des glandes; leur figure & leur tiſſu ſemblent en être des caracteres bien marqués, auſſi-bien que leur ſituation par rapport aux autres vaiſſeaux: mais de plus les différentes liqueurs qui doivent ſervir à la formation de l'amande n'en ſuppoſent-elles pas, puiſque la préparation des liqueurs eſt du reſſort des glandes? J'ajoûterai encore, ſi l'on peut ſe ſervir de comparaiſon, que la matrice des Animaux en eſt toute tapiſſée intérieurement.

Ces petits grains, dans le temps qu'ils ſont mols, ſont donc des glandes qui doivent préparer quelques liqueurs dans leſquelles par conſéquent les ſucs du Poirier doivent circuler.

Or ces ſucs ſont viſqueux & très-tartareux, & les vaiſſeaux dans leſquels ils doivent circuler, ſont d'une fineſſe extrême & fort repliés, ce qui me fait ſoupçonner qu'un ſédiment analogue au Tartre, s'attache peu-à-peu aux parois intérieurs de ces petits vaiſſeaux, en diminüe le diametre, & commence

à leur donner cette solidité que nous remarquons dans les jeunes fruits. Pour lors les liqueurs, qui ne peuvent passer en si grande abondance, refluënt en quelque maniére sur elles-mêmes, dilatent les vaisseaux, & se forment de nouvelles routes par des vaisseaux latéraux qu'elles dilatent aussi, leur donne plus de volume en longueur & en diametre, ce qui les rend plus aisés à appercevoir, & augmente considérablement la grosseur du fruit.

J'ai dit encore que lorsque les Poires approchoient de leur maturité, les pierres devenoient presque insensibles, quoiqu'elles fussent en aussi grand nombre, aussi grosses & plus dures : la cause en est la même.

L'obstruction * produit le reflux des liqueurs dans les vaisseaux, le reflux augmente le volume des vaisseaux : par l'augmentation du volume des vaisseaux, les pierres se trouvent plus écartées les unes des autres, ce qui fait qu'elles sont moins sensibles, quoique par le progrès de cette obstruction elles se soient considérablement endurcies.

Toutes les pierres n'acquiérent cependant pas la même dureté, car on en trouve qui sont très-dures, d'autres qui ne le sont que médiocrement, pendant que quelques-unes sont tout-à-fait molles, comme dans les fruits nouvellement noüés. C'est de ce plus ou moins de pierres endurcies que vient la différence des Poires pierreuses d'avec celles qui ne le sont pas, & le plus ou moins de pierres endurcies dépend peut-être du plus ou moins de Tartre qui est charrié avec les liqueurs, comme le prouvent les observations suivantes.

Premiérement, les pierres considérablement endurcies sont en plus grand nombre dans les Poires cassantes que dans les fondantes, parce que le Tartre y est dissous dans moins de fluide, & par conséquent s'arrête plus aisément dans les petits vaisseaux qui formoient les glandes.

* Il ne faut pas prendre le terme d'*obstruction*, comme on le prend ordinairement, pour exprimer un effet contre nature, ou, ce qui est la même chose, une maladie, car je ne lui fais signifier autre chose que la diminution du diametre des vaisseaux, telle qu'elle arrive dans les os, lorsqu'ils s'endurcissent.

2.° C'eſt pour cette même raiſon que les fruits dans les terrains ſecs ſont plus pierreux que dans d'autres.

3.° Les coups de grêle peuvent occaſionner en quelques endroits une groſſe pierre, parce que l'obſtruction étant une fois commencée, le Tartre s'y arrête plus aiſément.

4.° Les Poires d'Eté ſont moins ſujettes à avoir des pierres que celles d'Automne, parce que les liqueurs circulant avec plus de rapidité, le Tartre ne s'y dépoſe pas ſi aiſément.

J'ai conſidéré les pierres dans deux états; ſçavoir, lorſqu'elles ſont encore molles, & j'ai commencé à prouver qu'elles faiſoient alors la fonction de glandes.

Le ſecond état où je les ai conſidérées, c'eſt lorſqu'elles commencent à s'obſtruer, & j'ai dit qu'alors elles occaſionnoient un reflux qui ſervoit beaucoup à augmenter le volume des fruits. Lorſque je parlerai des vaiſſeaux, j'aurai occaſion de juſtifier les uſages que j'ai attribué à nos pierres dans l'un & l'autre état, mais on peut encore les conſidérer dans un troiſiéme, c'eſt-à-dire, lorſqu'elles ſont tout-à-fait obſtruées, car je crois qu'elles ne ſont pas alors tout-à-fait inutiles dans la Poire, & après avoir fait dans le jeune fruit l'office de glande, elles peuvent faire enſuite celui d'os, & ſervir de points d'appui aux fibres, qui ſans cela n'auroient point eu de ſoûtien à cauſe de leur longueur.

Par exemple, les fruits qui n'ont point ces ſortes de points d'appui, comme les Pêches, les Abricots & les Pommes, n'ont pas la ſolidité des Poires.

Dans les Poires même, celles qui n'ont qu'une petite quantité de pierres qui s'endurciſſent, comme les Poires fondantes, n'ont pas la ſolidité des autres, qu'on appelle à cauſe de cela les *Poires caſſantes.*

Encore une choſe qu'il eſt bon d'obſerver, c'eſt que dans le temps que l'arbre eſt le plus occupé à la formation du pépin, c'eſt-à-dire, lorſque le fruit noüe, & un peu après, les glandes ſont molles, & rempliſſent preſque tout le fruit, elles ne s'obſtrüent & ne durciſſent que peu-à-peu, de ſorte qu'elles n'ont

n'ont acquis leur parfaite ſolidité que lorſque le pépin eſt preſque parvenu à ſa groſſeur, & c'eſt alors que le fruit prend la ſienne.

Je ne prétends pas dire qu'il ne circule plus de liqueur dans les pierres, lorſqu'elles ont une fois acquis une certaine ſolidité; il faut bien que les liqueurs circulent dans les os, qui ſont infiniment plus durs, puiſqu'ils croiſſent dans les jeunes gens, & ſe régénerent à tout âge à l'occaſion des fractures.

Nous nous ſervirons de cette circulation pour expliquer la formation de ces pierres monſtrueuſes, qui comme des eſpeces d'anquiloſes, ſont produites par une trop grande affluence de ce ſuc tartareux auquel nous attribuons la formation des pierres.

Il eſt naturel que les glandes que nous avons fait remarquer dans les différentes parties de la Poire, operent des ſécrétions particuliéres ſuivant les places qu'elles occupent dans le fruit; par exemple, celles du tiſſu pierreux, la liqueur de la tranſpiration, celles de la ſubſtance pierreuſe, les liqueurs qui ſervent à la formation du pépin: mais nous avons crû plus à propos de remettre à en parler, lorſque nous éxaminerons les parties auxquelles elles ſont jointes le plus immédiatement.

DES ECHANCRURES DU CALICE.

Le calice de la fleur du Poirier a dans la circonférence de ſon bord, cinq échancrures ou découpures, qui ſubſiſtent ordinairement autant que le fruit; elles forment à l'extrémité de ſon axe, oppoſée à celle qui s'unit avec la queüe, une eſpece de couronne à l'antique, qui entoure & borde en quelque maniére la partie du fruit que nous avons appellée l'*ombilic*.

Par l'éxamen particulier que j'ai fait de ces eſpeces d'appendices, j'ai reconnu qu'elles ſont formées des trois téguments, dont l'anatomie a fait le ſujet du commencement de ce Mémoire, & c'eſt leur dépendance des enveloppes de nôtre fruit, qui m'a fait juger qu'il ſeroit à propos d'en faire la Pl. I. Fig. 1.

description dans la partie même de mon Mémoire, où je me suis proposé d'examiner les téguments.

Pl. II. Fig. 9. J'ai fait remarquer, en parlant des pierres, que la partie intérieure de la roche étoit formée par l'allongement du canal pierreux, qui s'épanoüit par son extrémité en maniére de trompe, c'est des bords de cet évasement que partent les especes d'apophyses ou allongements pierreux, qui étant recouverts par une duplicature de l'épiderme & du corps muqueux, forment les appendices de l'ombilic, ou, ce qui est la même chose, les échancrures du calice.

Si les pierres font l'office de glandes avant qu'elles soient endurcies, la grande quantité qu'on en trouve à l'ombilic de la Poire mûre, nous indique qu'il y avoit beaucoup de glandes en cet endroit, lorsque le fruit étoit encore fort jeune. En sera-t-on surpris, si l'on fait attention que dans le temps de la fleur, c'est en cet endroit que toutes les étamines & les pétalles prenoient leur naissance, mais lorsqu'après le desséchement des étamines & des pétalles, ces glandes s'endurcissent, devenuës alors des corps solides ou des especes, d'où elles communiquent leur solidité aux appendices du calice, assés souvent même cet endurcissement est si grand que le suc nourricier ne pouvant passer au corps muqueux, cette membrane devient comme caleuse, & s'attache si fortement aux pierres & à l'épiderme, que ces trois téguments ne font qu'un corps qui devient coriace à peu-près comme des ongles.

J'ai encore remarqué que quelques-uns des pédicules des étamines s'endurcissent quelquefois, & pour lors ils sont beaucoup plus gros que dans le temps de la fleur, & restent attachés aux parois de l'ombilic jusqu'à l'entiére destruction du fruit.

DU TISSU FIBREUX DE LA PEAU.

Sous le tissu pierreux, on apperçoit une substance plus ferme que le reste de la Poire, & dans laquelle les pierres sont enchassées à peu-près de la même maniére que quelques Anatomistes ont prétendu que le sont sur le cuir, les glandes milliéres des Animaux.

Pour découvrir la structure de cette substance, il faut après avoir levé l'épiderme, le corps muqueux & le tissu pierreux d'une Poire macerée, séringuer de l'eau sur sa superficie, mais il faut que cette Poire nage dans l'eau, & en soit même couverte de deux à trois lignes, afin que les vaisseaux qu'on veut appercevoir ne s'affaissent pas les uns sur les autres, & que ceux qu'on détruit se détachent & se dégagent plus aisément d'entre les gros.

De cette maniére je l'ai reconnuë formée d'un lassis d'assés gros vaisseaux qui s'anastomosent fort souvent les uns avec les autres, & qui pour cette raison ne peuvent être détachés ni épanoüis comme ceux du reste de la Poire, ce qui fait qu'on est obligé de détruire toute cette substance, lorsqu'on veut éxaminer les vaisseaux. Pl. I. Fig. 8.

Par cet éxamen, on reconnoît donc dans cette substance une structure assés particuliére, pour être distinguée du reste de la Poire : j'ai crû ne pouvoir mieux la comparer qu'au cuir des Animaux, ou, ce qui est la même chose, à la peau proprement dite, ou encore au tissu fibreux de la peau, parce que cette enveloppe dans les Animaux, comme dans nôtre fruit, est un lassis & un entrelassement très-serré de vaisseaux.

Il y a cependant cette différence, que la pierre n'ayant pas, à beaucoup près, tant d'especes de vaisseaux que les Animaux, son tissu fibreux & son cuir ne peuvent être ni si forts, ni si distincts.

J'aurois encore plusieurs choses à faire remarquer sur la structure de ce tégument, mais c'est un détail dans lequel on ne peut bien entrer, sans avoir donné une idée des vaisseaux; c'est pourquoi il suffit pour le present d'avoir caractérisé cette quatriéme & derniére enveloppe que j'ai appellée le *tissu fibreux de la peau* de la Poire.

Il est bon, avant de terminer cette premiére Partie, d'observer encore que les quatre téguments dont nous avons donné la description, composent la peau de la Poire de telle sorte, que par la partie, que nous avons appellée l'*épiderme*,

elle met le fruit à couvert de plusieurs accidents auxquels sans cela il seroit exposé.

Par son corps muqueux & son tissu pierreux ou glanduleux elle opere la transpiration, qui est une des principales opérations de la peau.

Enfin par cet entrelassement de vaisseaux que nous avons appellé son *tissu fibreux,* elle peut retenir le fruit dans les bornes de sa crûë, & c'est peut-être lorsque ce tissu est attaqué de quelques maladies d'un côté, qu'en ne prenant sa nourriture que du côté opposé il devient contrefait.

REMARQUE.

M.rs Malpighi, Grew, Leuvenock & Ruich, ces illustres Observateurs, ont travaillé sur l'anatomie de la Poire, & leurs recherches m'ont été d'une grande utilité.

Je voudrois qu'il me fût possible de rendre justice à leurs découvertes dans le corps de mon Mémoire; mais comment (dans un Mémoire qui ne peut avoir qu'une certaine étendüe, pour être inséré dans ceux de l'Académie) entreprendre de faire, pour ainsi dire, la concorde de ces quatre grands observateurs, ou même la critique des uns par les observations des autres? La chose m'a paru impossible, c'est pourquoi je me suis contenté de les citer dans les principaux endroits, en mettant par renvoi au bas des pages le nom de celui de ces Auteurs qui m'a paru avoir le mieux observé la partie dont il s'agira dans chaque article, sans cependant prétendre indiquer par-là qu'il y ait une conformité parfaite entre ce qu'a observé l'Auteur cité, & ce que je rapporte dans mon Mémoire; il pourroit bien cependant m'échapper quelques endroits remarquables des Observations de M. Grew, parce que comme son Ouvrage est écrit en Anglois, je n'ai pû avoir qu'une legére idée de ce qui est contenu dans son Livre *in-folio.*

EXPLICATION DES FIGURES.

PREMIÉRE PLANCHE.

Figure 1re. La Poire en entier, où l'on peut remarquer,

a, ſa queüe, ou ſon pédicule.

b, ſon corps.

c, ſa tête, ou ſon nombril, ou ſon œil.

Fig. 2. Un petit morceau de Poire où l'on voit

a, des petites élevures d'épiderme groſſies au Microſcope.

Fig. 3. Un petit morceau de la pelure d'une Poire, pour faire voir les inégalités qu'on apperçoit ſur la ſuperficie de la plûpart des Poires, quand on les éxamine avec la Loupe.

Fig. 4. Un morceau d'épiderme vû au Microſcope, où l'on apperçoit de deux eſpeces de trous pour laiſſer paſſer la tranſpiration ; les uns plus grands, qui ſont comme un réſeau, & les autres plus fins, qui ſont comme un fond de ſable.

Fig. 5. Le corps muqueux vû au Microſcope, où l'on apperçoit,

a, les mêmes trous qu'à l'épiderme, mais moins apparents.

b, quelques glandes du tiſſu pierreux.

Fig. 6. Le tiſſu pierreux ou glanduleux qui eſt ſous le corps muqueux.

Fig. 7. Le même tiſſu pierreux vû au Microſcope, où l'on peut remarquer de gros vaiſſeaux qui vont répondre à quelques-unes de ces pierres, ou qui paſſent des unes aux autres.

Fig. 8. Une Poire dépoüillée de toutes les membranes dont je viens de parler, & ſur laquelle on peut remarquer,

a, les grôs vaiſſeaux qui vont rendre au tiſſu pierreux.

b, l'entrelaſſement des vaiſſeaux que j'ai appellé le *tiſſu fibreux de la peau.*

c, un tuyau ou une ſéringue qui eſt néceſſaire pour découvrir cet entrelaſſement.

SECONDE PLANCHE.

Figure 1re. Une Poire coupée suivant sa longueur, où l'on peut remarquer,

a, les téguments dont je viens de parler.
b, la roche.
c, les pistils desséchés.
d, le canal pierreux.
e, la gaîne pierreuse.
f, la substance pierreuse.
g, les loges des pépins.
h, un pépin dans sa loge.
i, l'insertion de la queüe au corps de la Poire.
l, le pédicule de la Poire.
m, une cavité qui est entre les loges des pépins.

Fig. 2. Une Poire coupée de travers dans laquelle on voit,

a, les téguments.
b, la substance pierreuse.
c, la coupe de plusieurs gros vaisseaux, qui sont assés souvent au nombre de dix, & quelquefois on n'en apperçoit que cinq, mais dans l'un & l'autre cas ils vont se rendre à la roche.
d, les loges des pépins où il y en a deux dans chaque loge.
e, la cavité qui est entre les loges des pépins, & qui est fort grande dans quelques especes, & très-petite dans d'autres.
f, une substance particuliére qui est entre les loges des pépins.

Fig. 3. La substance pierreuse séparée de toutes les autres parties, & dans laquelle les pépins sont renfermés.

Fig. 4. La roche vûë à la Loupe.

a, la partie de la roche qui est formée du tissu pierreux.
b, un stilet qui est passé dans l'ouverture par où les pistils doivent passer.
c, l'insertion d'un des dix gros vaisseaux à la roche.

d, d'autres vaiſſeaux plus petits qui partent de la roche pour ſe diſtribüer dans la ſubſtance charnüe de la Poire.

e, la portion interne de la roche, qui eſt formée par un épanoüiſſement du canal pierreux.

Fig. 5. La même roche, pour faire voir qu'elle reſſemble aſſés bien à un cone tronqué *a, b, c.*

Fig. 6. Une pierre de la ſubſtance pierreuſe, vûë au Microſcope avec les vaiſſeaux qui l'accompagnent.

a, les vaiſſeaux capillaires.

b, les gros vaiſſeaux.

Fig. 7. Une pierre pareille, tirée d'un jeune fruit, vûë au Microſcope.

a, les vaiſſeaux qui ſont fort courts.

b, la pierre, qui n'eſt pas encore bien endurcie.

Fig. 8. Le canal pierreux, qui eſt quelquefois tout d'une piéce.

a, ce canal.

b, un ſtilet qui paſſe dans l'ouverture par laquelle les piſtils doivent paſſer.

Fig. 9. La continuation de ce canal, qui fait la portion interne de la roche.

a, le noyau de la roche.

b, un des piſtils deſſéché qui paſſe au travers.

Fig. 10. Le même noyau coupé ſuivant ſa longueur, pour faire voir

a, les piſtils deſſéchés qui le traverſent.

Fig. 11. Une groſſe pierre du canal pierreux vûë au Microſcope.

a, des vaiſſeaux devenus pierreux, & qui joignent enſemble les différentes pierres *b, b, b, b.*



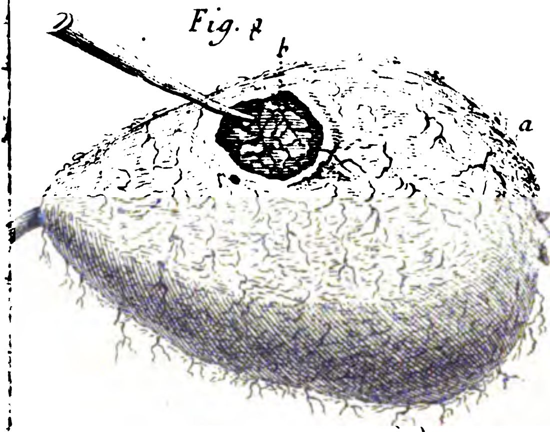
OBSERVATION ANATOMIQUE SUR UNE ALTÉRATION SINGULIÈRE DU CRISTALLIN ET DE L'HUMEUR VITRÉE.

Par M. MORAND.

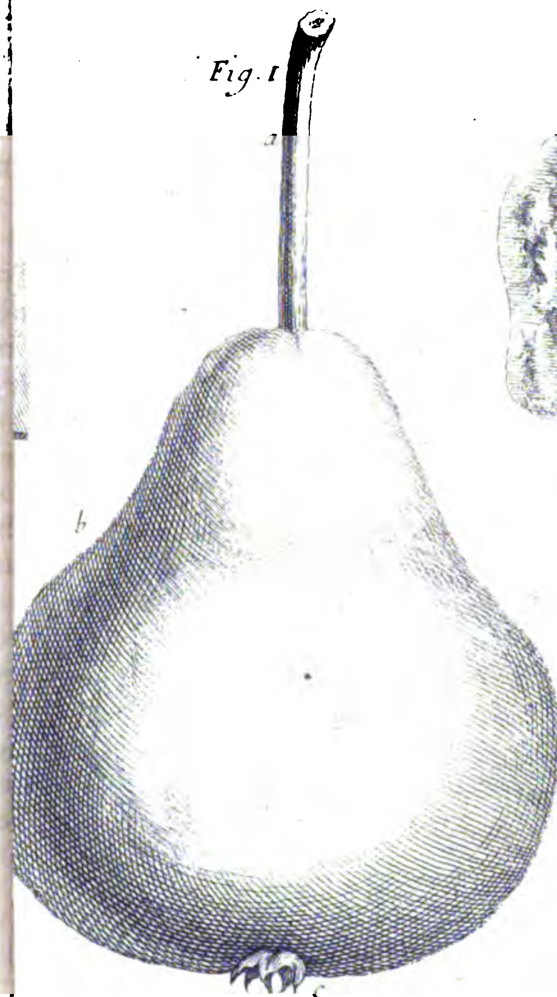
UN Homme de quarante ans, mort à l'Hôpital de la Charité le 31 Juillet de la presente année, d'une Hidropisie ascite, avoit à l'Oeil gauche une Cataracte jaune, qui paroissoit vieille, & faisoit une grande difformité; je fus curieux d'éxaminer cet Oeil, dans lequel je croyois trouver un Cristallin opaque, comme dans les Cataractes ordinaires; mais lorsqu'il fut détaché de l'orbite & disséqué éxactement, j'y trouvai plusieurs choses si singuliéres, qu'elles me parurent mériter la description que j'en donne.

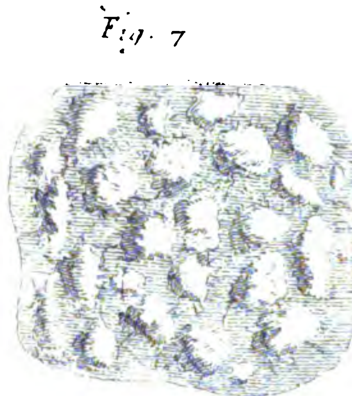
Cet Oeil détaché de l'orbite, & dépoüillé des muscles & des graisses qui l'environnent *(Fig. A)* n'étoit point de la forme ordinaire; vû pardevant, il étoit plus quarré que rond; il avoit sur sa surface quatre enfoncements ou sillons paralleles au plan des quatre muscles droits. Comme tout le globe étoit maigre & atrophié, je jugeai que la contraction de ces muscles avoit fait ces enfoncements, faute de résistance de la part des parties intérieures de l'Oeil. Au travers de la Cornée transparente, l'Iris paroissoit plus large en haut qu'en bas, & l'ouverture de la Prunelle presque réguliérement quarrée.

Après l'éxamen superficiel de cet Oeil, je fis une coupe circulaire du globe, à deux lignes au de-là du rebord de la Cornée transparente, pour partager tout l'Oeil en deux hémispheres, dont l'antérieure seroit plus petite. La Sclérotique & la Choroïde étant entamées par cette coupe, je fus surpris de voir qu'il ne s'écoulat ni humeur aqueuse, ni rien qui pût ressembler à quelque portion de l'Humeur vitrée; je fis de tout



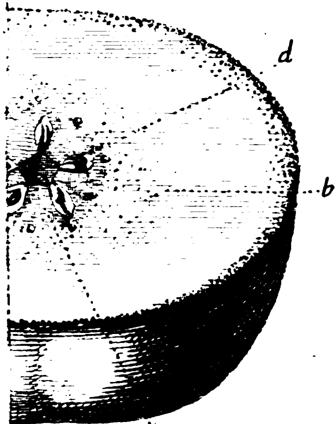




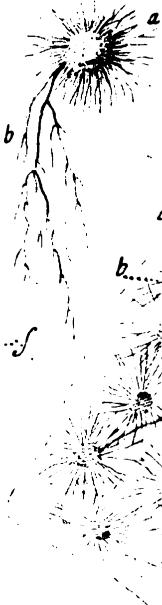




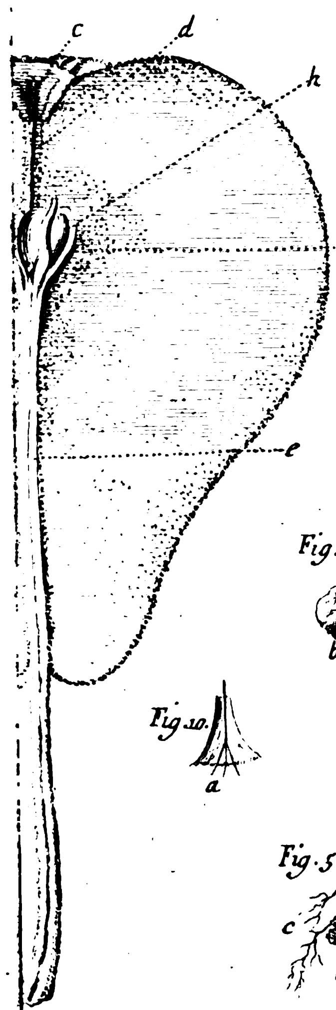
Ph. Simonneau Sculp.









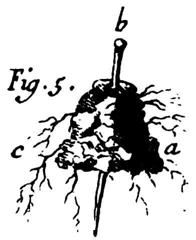












Ph. Simonneau Sculp.

tout le globe de l'Oeil deux piéces *(Fig. B. C.)* la piéce *B* me donna la face postérieure de l'Iris & du Cristallin ; le Cristallin étoit d'une couleur blanche tirant sur le jaune, & de la consistance de la pierre la plus dure.

Il me parut plus ovale que rond *(Fig. D.)* A une partie de son bord supérieur, il étoit comme usé en quelques endroits; ayant essayé de l'ôter de sa place, je le trouvai retenu à sa partie inferieure par la membrane cristalline qui étoit transparente, & qui adhéroit à l'Iris dans presque toute sa circonférence *(Fig. E.)* je détachai le Cristallin de cette membrane pour voir sa face antérieure *(Fig. F.)* sur laquelle étoit une pellicule membraneuse & opaque que j'enlevai aisément.

Cette pellicule recouvroit une petite cavité *(Fig. G.)* située horisontalement, eu égard à la position de l'Oeil dans l'Orbite, & creusée dans l'épaisseur du Cristallin même ; à cette face antérieure le Cristallin étoit plus plat qu'à la postérieure.

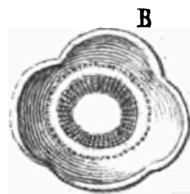
La coupe de l'hémisphere postérieure *(Fig. C.)* montroit le chaton de l'Humeur vitrée bien marqué & parfaitement proportionné au Cristallin qui tenoit à l'autre coupe ; mais au lieu de l'Humeur vitrée qui auroit dû remplir cet hémisphere, je vis d'abord une substance gélatineuse, de couleur cendrée, d'une consistance assés ferme, dont la couche étoit épaisse de demi-ligne, & cette matiére *(Fig. L.)* composoit le chaton qui recevoit le Cristallin pierreux. Le chaton étoit entouré des fibres ciliaires, mais fort irréguliérement arrangées *(Fig. C.)* Cette matiére gélatineuse, qui étoit apparemment un reste d'Humeur vitrée, étoit enveloppée d'une membrane très-déliée, & recouvroit un petit Os dont le fond du globe étoit rempli, laissant cependant entre ce petit Os & la Sclérotique un espace auquel il est vrai-semblable d'attribuer la facilité que les muscles droits ont eû de faire sur le globe les quatre dépressions paralleles à leur plan; la Sclérotique, beaucoup plus épaisse & plus dure que dans l'état naturel, étoit intérieurement revêtüe de la Choroïde à l'ordinaire.

L'Os qui tenoit la place de l'Humeur vitrée, avoit du côté du Nerf optique la forme d'un culot moulé dans le fond

du globe *(Fig. H.)* En tenant l'Oeil par le Nerf optique, ce culot étoit ſuſpendu par un petit cordon mollaſſe que formoit la Rétine avant ſon épanoüiſſement, & par une coupe de la Sclérotique on voyoit bien que ce cordon venoit du Nerf optique *(Fig. I.)* Du côté le plus large, & qui regarde le Criſtallin, ce petit Os étoit creuſé & recouvert de la matiére gélatineuſe qui formoit le chaton du Criſtallin.

La *Fig. M* repréſente cette cavité, qui en quelques endroits étoit revêtüe de quelques portions de la Rétine. La *Fig. N* montre la face poſtérieure du culot, où l'on voit le trou rond dont il étoit percé pour le paſſage de la Rétine. A une des faces de côté il y avoit un autre trou *(Fig. O.)* par où reſortoient quelques filets de la Rétine, qui s'attachoient à la Choroïde. Ce petit Os eſt plus épais dans quelques endroits que dans d'autres, & compoſé de fibres abſolument oſſeuſes, dont le tiſſu eſt irrégulier, & qu'on a tâché de rendre ſenſible dans les trois Figures *M. N. O.*

Cette altération du Criſtallin & de l'Humeur vitrée étant digne de remarque, j'ai fait tout ce que j'ai pû pour en découvrir la cauſe, & par les perquiſitions que j'ai faites, j'ai appris que le Sujet incommodé étoit borgne depuis plus de vingt ans; qu'à l'âge d'environ quinze ans il avoit eu ſur cet Oeil une fluxion violente, à la ſuite de laquelle s'étoit formée une Cataracte jaune, & que pluſieurs Oculiſtes lui ayant offert d'en faire l'opération, il n'avoit jamais voulu la ſouffrir. Un Oculiſte, qui au lieu des parties molles & preſque fluides, telle que l'Humeur vitrée, auroit rencontré un Os avec ſon Aiguille, auroit été bien déconcerté. Il ne ſera peut-être pas inutile à ceux qui ſe mêlent de l'opération de la Cataracte, de connoître cet éxemple, quoique rare & peut-être le ſeul, d'une Oſſification dans le globe de l'Oeil.

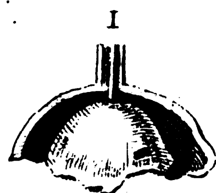






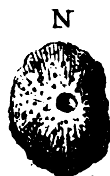


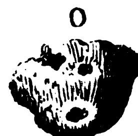












Ph. Simonneau del. et Sculp.

MÉTHODE

Pour déterminer le ſort de tant de Joüeurs que l'on voudra, & l'avantage que les uns ont ſur les autres, lorſqu'ils joüent à qui gagnera le plus de parties dans un nombre de parties déterminé.

Par M. NICOLE.

DANS le Mémoire que je lûs, il y a quelques jours, j'ai déterminé le ſort de deux Joüeurs, & l'avantage de l'un ſur l'autre, pour tel nombre de parties que ce ſoit. Je me ſuis ſervi dans ce Mémoire de la méthode analytique, & en parcourant toutes les Equations que la nature des différentes queſtions fournit, j'ai fait voir de quelle maniére elles conduiſent à la ſolution de chaque cas. La comparaiſon des grandeurs réſultantes de chaque ſolution de ces différents cas, fait enſuite découvrir la loi ſelon laquelle ces grandeurs croiſſent, & donne la ſolution générale pour un nombre de parties quelconque. 29 Mars 1730.

Dans le Mémoire que je donne aujourd'hui, je me ſers auſſi d'abord de la même méthode analytique, mais les différents cas que l'on eſt obligé d'examiner, devenant bien-tôt fort composés, & par-là le nombre des Equations dont il faut faire uſage, devenant très-grand, j'abandonne cette méthode, qui n'a donné la ſolution que de quelques cas particuliers, & en donne une autre beaucoup plus ſimple, & qui ſatisfait à tous les cas poſſibles que l'on peut propoſer ſur cette matiére. Cette nouvelle maniére de proceder, fournit encore une autre utilité, c'eſt une méthode générale pour élever un Multinôme composé de tant de parties que l'on voudra, à une puiſſance quelconque, beaucoup plus ſimple, & qui demande conſidérablement moins de calcul que les méthodes ordinaires.

PROBLEME I.

Trois Joüeurs, dont les forces sont entr'elles, comme les grandeurs p, q, m, *joüent ou parient à qui gagnera le plus de fois en un nombre déterminé de parties. On demande le sort de chacun de ces Joüeurs, & l'avantage du Joüeur le plus fort sur chacun des autres.*

SOLUTION.

Si l'on nomme a l'argent qui est au jeu, ou la mise des trois Joüeurs, & si l'on suppose qu'ils joüent en une partie, le sort du 1.er Joüeur sera $\frac{\overset{1.0.0}{p\times a}+\overset{0.1.0}{q\times o}+\overset{0.0.1}{m\times o}}{p+q+m}=\frac{ap}{p+q+m}$.

Celui du second. . . . . $\frac{aq}{p+q+m}$.

Celui du troisiéme. . . . . $\frac{am}{p+q+m}$.

Où il faut remarquer que les nombres 1.0.0, 0.1.0 & 0.0.1 qui sont écrits au-dessus de chaque terme de la quantité qui exprime le sort du premier Joüeur, indiquent le nombre de parties que chaque Joüeur a gagné; par exemple, 1.0.0 exprime que le premier Joüeur a gagné une partie, & les deux autres n'en gagnent point, ce qui doit être entendu pour la suite de ce Mémoire; 3.2.1 exprimera de même que le premier Joüeur a gagné 3 parties, le second 2 parties, & le troisiéme une partie.

Les inconnuës s, x, y, z, t, r, &c. expriment ici le sort du premier Joüeur, dans les différents états indiqués par les nombres dont on vient de parler, ou, ce qui est la même chose, la partie de l'argent qui est au jeu, laquelle appartient à ce Joüeur relativement à chaque état.

Si l'on joüe en deux parties

Le sort du 1.er est $s=\frac{\overset{1.0.0}{p\times x}+\overset{0.1.0}{q\times y}+\overset{0.0.1}{m\times z}}{p+q+m}$; pour déterminer la valeur de s, on a $x=\frac{\overset{2.0.0}{p\times a}+\overset{1.1.0}{q\times\frac{1}{2}a}+\overset{1.0.1}{m\times\frac{1}{2}a}}{p+q+m}=\frac{ap+\frac{1}{2}aq+\frac{1}{2}am}{p+q+m}$,

$y = \frac{\overset{1.1.0}{p\times\frac{1}{2}a} + \overset{0.2.0}{q\times 0} + \overset{0.1.1}{m\times 0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}$, & $z = \frac{\overset{1.0.1}{p\times\frac{1}{2}a} + \overset{0.1.1}{q\times 0} + \overset{0.0.2}{m\times 0}}{p+q+m}$ $= \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}$. D'où l'on tire $f = \frac{app+\frac{1}{2}apq+\frac{1}{2}apm+\frac{1}{2}apq+\frac{1}{2}apm}{\overline{p+q+m}^2}$ $= \frac{app+apq+apm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Le ſort du ſecond eſt donc .... $\frac{aqq+apq+aqm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Et celui du troiſiéme eſt .... $\frac{amm+amq+apm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Leſquels ſont entr'eux comme pa, qa, ma.

Si l'on joüe en trois parties

Le ſort du 1.er eſt $f = \frac{\overset{1.0.0}{p\times a} + \overset{0.1.0}{q\times y} + \overset{0.0.1}{m\times z}}{p+q+m}$; pour déterminer f, on a $x = \frac{\overset{2.0.0}{p\times a} + \overset{1.1.0}{q\times u} + \overset{1.0.1}{m\times t}}{p+q+m}$, $u = \frac{\overset{2.1.0}{p\times a} + \overset{1.2.0}{q\times 0} + \overset{1.1.1}{m\times\frac{1}{3}a}}{p+q+m} = \frac{ap+\frac{1}{3}am}{p+q+m}$ & $t = \frac{\overset{2.0.1}{p\times a} + \overset{1.1.1}{q\times\frac{1}{3}a} + \overset{1.0.2}{m\times 0}}{p+q+m} = \frac{ap+\frac{1}{3}aq}{p+q+m}$, donc $x =$ $\frac{app+2apq+2apm+\frac{2}{3}aqm}{\overline{p+q+m}^2}$. On a auſſi $y = \frac{\overset{1.1.0}{p\times\overline{\frac{ap+\frac{1}{3}am}{p+q+m}}} + \overset{0.2.0}{q\times 0} + \overset{0.1.1}{m\times r}}{p+q+m}$, $r = \frac{\overset{1.1.1}{p\times\frac{1}{3}a} + \overset{0.2.1}{q\times 0} + \overset{0.1.2}{m\times 0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{3}ap}{p+q+m}$, donc $y = \frac{app+\frac{2}{3}apm}{\overline{p+q+m}^2}$.

On trouvera auſſi $z = \frac{\overset{1.0.1}{p\times\overline{\frac{ap+\frac{1}{3}aq}{p+q+m}}} + \overset{0.1.1}{\frac{q\times\frac{1}{3}ap}{p+q+m}} + \overset{0.0.2}{m\times 0}}{p+q+m}$ $= \frac{app+\frac{2}{3}apq}{\overline{p+q+m}^2}$. Si donc on ſubſtitüe pour x, y & z, les valeurs que l'on vient de trouver, on aura la valeur de f

pour le ſort du 1.er Joüeur... $\frac{ap^3+3appq+3appm+2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$

pour celui du ſecond....... $\frac{aq^3+3aqqp+3aqqm+2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$

pour celui du troiſiéme..... $\frac{am^3+3ammq+3ammp+2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$

Si l'on joüe en quatre parties

Le fort du 1.er Joüeur fera $f = \frac{p \times \overset{1.0.0}{x} + q \times \overset{0.1.0}{y} + m \times \overset{0.0.1}{z}}{p+q+m}$; pour déterminer f, on aura toutes les Equations fuivantes, $x = \frac{p \times \overset{2.0.0}{u} + q \times \overset{1.1.0}{t} + m \times \overset{1.0.1}{r}}{p+q+m}$, $u = \frac{p \times \overset{3.0.0}{a} + q \times \overset{2.1.0}{k} + m \times \overset{2.0.1}{l}}{p+q+m}$, $k = \frac{p \times \overset{3.1.0}{a} + q \times \overset{2.2.0}{\tfrac{1}{2}a} + m \times \overset{2.1.1}{a}}{p+q+m} = \frac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p+q+m}$, $l = \frac{p \times \overset{3.0.1}{a} + q \times \overset{2.1.1}{a} + m \times \overset{2.0.2}{\tfrac{1}{2}a}}{p+q+m}$.

Donc $u = \frac{app + 2apq + 2apm + 2aqm + \frac{1}{2}aqq + \frac{1}{2}amm}{\overline{p+q+m}^{2}}$,

$$t = \frac{p \times \overset{2.1.0}{\overline{\frac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p+q+m}}} + q \times \overset{1.2.0}{g} + m \times \overset{1.1.1}{h}}{p+q+m}, \quad g = \frac{p \times \overset{2.2.0}{\tfrac{1}{2}a} + q \times \overset{1.3.0}{0} + m \times \overset{1.2.1}{0}}{p+q+m}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}, \quad h = \frac{p \times \overset{2.1.1}{a} + q \times \overset{1.2.1}{0} + m \times \overset{1.1.2}{0}}{p+q+m} = \frac{ap}{p+q+m},$$ donc

$$t = \frac{app + apq + 2apm}{\overline{p+q+m}^{2}}, \quad r = \frac{p \times \overset{2.0.1}{\overline{ap + aq + \frac{1}{2}am}} + q \times \overset{1.1.1}{ap}}{\overline{p+q+m}^{2}} +$$

$$\frac{m \times \overset{1.0.2}{f}}{p+q+m}, \quad f = \frac{p \times \overset{2.0.2}{\tfrac{1}{2}a} + q \times \overset{1.1.2}{0} + m \times \overset{1.0.3}{0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m},$$ donc r

$$= \frac{app + 2apq + apm}{\overline{p+q+m}^{2}} \;\&\; x = \frac{ap^3 + 3appq + 3appm + 6apqm + \frac{1}{2}apqq + \frac{1}{2}apmm}{\overline{p+q+m}^{3}}$$

Pour déterminer y, on a ces Equations .... $y =$

$$\frac{p \times \overset{1.1.0}{\overline{\frac{app + apq + 2apm}{\overline{p+q+m}^{2}}}} + q \times \overset{0.2.0}{d} + m \times \overset{0.1.1}{e}}{p+q+m}, \quad d = \frac{p \times \overset{1.2.0}{\frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}} + q \times \overset{0.3.0}{0} + m \times \overset{0.2.1}{0}}{p+q+m}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}app}{\overline{p+q+m}^{2}}, \quad e = \frac{p \times \overset{1.1.1}{\frac{ap}{p+q+m}} + q \times \overset{0.2.1}{0} + m \times \overset{0.1.2}{0}}{p+q+m} = \frac{app}{\overline{p+q+m}^{2}},$$

donc $y = \frac{ap^3 + \frac{3}{2}appq + 3appm}{\overline{p+q+m}^{3}}$, & pour déterminer z, on a

$$z = \frac{p \times \overset{1.0.1}{\frac{app + 2apq + apm}{\overline{p+q+m}^{2}}} + q \times \overset{0.1.1}{\frac{app}{\overline{p+q+m}^{2}}} + m \times \overset{0.0.2}{b}}{p+q+m};$$

$b = \dfrac{\overset{1.0.2}{p \times X} + \overset{0.1.2}{q \times 0} + \overset{0.0.3}{m \times 0}}{p+q+m}$, $X = \dfrac{\overset{2.0.2}{p \times \frac{1}{2} a} + \overset{1.1.2}{q \times 0} + \overset{1.0.3}{m \times 0}}{p+q+m} = \dfrac{\frac{1}{2} ap}{p+q+m}$,
donc $b = \dfrac{\frac{1}{2} app}{\overline{p+q+m}^2}$, & $z = \dfrac{ap^3 + 3appq + \frac{1}{2} appm}{\overline{p+q+m}^3}$. Si donc on ſubſtitüe pour x, y & z leurs valeurs, on aura $\int$, ou le ſort du 1.er Joüeur $= \dfrac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^3m + 12appqm + 3appqq + 3appmm}{\overline{p+q+m}^4}$.

Celui du 2.d ... $\dfrac{aq^4 + 4aq^3p + 4aq^3m + 12aqqpm + 3appqq + 3aqqmm}{\overline{p+q+m}^4}$.

Celui du 3me ... $\dfrac{am^4 + 4am^3p + 4am^3q + 12ammpq + 3appmm + 3aqqmm}{\overline{p+q+m}^4}$.

Lorſque l'on joüe en une partie

Le ſort du 1.er Joüeur eſt .... $\dfrac{ap}{p+q+m}$.

Celui du 2.d .... $\dfrac{aq}{p+q+m}$.

Celui du 3.me .... $\dfrac{am}{p+q+m}$.

Lorſque l'on joüe en deux parties

Le ſort du 1.er eſt .... $\dfrac{app + apq + apm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Celui du 2.d .... $\dfrac{aqq + apq + aqm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Celui du 3.me .... $\dfrac{amm + apm + aqm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Lorſque l'on joüe en trois parties

Le ſort du 1.er eſt ...... $\dfrac{ap^3 + 3appq + 3appm + 2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$.

Celui du 2.d .... $\dfrac{aq^3 + 3apqq + 3aqqm + 2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$.

Celui du 3.me .... $\dfrac{am^3 + 3apmm + 3aqmm + 2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$.

Lorſque l'on joüe en quatre parties

Le ſort du 1.er eſt $\dfrac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^3m + 3appq^2 + 3appm^2 + 12appqm}{\overline{p+q+m}^4}$.

Celui du 2.d ... $\dfrac{aq^4 + 4aq^3p + 4aq^3m + 3appqq + 3aqqm^2 + 12apqqm}{\overline{p+q+m}^4}$.

Celui du 3.me ... $\dfrac{am^4 + 4apm^3 + 4aqm^3 + 3appmm + 3aqqm^2 + 12apqm^2}{\overline{p+q+m}^4}$.

Si $p=6$, $q=5$, $m=4$, les forts feront

pour une partie	6.	5.	4.
pour deux..............	90.	75.	60.
ou	6.	5.	4.
pour trois..............	1428.	1115.	832.
pour quatre.............	22100.	16981.	11754.

REMARQUE.

Si l'on vouloit rechercher le fort de ces trois Joüeurs, pour 5, 6, 7, 8, &c. parties, le nombre des Equations qu'il faudroit parcourir par cette méthode deviendroit fort considérable ; il en faudroit parcourir encore un bien plus grand nombre, si au lieu de trois Joüeurs, on en fuppofoit quatre, cinq, fix, &c. car ces Equations exprimant les différents évenements qui peuvent arriver dans le cours du Jeu, le nombre de ces évenements fera d'autant plus grand, qu'il y aura un plus grand nombre de Joüeurs, & qu'ils joüeront en un plus grand nombre de parties. Dans tous ces cas compofés, la voye des Equations eft trop longue & trop pénible. Voici une méthode qui fatisfait à tous les cas, quel que foit le nombre des Joüeurs, & quel que foit le nombre de parties que l'on doive joüer.

PROBLEME II.

Soit, par exemple, quatre Joüeurs, dont les forces foient exprimées par les grandeurs p, q, m, r. *On demande le fort de chacun de ces Joüeurs, & l'avantage des uns fur les autres, lorfqu'ils conviennent de joüer en huit parties ; il fuffit pour gagner le fond du Jeu, de gagner une partie au moins de ces huit plus qu'aucun des autres Joüeurs.*

SOLUTION.

On fçait que $\frac{p}{p+q+m+r}$ exprime la probabilité que le premier Joüeur a de gagner la 1.re partie, que $\frac{pp}{\overline{p+q+m+r}^2}$ exprime celle qu'il a de gagner les deux premiéres, & enfin

p^8

$\frac{p^8}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ exprime la probabilité qu'il a de gagner les huit parties: Si on ajoûte à cette quantité la probabilité que le même Joüeur a de gagner sept de ces parties, un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant une.

Que l'on ajoûte encore à ces deux quantités, la probabilité que ce même Joüeur a de gagner six parties, l'un des trois autres Joüeurs en gagnant deux, ou deux de ces trois Joüeurs en gagnant chacun une.

Qu'à cette somme on ajoûte encore la probabilité que le même Joüeur a de gagner cinq parties, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant trois, ou deux, ou une.

Puis la probabilité que le même Joüeur a d'en gagner quatre, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant quatre, trois, deux ou une.

Et enfin que l'on ajoûte encore la probabilité que ce même Joüeur a de gagner trois parties, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant trois, deux ou une, & celle que ce même Joüeur a de gagner deux parties, chacun des trois autres Joüeurs en gagnant deux.

Il est clair que la somme formée par l'addition de toutes ces parties, exprimera le sort de ce 1.er Joüeur, ou le droit qu'il a à l'argent qui est au Jeu : car cette somme est formée de toutes les maniéres possibles que ce Joüeur a de gagner, ou tout ce qui est au Jeu, lorsqu'il gagne une partie de plus qu'aucun des autres Joüeurs, ou la moitié de ce qui est au Jeu, lorsqu'un autre Joüeur gagne autant de parties que lui, ou enfin le tiers ou le quart de ce qui est au Jeu, lorsque deux ou trois des autres Joüeurs gagnent autant de parties que lui.

Or, il est évident que les nombres qui expriment combien il y a de maniéres de prendre huit choses, 8 à 8, 7 à 7, 6 à 6, 5 à 5, 4 à 4, 3 à 3, & 2 à 2, expriment aussi le nombre des maniéres que ce Joüeur a de gagner huit parties, ou sept, six, cinq, quatre, trois, deux.

Or, tout le monde sçait que la septiéme bande perpendiculaire du Triangle arithmétique de M. Pascal fournit tous ces

nombres, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8. Il ne reste plus qu'à multiplier ces nombres par ceux qui expriment toutes les variétés qui peuvent arriver aux trois autres Joüeurs, pour le nombre des parties qu'ils peuvent gagner, relativement à chaque cas du premier Joüeur, & qui multiplient chacun de ces cas. Si donc on nomme a l'argent qui est au Jeu,

1.° On aura $\frac{1 \times p^8 \times a}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur gagne les huit parties, $\frac{8 \times p^7 \times \overline{q+m+r}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour qu'il gagne sept parties, chacun des autres Joüeurs en gagnant une; car il est clair que chacun des autres Joüeurs en peut gagner une en huit maniéres, sçavoir, ou la 1re partie, ou la 2me, 3me, 4me.... 8me.

2.° On aura $\frac{28 p^6 \times \overline{qq+mm+rr}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur en gagnant six, l'un des autres en gagnent deux, car 28 exprime toutes les maniéres de gagner six parties de huit, & sur chacune de ces maniéres, chacun des autres Joüeurs peut gagner les deux autres parties.

3.° On aura $\frac{28 p^6 \times 2 \times \overline{qm+qr+mr}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur en gagnant six, deux des trois autres Joüeurs en gagnent chacun une; car il est clair que ces deux autres peuvent être le 2me & le 3me, le 2me & le 4me, ou le 3me & le 4me, & que dans chaque cas il y a deux maniéres.

4.° On aura aussi $\frac{56 p^5 \times \overline{q^3+m^3+r^3}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur gagnant cinq parties, l'un quelconque des trois autres en gagne trois.

5.° Puis $\frac{56 p^5 \times 3 \times \overline{qq \times \overline{m+r} + mm \times \overline{q+r} + rr \times \overline{q+m}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$, car ce Joüeur a 56 maniéres de gagner cinq parties des huit, & chacun des autres a trois maniéres de gagner deux parties des trois restantes.

6.° Puis $\frac{56p^5 \times 6qmr}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur gagne cinq parties des huit, chacun des trois autres en gagnant une : car trois choses se peuvent combiner en six maniéres.

7.° On aura aussi $\frac{70p^4 \times \overline{q^4+m^4+r^4}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur gagnant quatre parties, un quelconque des trois autres en gagne aussi quatre.

8.° Puis $\frac{\overline{70p^4 \times 4 \times q^3 \times \overline{m+r} + m^3 \times \overline{q+r} + r^3 \times \overline{q+m}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que l'un quelconque des trois autres en gagne trois : car il y a quatre maniéres pour que cela arrive, quatre choses pouvant être prises 3 à 3 en quatre maniéres.

9.° On aura encore $\frac{\overline{70p^4 \times 6 \times qq \times \overline{mm+rr} + mmrr}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que deux quelconques des trois autres Joüeurs en gagnent chacun deux.

10.° Puis $\frac{\overline{70p^4 \times 6 \times \overline{qq \times 2mr} + \overline{mm \times 2qr} + \overline{rr \times 2qm}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que l'un quelconque des trois autres en gagne deux, les deux restants en gagnant chacun une : car il y a six maniéres de prendre quatre choses 2 à 2, & les deux Joüeurs restants peuvent changer en deux maniéres.

11.° On aura aussi $\frac{\overline{56p^3 \times 10 \times q^3 \times \overline{mm+rr} + m^3 \times \overline{qq+rr} + r^3 \times \overline{qq+mm}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois autres en gagne aussi trois, chacun des restants en gagnant deux : car il y a dix maniéres de prendre cinq choses 3 à 3.

12.° Puis $\frac{56p^3 \times \overline{10q^3 \times 2mr + 10m^3 \times 2qr + 10r^3 \times 2qm}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joüeur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois

autres en gagne auſſi trois, pendant que les deux reſtants en gagnent chacun une : or il y a dix maniéres de prendre cinq choſes 3 à 3, & deux maniéres d'en arranger deux.

13.° Puis $\frac{56p^3 \times 10qq \times \overline{3mmr + 3rrm} + 10m^2 \times 3rrq}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joüeur en gagnant trois parties, deux quelconques des trois autres Joüeurs en gagnent chacun deux, pendant que le Joüeur reſtant en gagne une : or il y a dix maniéres de prendre cinq choſes 2 à 2, & trois maniéres de prendre les trois reſtantes auſſi 2 à 2.

14.° On aura enfin $\frac{28pp \times 15qq \times 6mm \times 1rr}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joüeur gagnant deux parties des huit, les trois autres en gagnent auſſi chacun deux : car il y a quinze maniéres de prendre ſix choſes 2 à 2, ſix maniéres de prendre quatre choſes 2 à 2, & une maniére de prendre les deux reſtantes 2 à 2.

Il eſt évident que ce ſont là toutes les maniéres qu'a ce Joüeur de gagner, puiſque dans toute autre maniére de diſtribuer les huit parties, ce Joüeur en gagnera moins que quelques-uns des autres Joüeurs.

Il ne reſte plus qu'à diſtinguer entre tous ces cas quels ſont ceux qui font gagner à ce Joüeur tout l'argent qui eſt au Jeu, & quels ſont ceux qui ne lui en font gagner que la moitié ou le tiers, ou le quart : or il eſt viſible qu'il gagne tout, lorſqu'il a pris plus de parties qu'aucun des autres Joüeurs, qu'il ne gagne que la moitié, lorſqu'un autre Joüeur prend autant de parties que lui, qu'il ne gagne que le tiers de ce qui eſt au Jeu, lorſque deux autres Joüeurs gagnent autant de parties que lui, & enfin le quart de ce qui eſt au Jeu, lorſque les trois autres Joüeurs prennent autant de parties que lui. Le ſort de ce Joüeur ſera donc

$$\frac{\begin{array}{l} ap^8 + 8ap^7 \times \overline{q+m+r} + 28ap^6 \times \overline{qq+mm+rr} + 56ap^6 \times \overline{qm+qr+mr} \\ + 56ap^5 \times \overline{q^3+m^3+r^3} + 168ap^5 \times \overline{qqm+qqr+m^2q+m^2r+r^2q+r^2m} \\ + 336ap^5qmr + 35ap^4 \times \overline{q^4+m^4+r^4} + 280ap^4 \times \overline{q^3m+q^3r+m^3q+m^3r+r^3q+r^3m} \\ + 420ap^4 \times \overline{q^2m^2+q^2r^2+m^2r^2} + 840ap^4 \times \overline{qqmr+m^2qr+r^2qm} + 280ap^3 \\ \times \overline{q^3m^2+q^3r^2+m^3q^2+m^3r^2+r^3q^2+r^3m^2} + 560ap^3 \times \overline{q^3mr+m^3qr+r^3qm} \\ + 1680ap^2 \times \overline{qqm^2r+qqr^2m+m^2rrq} + 630appqqmmrr \end{array}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$$

COROLLAIRE I.

Il est évident que si dans cette formule, on met q à la place de p, & p à la place de q, elle se changera en une autre quantité composée, qui exprimera le sort du Joüeur, dont la force ou l'habileté est exprimée par q. Car le même raisonnement qui a été fait pour le premier Joüeur, doit être fait pour chacun des autres Joüeurs, ainsi en substituant encore successivement pour p les grandeurs m & r, & réciproquement, on aura les sorts des deux autres Joüeurs dont les forces sont representées par m & r.

COROLLAIRE II.

La quantité composée qui a été trouvée pour le sort du premier Joüeur, & qui exprime dans le cours des huit parties tous les évenements qui lui sont favorables, cette quantité, dis-je, étant ajoûtée aux trois quantités semblables, qui résultent de la substitution qui a été faite, lesquelles expriment dans le cours des huit parties, tous les évenements favorables aux trois autres Joüeurs, & qui sont contraires au premier, la somme qui en viendra sera égale à l'unité ou à l'argent qui est au Jeu. Car chacune de ces quantités étant une fraction qui exprime la partie de cet argent qui appartient à chaque Joüeur, selon le droit qu'il a à cette partie de Jeu, il est nécessaire que toutes ces portions rassemblées soient égales au tout. Or comme chacune de ces fractions a un dénominateur commun, qui dans cet exemple est la huitiéme puissance de $p+q+m+r$, il s'ensuit que les quatre numérateurs

pris ensemble, doivent aussi être égaux à cette huitiéme puissance. Le même raisonnement aura toûjours lieu, quel que soit le nombre de Joüeurs, & la quantité de parties que l'on joüe.

COROLLAIRE III.

Si l'on nomme A ce qui a été trouvé pour le sort du 1.er Joüeur, & B, C, D, pour les sorts des autres Joüeurs, trouvés par la substitution successive de q, m, r, à la place de p, l'avantage du 1.er Joüeur sur le 2.d sera $A - B$, sur le 3.me $A - C$, & sur le 4.me $A - D$; & par conséquent son avantage total sera $3A - B - C - D$. D'où il suit que l'avantage du 2.d sera $3B - A - C - D$, celui du 3.me sera $3C - A - B - D$, & celui du 4.me sera $3D - A - B - C$; quelques-unes de ces grandeurs seront négatives, & alors elles exprimeront le desavantage du Joüeur auquel elles appartiennent.

REMARQUE.

Si l'on fait attention à ce qui a été fait pour trouver tous les termes qui composent le sort du premier Joüeur dans l'exemple que l'on s'est proposé, on verra que dans tous les cas possibles que l'on peut proposer sur cette matiére, c'est-à-dire, quel que soit le nombre des Joüeurs dont les forces soient p, q, m, r, f, t, &c. & quel que soit le nombre de parties qu'ils doivent joüer, par exemple 20, on verra, dis-je, que le sort du premier Joüeur sera composé de tous les termes de la vingtiéme puissance de $p + q + m + r + f +$ &c. dans lesquels la lettre p a plus de dimensions, ou autant que quelques-unes, ou que toutes les autres q, m, r, f, t, &c. Le premier de ces termes est p^{20}, & le dernier est $p^4 q^4 m^4 r^4 f^4$, dont le coëfficient doit être fait par ces nombres $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Le 1.er facteur exprime en combien de maniéres on peut prendre 20 choses 4 à 4.

Le 2.d les 16 restantes 4 à 4.

Le 3.me les 12 restantes 4 à 4.

Le 4.me les 8 restantes 4 à 4.

Et le 5.me les 4 restantes 4 à 4.

Et leur produit $2845 \times 1820 \times 495 \times 70 \times 1$ exprime le nombre de maniéres dont chacun des cinq Joüeurs peut gagner quatre parties, & dans ce cas chacun des cinq Joüeurs doit retirer $\frac{1}{5}$ de ce qui est au Jeu.

Le terme du milieu est celui qui exprime le nombre de maniéres que le premier Joüeur a de gagner 12 parties, les autres cinq Joüeurs en gagnant ou 8, ou 7, 6, 5, 4, 3, 2, & 1 de toutes les façons possibles.

Il en sera de même des autres termes dont on ne donne point ici le calcul, que l'on trouvera, si l'on veut, en suivant les mêmes regles que dans l'exemple résolu.

COROLLAIRE.

On voit par le Corollaire second & par les suivants, que chercher le sort du premier Joüeur entre plusieurs, dont les forces sont $p, q, m, r, s, t,$ &c. lesquels joüent un nombre n de parties; c'est chercher dans le multinôme $p+q+m+r+s+t+$ &c. élevé à la puissance n, tous les termes où p a plus de dimensions, ou au moins autant qu'aucune des autres lettres $q, m, r,$ &c. & que cette quantité étant trouvée, on trouve le sort des autres Joüeurs, en substituant successivement pour p les autres lettres $q, m, r, s,$ &c. Il est donc aussi évident que les quantités trouvées par ces substitutions, representeront aussi successivement dans le même multinôme tous les termes où les lettres $q, m, r, s,$ &c. auront plus de dimensions, ou au moins autant que toutes les autres lettres, & qu'ainsi la même méthode que l'on a suivie, peut servir à élever un multinôme quelconque à telle puissance qu'on voudra, & qu'il suffit pour cela de trouver tout ce qui appartient à une des parties dont le multinôme est composé.

EXEMPLE.

On demande la ſixiéme puiſſance de $a+b+c+d$. Pour la trouver il ſuffit de chercher tous les termes de cette puiſſance où la lettre a a plus ou autant de dimenſions que chacune des autres lettres b, c, d. Ces termes ſont

$$a^6 + 6a^5 \times \overline{b+c+d} + \tfrac{6\cdot5}{1\cdot2} \times a^4 \times \overline{bb+cc+dd} + \tfrac{6\cdot5}{1\cdot2}$$
$$\times a^4 \times 2 \times \overline{bc+bd+cd} + \tfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} \times a^3 \times \tfrac{1}{2} \times \overline{b^3+c^3+d^3}$$
$$+ \tfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} \times a^3 \times \tfrac{3\cdot2}{1\cdot2} \times \overline{bbc+bbd+ccb+ccd+ddb+ddc}$$
$$+ \tfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} \times a^3 \times 1.2.3. \times bcd + \tfrac{6\cdot5}{1\cdot2} \times aa \times \tfrac{4\cdot5}{1\cdot2}$$
$$\times \overline{bbcc+bbdd+ccdd} \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{6\cdot5}{1\cdot2} \times aa \times \tfrac{4\cdot3}{1\cdot2} \times 2$$
$$\times \overline{bbcd+ccbd+ddbc} \times \tfrac{1}{2}.$$

Si dans tous ces termes qui expriment les parties de la ſixiéme puiſſance, dans leſquelles la lettre a domine, on ſubſtituë ſucceſſivement pour a les grandeurs b, c, d, & réciproquement pour b, c, d, la grandeur a, on aura tous les termes de cette ſixiéme puiſſance où les lettres b, c, d, dominent, & en raſſemblant toutes ces parties, on aura la ſixiéme puiſſance demandée.



SUR

SUR LES MOUVEMENTS DE LA TÊTE, DU COL, ET DU RESTE DE L'EPINE DU DOS.

Par M. WINSLOW.

ON est à present très-convaincu que les petits mouvements en rond, par lesquels on tourne la Tête réciproquement de côté & d'autre, comme sur un pivot, n'est qu'une espece de rotation de la premiére Vertebre sur la seconde. On est persuadé que l'articulation de l'Os occipital n'y a aucune part, & que dans tous les degrés de ce mouvement, la Tête est simplement soûtenuë par la premiére Vertebre, qui la porte & transporte avec elle de côté & d'autre. J'examinerai dans un autre temps les difficultés qui pourroient encore arrêter quelques-uns sur ce second point. On avance aussi que les autres Vertebres du Col peuvent contribuer à cette espece de rotation, en ce que chacune d'elles prêtent un peu en même temps, de sorte que par-là elles font toutes ensemble un petit tour gradué, & ainsi augmentent ce mouvement de rotation. 26 Mai 1730.

On sçait que les petits mouvements de Tête en devant & en arriére, que l'on peut faire en tenant le Col immobile, dépendent uniquement de l'articulation de l'Os occipital avec la premiére Vertebre. On est d'accord que les grands mouvements de Tête en devant & en arriére, par lesquels on peut abbaisser, relever & renverser la Tête, sont executés par le mouvement commun de plusieurs Vertebres du Col; & que l'articulation de la premiére Vertebre avec la seconde n'y peut rien du tout contribuer, étant uniquement bornée aux petits tours de pivot dont je viens de parler.

A l'égard des infléxions latérales par lesquelles on incline la Tête vers l'une ou l'autre Epaule, il est évident que l'articulation de l'Occiput avec la premiére Vertebre, ni celle de

la premiére Vertebre avec la seconde ne les peuvent faire, mais qu'elles dépendent de l'articulation de la seconde Vertebre avec la troisiéme, & de celles des autres Vertebres suivantes entre elles.

Outre les quatre infléxions directes dont je viens de parler, & que l'on peut appeller *simples*, il y a quantité d'obliques, que l'on peut nommer *composés* ou *combinés ;* & outre le mouvement de rotation ou pivot que je viens d'exposer, il s'en trouve un autre qui a beaucoup de rapport avec celui que j'ai appellé dans mon Mémoire de l'année passée, *mouvement conique*, ou *mouvement en fronde ;* car on peut, en se tenant debout ou assis, faire un certain tournoyement de Tête par une combinaison successive de plusieurs infléxions du Col, de maniére que par le chemin de ce mouvement, le haut de la Tête décrit un cercle, & le reste avec le Col trace une espece de cone.

Je ne m'arrête pas ici à d'autres mouvements plus combinés ; par exemple, quand on fait le mouvement de charniére avec la Tête sur la premiére Vertebre dans le même temps que l'on fait le mouvement de pivot avec la premiére Vertebre sur la seconde.

L'artifice de la structure & de la connéxion de ces deux premiéres Vertebres du Col, par rapport aux mouvements de la Tête, est à présent presque assés connu. Il s'y rencontre une circonstance que je n'ai pas encore trouvée éclaircie. C'est la méchanique de l'articulation des apophyses inférieures de la premiére Vertebre avec les apophyses supérieures de la seconde. J'ai déja fait là-dessus plusieurs tentatives, mais je n'ai encore rien pû trouver d'assés clair pour être proposé avec contentement à la Compagnie. J'ai dit cela exprès, afin de donner à d'autres l'occasion d'en faire aussi la recherche.

A l'égard des cinq Vertebres suivantes, on se contente de dire que leurs apophyses, communément appellées *obliques*, facilitent tous les différents mouvements ordinaires du Col. Mais je n'ai pas été content de ce langage, après avoir fait attention que ces mêmes especes de mouvements se font aussi

par les Vertebres des Lombes, quoique la direction de leurs apophyses obliques soit très-différente de celle des apophyses obliques du Col, & qu'elles ne peuvent pas se faire toutes par les Vertebres du Dos, quoiqu'il y ait des apophyses obliques.

Cela m'a porté à éxaminer de nouveau la conformation & la connéxion des Vertebres du Col, & à comparer leurs apophyses obliques non seulement avec les apophyses obliques des Vertebres des Lombes, mais encore avec les apophyses obliques des Vertebres du Dos.

On sçait que chacune de la plûpart des Vertebres de l'Epine du Dos a quatre apophyses de cette espece. Elles n'ont pas toûjours été appellées *obliques*. Vésale, dans sa grande & excellente Histoire des Os du Corps humain, en parlant de toutes les Vertebres en général, & de leurs différentes apophyses, donne simplement aux deux supérieures des quatre dont il s'agit ici, le nom d'*apophyses ascendantes*, & celui d'*apophyses descendantes* aux deux inferieures. Il y fait observer que dans les Vertebres du Col la direction de ces quatre apophyses est oblique, & que dans les Vertebres du Dos elle est en quelque maniére *(quandantenus)* droite. Il a même eu soin d'exprimer ces deux différences dans la marge de son Livre par deux lignes particuliéres, l'une oblique & l'autre verticale. Il avertit ensuite que dans les Vertebres des Lombes le plan de ces apophyses a aussi une direction droite ou longitudinale. Il y a ajoûté encore que ces différentes directions ont des degrés dans plusieurs Vertebres de la même classe. Riolan a appellé ces apophyses *articulaires*, & c'est ainsi que je les nommerai après ceci plûtôt qu'*obliques*.

Quant à l'usage de ces différentes directions, il n'en parle que comme en passant. Ainsi à l'occasion des Vertebres du Col, ayant fait observer que l'obliquité de leurs apophyses ascendantes & descendantes est toûjours moindre dans les Vertebres qui approchent le plus du Dos: C'est, dit-il, parce « que ces Vertebres ne devant pas avoir un mouvement aussi « lâche que celles qui sont au dessus, leur articulation de même « ne devoit pas être aussi lâche. Ensuite, en parlant des Vertebres «

du Dos, il dit que leurs apophyſes aſcendantes & deſcendantes ſont preſque en ligne droite ſelon la longueur du Corps, afin que la connéxion de ces Vertebres ſoit plus ferme, & qu'elle prête moins au mouvement.

Pour mieux expoſer ce que je crois avoir remarqué en particulier ſur l'uſage des différentes directions de ces apophyſes, il ſera néceſſaire de rappeller une idée courte de l'attitude, de l'aſſemblage & de la connéxion de toutes les Vertebres, dont la colomne pliante, qu'on appelle en général l'*Epine du Dos*, eſt compoſée.

Il ſuffira de faire ſouvenir, 1.° Que dans la plûpart des Vertebres, ce qu'on appelle le *corps* eſt une eſpece de tronçon dont la portion antérieure eſt en quelque maniére cylindrique, coupée tranſverſalement par les deux bouts, auxquels on donne le nom de *faces*, dont l'une eſt ſupérieure, & l'autre inférieure. 2.° Que dans les douze Vertebres dorſales, de même que dans les cinq lombaires, ces faces ſont planes, au lieu que dans les Vertebres du Col la face inférieure eſt en quelque façon convexe, & la ſupérieure proportionnément concave. 3.° Que les corps de toutes les Vertebres tiennent fermement enſemble par une matiére en partie cartilagineuſe, & en partie ligamenteuſe, d'une ſtructure très-particuliére, aſſés ferme pour ſoûtenir toute la rangée de la colomne vertébrale, & aſſés ſouple pour rendre cette colomne plus ou moins fléxible ou pliante en différents ſens. 4.° Que les deux apophyſes inférieures ou deſcendantes de chaque Vertebre s'articulent avec les apophyſes ſupérieures ou aſcendantes de la Vertebre ſuivante, & que pour cet effet chacune de ces apophyſes a une facette encroûtée d'un cartilage très-poli, proportionnée à la facette cartilagineuſe de l'apophyſe qui s'articule avec elle ; de ſorte que ces facettes gliſſent très-aiſément les unes ſur les autres en différents ſens, en même temps que les corps ne font que prêter, moyennant l'élaſticité de leur ſymphyſe cartilagineuſe.

Il faut encore faire attention que dans la plûpart des Vertebres du Col, les facettes des apophyſes ſupérieures ſont

tournées obliquement en haut & en arriére, & que celles des apophyses inférieures sont tournées obliquement en bas & en devant. Dans les Vertebres du Dos les facettes des apophyses supérieures regardent presque directement en arriére, & celles des apophyses inférieures presque directement en devant. Ainsi dans le Col ces facettes se trouvent dans autant de plans distingués qu'il y a de Vertebres; au lieu que dans les Vertebres du Dos les facettes se trouvent pour la plûpart à peu-près ou comme dans un même plan. Enfin dans les Lombes, les facettes des apophyses supérieures de chaque Vertebre sont tournées les unes vers les autres, de maniére qu'elles se regardent mutuellement, & embrassent les facettes inférieures de la Vertebre voisine, qui sont proportionnément tournées dans un sens opposé.

L'articulation de ces quatre apophyses ont en tout temps partagé les Anatomistes. Les uns l'ont regardée comme une espece de ginglyme ou charniére, qu'ils ont appellée *imparfaite;* les autres l'ont rapportée à l'arthrodie ou articulation platte, & quelques-uns l'ont nommée *articulation en double genoû.* Je crois avoir remarqué le premier là-dessus une circonstance qui est particuliére à l'articulation de ces apophyses, & que je n'ai trouvée dans aucune des autres articulations de tout le Corps humain, soit que ces articulations soient en boule, ou, comme on dit, en genoû, soit qu'elles soient en coulisse, soit qu'elles soient en charniére.

On sçait que pendant les douze années de mes Exercices publics au Jardin Royal, j'ai plusieurs fois fait sentir sur le Sujet même l'impossibilité de charniére dans cette articulation. Mais n'ayant pas encore assés éxaminé la particularité dont je viens de parler, je n'ai pas poussé ma démonstration plus loin. Il est vrai que Vésale, dans son grand Ouvrage, a simplement dit, que cette articulation n'est pas ginglyme, comme Galien l'a crû, mais l'a dit sans en avoir donné aucune preuve; & comme il l'a rapportée à l'arthrodie ordinaire, il fait assés voir qu'il n'a pas fait attention à la circonstance particuliére dont il s'agit à présent, & dont voici l'exposé.

Dans toutes les autres articulations du Corps humain, l'un des os articulés est toûjours poussé & appuyé contre l'autre os par la contraction des muscles, & cela dans tous les degrés de mouvement & dans toutes les attitudes. Outre cela dans la situation verticale des os articulés, les uns pesent plus ou moins sur les autres, & les pressent indépendamment de l'impulsion faite par les muscles contractés. De plus on convient que quand on meut ou fait joüer l'articulation de deux os, le centre du mouvement se trouve toûjours près de leur portion ou extrémité la plus voisine de cette articulation, & que ce centre est éloigné de leur portion ou extrémité opposée. Par éxemple, dans l'articulation de l'Humerus avec l'Omoplate le centre du mouvement est près de la convéxité de la tête de l'Humerus & de la concavité de la tête de l'Omoplate; il est en même temps éloigné de la poulie de l'Humerus & de la base de l'Omoplate. C'est sur ce fondement qu'on a regardé les os articulés comme des leviers, & leurs articulations comme des points d'appui.

Ce n'est pas ainsi dans les articulations de l'Epine du Dos, excepté celle de la premiére Vertebre avec l'Os occipital, & en partie celle de la même Vertebre avec la seconde. Les articulations des quatre apophyses, dont il est question, sont disposées de façon que dans plusieurs mouvements du Col, du Dos, & des Lombes, les apophyses d'une Vertebre ne font que glisser très-légérement sur les apophyses voisines d'une autre Vertebre, sans s'entrepousser. Il y a même des mouvements dans lesquels non-seulement ces apophyses ne paroissent pas se toucher, mais elles paroissent encore s'écarter les unes des autres, ou tendre à cet écartement.

On comprend très-aisément ceci, en faisant attention que le centre du mouvement des Vertebres n'est pas dans leurs apophyses articulaires, ni auprès, mais uniquement dans la symphyse élastique de leurs corps. On le comprendra encore mieux par la structure particuliére de cette symphyse. Elle est principalement composée de plusieurs cerceaux cartilagineux, molasses, minces & larges en maniére de bandes,

placés les uns dans les autres, comme autour d'un centre commun, & posés de champ, de sorte que l'un de leur bord s'attache à la face supérieure d'un corps de Vertebres, & l'autre bord s'attache à la face inférieure d'un autre corps. Ces bandes ou cerceaux cartilagineux renferment dans leurs intervalles une matiére très-visqueuse, comme une espece de mucilage, & elles sont entourées d'une bande ligamenteuse fort composée, dont les fibres se croisent obliquement, & sont fortement attachées aux bords du corps de chaque Vertebre voisine.

Les bandes cartilagineuses se plient facilement selon leur largeur, dans les différentes infléxions des Vertebres. Ce n'est pas par tout leur contour qu'elles se plient ainsi, ce n'est que par la portion la plus voisine de la cavité de chaque infléxion. Il paroît néantmoins qu'elles peuvent aussi plier également par tout leur contour, sous le poids de la Tête, du Thorax, & des extrémités supérieures, sur-tout quand ces parties sont chargées de quelque fardeau pesant, ou qu'elles soient exposées à quelque résistance considérable. Par-là on pourra encore expliquer comment le corps de l'Homme s'accourcit après avoir été long-temps debout ou en marche, & comment il recouvre sa longueur après avoir été ensuite couché pendant un temps proportionné. La bande ligamenteuse empêche le trop d'écartement, & la rupture des bandes cartilagineuses du côté de la convéxité de l'infléxion des Vertebres; elle aide aussi à borner les mouvements de rotation d'une Vertebre sur l'autre.

Quand on éxamine avec attention, dans un Cadavre, le Col dépoüillé de ses muscles, on verra qu'en le courbant en devant, les cartilages du corps des Vertebres deviennent saillants, & paroissent comme autant de bourlets du côté de l'infléxion; ensuite si on redresse le Col, on verra disparoître ces bourlets. Enfin, si on contourne de côté & d'autre, comme sur un pivot, les Vertebres qui sont au-dessous de la seconde, on verra que les portions ligamenteuses qui couvrent les cartilages, forment des rides obliques, & plus ou moins

croisées, selon qu'on employe plus ou moins d'effort à ces mouvements réciproques.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que quand on s'incline en devant, alors les Vertebres, en approchant les unes des autres par la portion antérieure de leurs corps, font monter les deux apophyses inférieures d'une Vertebre plus haut que les apophyses supérieures de la Vertebre suivante, & en même temps s'en écarter. Au contraire quand on renverse l'Epine du Dos, alors les Vertebres s'approchent par la portion postérieure de leur corps, & font descendre en même temps les apophyses inférieures d'une Vertebre plus bas que les apophyses supérieures de l'autre Vertebre. Si l'on fait des infléxions latérales, les corps des Vertebres s'approcheront ensemble du côté de l'infléxion, & les apophyses articulaires du même côté se croiseront, en s'avançant les unes sur les autres, pendant que les apophyses articulaires de l'autre côté s'éloigneront les unes des autres.

Ainsi il est démontré par le mouvement naturel des Vertebres, que la connéxion naturelle de leurs apophyses articulaires en général, ni est, ni peut aucunement être en charniére; car pour cet effet il faudroit que le point d'appui ou le centre du mouvement fût aux apophyses articulaires, & alors pour mettre les Vertebres en mouvement, il faudroit que d'un côté les corps meurtrissent leurs cartilages, & que d'un autre côté ces cartilages se séparassent de leurs corps, ce qui ruineroit entiérement la symphyse des Vertebres.

Outre cette preuve tirée du mouvement naturel des Vertebres, j'en trouve encore une autre qui me paroît aussi pouvoir passer pour démonstration. Elle est fondée sur la seule conformation des apophyses articulaires, car pour peu qu'on l'examine avec soin, on est convaincu, ce me semble, qu'elle ne peut admettre ni assemblage en charniére, ni mouvement en charniére, même imparfaitement. On sçait que le mouvement en charniére est celui qui ne se fait qu'en deux sens opposés, comme autour d'un axe, & que dans le Corps humain, les ligaments tiennent lieu de cheville. Par rapport à

à l'assemblage, il est indifférent que chacune des deux pieces assemblées ait reciproquement des avances & des enfoncements, ou que l'une des deux ait seulement des avances & l'autre seulement des cavités; il suffit que leur conformation puisse permettre un assemblage convenable au mouvement en charniére, & permettre ce mouvement, sans déranger l'assemblage. Cela ne se trouve pas dans les apophyses articulaires des Vertebres. Elles sont, ou trop inclinées comme dans les Vertebres du Col, ou trop plattes, comme dans celles du Dos, ou trop courbes, comme dans celles des Lombes. J'en excepte toûjours les deux premiéres du Col; & à l'égard de la derniére du Dos, de même des premiéres des Lombes, dont les apophyses articulaires ont paru à quelques-uns avoir une conformation assés propre à charniére, j'en rendrai compte dans la suite.

Pour revenir aux directions de ces apophyses & à la différence de ces directions. Voici ce que j'ai crû avoir observé là-dessus dans les Vertebres du Col. Elles y sont très obliques, non-seulement par rapport au corps de chaque Vertebre, mais aussi par rapport à la rangée entiére de toutes ces Vertebres. Il m'a paru que si la direction de toute la rangée vertebrale du Col étoit semblable à la direction de tout le Corps de l'Homme considéré comme étant étendu, cette obliquité particuliére des apophyses, seroit un obstacle à quelques-uns des mouvements ordinaires du Col, & qu'elle en rendroit d'autres assés difficiles. Car alors on ne pourroit fléchir le Col sur le devant, sans trop écarter les apophyses articulaires d'une Vertebre des apophyses articulaires d'une autre, & sans forcer, ou peut-être rompre les ligaments qui les tiennent ensemble. On ne pourroit alors faire les infléxions latérales du Col, sans causer par-là le même inconvénient aux apophyses articulaires d'un côté, pendant que celles du côté opposé compriment trop, ou froissent les unes & les autres. Enfin dans une telle attitude ou direction droite de la rangée vertebrale du Corps, on ne pourroit pas faire les mouvements ordinaires en pivot; car alors les apophyses articulaires

de tout un côté du Col s'opposeroient les unes aux autres, & par-là empêcheroient le Col de se contourner vers l'autre côté. C'est ce que l'on peut expérimenter sur soi-même, en tenant le Col tout droit, roide & rengorgé, car on sentira que dans cette attitude contrainte, on ne peut pas tant tourner le Col, ni par conséquent la Tête comme dans l'attitude ordinaire.

Après avoir fait plusieurs recherches pour trouver le dénoüement de cette difficulté, je crois l'avoir rencontré dans la seule direction de toute la rangée vertebrale du Col. Cette direction est naturellement très-oblique dans l'Homme vivant. Car quand on se tient droit, debout ou assis, on trouvera l'extrémité supérieure de cette rangée vertebrale beaucoup plus avancée sur le devant de la Poitrine, que l'on ne se l'imagineroit par l'inspection d'un Squélete suspendu ou redressé sur un piédestal. Mais pour m'assûrer éxactement du degré de cette obliquité dans l'Homme vivant, où on ne peut voir ni toucher la premiére ou la seconde Vertebre, j'ai cherché parmi les parties voisines exposées à la vûë & au toucher, ce qui pourroit en donner la marque certaine, & je l'ai trouvé dans les deux apophyses mastoïdes de la Tête, qui se font assés sentir, même dans les Sujets les plus gras. En éxaminant ces apophyses dans un Crâne, si on tire une ligne droite du bord antérieur de l'une jusqu'au bord antérieur de l'autre, on verra que la partie moyenne de l'un & de l'autre Condyle occipital se trouve dans la même ligne, & par conséquent que les cavités supérieures de la premiére Vertebre, qui sont articulées avec ces Condyles, se trouvent aussi dans cette même ligne. Ainsi en se tenant droit, debout ou assis, on n'a qu'à appliquer derriére le bas de l'oreille, où on sent le bord antérieur de l'apophyse mastoïde, le bout d'un fil dont l'autre bout soit chargé d'un plomb, ou y poser verticalement un petit bâton droit, & par-là on peut juger sûrement de l'obliquité naturelle de la rangée vertebrale du Col.

En éxaminant l'attitude particuliére de chaque Vertebre selon cette obliquité générale de toute leur rangée, il m'a

paru, que dans plusieurs Vertebres les facettes de leurs apophyses articulaires sont situées presque horisontalement ou transversalement par rapport à la longueur du Corps de l'Homme, se tenant droit, debout ou assis, & que ces facettes sont placées les unes sur les autres dans des plans différents presque paralleles, à peu près comme les marches d'un escalier. Il m'a paru que cette attitude directe des apophyses obliques procurée par l'attitude oblique de la rangée vertebrale, facilite les mouvements de rotation du Col, en ce qu'elles ne font que glisser plus ou moins transversalement les unes sur les autres, sans s'entre-heurter. Il m'a encore paru que par cette attitude les apophyses articulaires se pourroient soûtenir les unes les autres dans certains cas, comme quand on porte des fardeaux sur la Tête, & qu'elles pourroient ainsi en décharger un peu les corps des Vertebres.

J'ai observé que dans quelques Sujets la rangée des trois premiéres Vertebres est comme redressée, & par-là donne au Col osseux une certaine courbure, qui est assés connuë, mais qui n'a pas été assés déterminée par rapport aux Vertebres qui la forment particuliérement. La seconde & la troisiéme Vertebre du Col ainsi redressées, leurs apophyses articulaires se rapprochent plus de la verticale, & peuvent par-là, ce me semble, faciliter les infléxions latérales du Col, quand on panche la Tête vers l'une ou l'autre épaule. Il semble même que plus on tient la Tête droite ou tant soit peu levée en arriére, sans néantmoins rengorger le Col, plus ces infléxions sont aisées. Il ne s'agit point du tout ici de l'articulation de la premiére Vertebre avec l'Os occipital. A l'égard des deux derniéres Vertebres du Col, la direction de leurs apophyses articulaires dégénérent, pour ainsi dire, peu à peu en celle des apophyses articulaires des Vertebres dorsales. Vésale a très-clairement fait cette derniére remarque.

On a déja observé que le peu de volume du corps des Vertebres du Col, joint à l'épaisseur & à la souplesse de leurs cartilages, donnent en général au Col la grande mobilité qu'il a au dessus des autres portions de toute la colomne vertébrale.

La conformation particuliére de ces corps, en ce qu'ils ſont échancrés en haut & ſaillants en bas, a été regardée comme une eſpece d'emboîtement propre à empêcher la luxation de ces Vertebres. Une telle idée ſatisferoit toûjours ceux qui ſe bornent à l'inſpection du Squélete, dont les Vertebres ſont dépoüillées de leur ſymphyſe. Mais un ſeul coup d'œil jetté ſur l'état naturel, dans lequel les corps de ces Vertebres ſont éloignés les uns des autres par leur ſymphyſe cartilagineuſe, en fait voir évidemment la fauſſeté, parce qu'on n'y trouve pas un emboîtement oſſeux. Il me paroît plûtôt que ces échancrures & ces ſaillies augmentent l'étendüe de la connéxion & de l'adhérence des cartilages avec les corps, & que ſans cette augmentation de ſurface ils auroient été trop ſujets à rupture ou à ſéparation par des efforts & des mouvements extraordinaires,



MANIERE DE FAIRE LE SUBLIMÉ CORROSIF EN SIMPLIFIANT L'OPERATION.

Par M. BOULDUC.

LA préparation du Vif-argent, qu'on appelle souvent tout court, & comme par excellence, du *Sublimé*, & quelquefois par distinction, du *Sublimé corrosif*, par rapport aux effets rongeants qu'il produit sur le corps, est devenüe une drogue nécessaire dans la matiére Médécinale, autant par rapport à elle-même, quand on l'employe seule ou dans quelques mélanges pour l'usage extérieur, que par rapport à quelques remedes que l'on en prépare ensuite, comme sont le Mercure doux, la Panacée mercurielle & autres, dont on se sert tous les jours intérieurement : & les Mémoires de l'Académie ont déja proposé plus de maniéres différentes de la faire, qu'aucun Livre de Chymie Latin ou François qui me soit connu. 6 Septembre 1730.

Cependant on a lieu de s'étonner, que parmi le grand nombre des Artistes, qui sont dans cette Ville & dans le reste du Royaume, il y en ait très-peu, & peut-être pas cinq ou six, qui veüillent se livrer à préparer cette drogue eux-mêmes ; les uns la prennent des Droguistes, les autres des colporteurs, & ces deux-ci s'en rapportent à la bonne foi des étrangers, dont ils la tirent. De quelque part pourtant qu'elle vienne, on fait, à mon avis, également mal de s'y fier, puisqu'il n'est que trop certain, qu'il se trouve des mains avides d'un gain criminel, qui la falsifient par le mélange de l'Arsenic, dont malheureusement nous n'avons point encore d'épreuve, qui pût d'avance nous faire distinguer sa présence; on n'en devient certain que par les funestes effets, & c'est trop tard.

Pour éviter la tromperie, & des événements fâcheux, il

seroit à souhaiter, que tous ceux, que leur profession engage à débiter des remedes au Public, n'en donnassent aucun de ceux qu'on tire du Sublimé ou par le Sublimé, à moins de les avoir faits de leurs propres mains. La sûreté des malades est inséparable de la bonté des remedes bien conduits.

Malgré la certitude de cette conséquence, la répugnance pour l'opération, dont il s'agit, est grande & presqu'invincible chés la plûpart des Artistes, & peut rouler sur différentes raisons : les uns aiment mieux acheter bon marché ce qui leur coûteroit davantage à faire chés eux ; d'autres craignent les vapeurs des Eaux fortes, qu'on respire avant & pendant l'opération ; & d'autres ont été révoltés par les inconvénients & les incommodités auxquelles la méthode la plus reçûë est encore sujette dans la sublimation. Cette méthode est, comme tout le monde le sçait, de mêler du Mercure, dissous par l'Eau forte & réduit en crystaux ou évaporé à siccité, avec du Vitriol calciné & du Sel commun décrépité ; de pousser ensuite ce mélange dans un Matras par un feu convenable.

Ayant fait cette opération tous les ans depuis ma jeunesse, j'y ai aussi trouvé quelquefois à redire : l'Eau-forte, en dissolvant d'abord le Mercure, & en s'exhalant encore après du col du Matras, quand il est sur le feu, jette des vapeurs desagréables & nuisibles, qui se répandent par-tout, quelque grand que soit le Laboratoire ; elles ont chassé plus d'une fois les auditeurs de l'Amphithéatre du Jardin du Roy ; outre cela, il arrive souvent, que nos Matras de verre crêvent ou au commencement ou vers la fin de l'opération, sur-tout, quand on veut faire plusieurs livres de Sublimé à la fois ; & par cet accident non seulement il se perd de la matiére, mais aussi l'Artiste court risque d'être maltraité par les vapeurs qu'elle exhale ; & enfin les trois Sels, qu'on employe, faisant un gros volume, ne permettent guéres au feu de les bien pénétrer ; ainsi il est rare, que la masse, qui reste au fond, comme un *caput mortuum*, soit entiérement épuisée de Mercure, & c'est apparemment ce qui a fait, qu'on a pris la coûtume de la jetter comme inutile.

Ces inconvénients m'ont souvent fait souhaiter de trouver une méthode plus commode & plus succincte pour ce travail, & y étant parvenu, je l'ai pratiquée depuis quelques années en mon particulier & en Public : quand on voudra la comparer avec celle, qui est la plus en usage, on s'appercevra aisément de la différence, qu'il y a de l'une à l'autre & pour les vaisseaux & pour l'Artiste. Enfin, croyant de mon côté l'avoir assés examinée, je ne hésite plus de la communiquer avec quelques circonstances, que l'on y peut remarquer, afin que ceux, qui voudront l'imiter, partagent avec moi la facilité & les avantages que j'y ai trouvés, & abandonnent dans la suite la répugnance de faire le Sublimé eux-mêmes, en considération des raisons alléguées au commencement.

Je verse sur autant de livres de *Vif-argent*, que je veux employer à la fois, pareil nombre de livres de bonne & forte *Huile de Vitriol*, dont je retire par la Cornüe le phlegme & la portion d'acide, qui ne peut pas rester uni avec le Mercure : l'Huile de Vitriol à l'aide du feu dissout le Mercure, & tous les deux font à la fin une *masse très-blanche*, que je pousse jusqu'au sec : je mêle promptement cette masse retirée de la Cornüe avec parties égales de *Sel commun*, le plus blanc que je puisse avoir, non pas décrépité, mais simplement séché dans quelque endroit chaud, & je pousse ensuite ce mélange au feu, à la maniére ordinaire, dans un Matras bien enterré dans le sable. Dans le commencement il monte un peu d'humidité en gouttes d'eau dans le col du Matras, après quoi le bouchon de papier prend une barbe de filets ou crystaux blancs ; alors j'augmente le feu, & j'ôte autour de la voûte du Matras le sable peu-à-peu & à mesure que je vois que le Sublimé s'y attache & s'augmente : quand je m'apperçois qu'il ne se sublime plus rien, j'ôte tout le sable d'alentour, & retire le vaisseau encore brûlant, afin qu'il crêvasse par la fraîcheur de l'air ; & dans un temps chaud je facilite ces crêvasses par un linge moüillé, dont je l'enveloppe, pour n'avoir pas besoin de le casser à force de coups, qui feroient retomber du Sublimé sur la matiére qui reste au fond.

Dès cette premiére opération j'ai un Sublimé bien blanc & cryſtallin par-tout, qui aux parois du vaiſſeau eſt épais & compact, & au dedans parſemé de cryſtaux formés en lames ou aiguilles applaties ; & la maſſe du fond eſt une poudre friable, qu'on détache facilement du verre : Si le Sel, que j'ai employé, a été net, cette poudre eſt griſâtre, & s'il a été un peu ſale, elle tire ſur le roux.

Dans ce procédé il n'y a point d'*Eau-forte,* & le Sublimé ne ſe fait pas moins bien; de plus, on évite le *Fer,* qui dans le Vitriol calciné, quand on l'employe, fait la moitié de ſon poids, & embaraſſe les matiéres, qui doivent agir les unes ſur les autres, de ſorte que l'opération ne ſe peut faire que lentement ; au lieu que les deux matiéres, dont je me ſers, ſe touchent immédiatement, & qu'étant plus aiſément pénétrées par le feu, elles agiſſent ſans obſtacle & avec plus de facilité les unes ſur les autres; auſſi l'opération eſt-elle achevée en une fois moins de temps, que ſuivant le procédé ordinaire.

L'*Huile de Vitriol,* qu'il faut employer, n'eſt pas toûjours également forte : ſi elle eſt bonne, elle diſſout ſon poids de Mercure; ainſi, ſi elle eſt foible, on en mettra davantage, ou, ce qui vaut mieux, on la déphlegmera auparavant.

Quelque forte ou déphlegmée que ſoit cette Huile, elle eſt ſans odeur ; auſſi la liqueur, qu'on retire dans le temps qu'elle diſſout le Mercure, a-t-elle toûjours paſſé pour un phlegme ou un eſprit foible : & en effet elle eſt très-foible au goût, légérement aigrelette & âpre, mais en récompenſe elle eſt d'une odeur de Soufre allumé ſi vive, que je n'en ai pas ſenti de pareille; c'eſt un *Eſprit de Vitriol des plus volatils:* & quoiqu'il paroiſſe preſque impoſſible, que les Auteurs, qui ont propoſé la diſſolution du Mercure par cette diſtillation, pour en faire du Turbith minéral, n'ayent apperçû cette *odeur,* il n'y en a pourtant pas un, que je ſçache, qui en faſſe mention; quoiqu'à mon avis, cette production ſoit la plus forte preuve, que le Mercure eſt chargé de matiére inflammable, qui eſt en état de changer l'acide vitriolique, fixe

& ſans odeur, en un eſprit des plus-vifs & volatils.

Si on ne veut pas employer cette liqueur dans des Remedes, où les Auteurs demandent ces ſortes d'eſprits, par la crainte qu'elle ne ſoit chargée de Mercure, on peut la garder pour pareille opération. Il eſt vrai qu'au bout de quelque temps elle perd entiérement ſa volatilité & vivacité, & rentre dans un état de fixité; mais dans quelque état qu'on la prenne, elle peut encore diſſoudre, à l'aide du feu, la moitié de ſon poids de Mercure.

Pour ce qui eſt de la *maſſe blanche,* qu'on retire de la Cornüe, il eſt bon de l'employer d'abord, ou du moins de la conſerver bien ſéche par rapport à l'acide vitriolique, qui s'y trouve des plus concentré, car pour peu qu'elle reſte à l'air, cet acide en attire l'humidité, la maſſe devient molle, & même avec le temps, toute fluide, ce qui rend ſon mêlange avec le Sel commun difficile à manier, outre qu'elle en fait promptement élever des vapeurs incommodes d'Eſprit de Sel, qui peut-être entraînent déja avec elles des parcelles de Mercure.

Pour peu qu'on faſſe réfléxion ſur ce qui a formé cette *maſſe blanche,* on s'étonnera du ſentiment erronné de *Van Helmont,* qui ſoûtient dans pluſieurs endroits de ſes ouvrages, qu'une livre de Mercure peut changer un grand nombre de livres d'Eſprit ou d'Huile de Vitriol (pluſieurs milliers, dit-il) en vrai *Alun,* & bien aiſément, *ſolo contactu,* il faut ſeulement que le Mercure les touche pour en faire de l'Alun. Mais outre que le Mercure reſteroit à jamais dans l'Huile de Vitriol ſans un effet réciproque, ſi la chaleur du feu n'aidoit cet acide à le pénétrer, & à réduire les deux en une conſiſtance ſaline; nous avons des moyens aiſés de diſſoudre de nouveau leur union, & d'en revivifier le Mercure, ſoit par le Sel de Tartre, par la limaille de Fer, ou par le régule d'Antimoine, &c. & l'opération, que je propoſe, eſt encore une preuve convaincante de leur combinaiſon : On voit là, que l'acide vitriolique, qui étoit concentré dans la maſſe blanche, abandonnant le Mercure, ſaiſit l'alkali du Sel commun, &

en dégage l'Eſprit, lequel trouvant le Mercure abandonné, bien diviſé, & comme préparé exprès pour lui, le ſaiſit à ſon tour; les deux premiers s'arrêtent au fond, & les deux autres s'élevent, bien unis, en Sublimé corroſif, qu'on ne fera jamais avec de l'Alun & du Sel, & il y a de l'apparence que la ſeule blancheur de nôtre Vitriol mercuriel a ébloüi le Philoſophe au point, qu'il l'a pris pour de l'Alun.

A l'égard du *Sel commun*, qui eſt indiſpenſablement néceſſaire pour nôtre opération, je ne le fais point décrépiter, mais ſeulement bien ſécher. La décrépitation lui fait perdre de ſon acide, & met par-là une portion de ſa terre alkaline à nud, qui abſorbe alors de l'acide vitriolique, uni au Mercure, dont une portion devient ainſi libre & ſe revivifie.

Si le Sel commun n'eſt pas bien ſec, on peut mettre une once à deux de plus pour chaque livre, qu'on en employe.

Enfin le *Réſidu*, qu'on trouve après la ſublimation comme une poudre friable au fond, contient un Sel, qui ne mérite pas d'être jetté : on peut diſſoudre cette poudre, & filtrer l'eau; il reſte peu de terre en arriére; & la diſſolution expoſée à ſe cryſtalliſer fournit un auſſi bon Sel & en auſſi beaux cryſtaux, que ſi on l'avoit fait immédiatement & exprès par l'Huile de Vitriol & le Sel commun.

Il eſt pourtant de la prudence de l'Artiſte de bien pourvoir à la pureté de ce Réſidu, c'eſt, *qu'il ſoit bien épuiſé de Mercure*. Pour s'en aſſûrer, on peut voir, ſi l'Huile de Tartre par défaillance précipite quelque choſe de jaune de ſa diſſolution, ou ſi une lame de cuivre, trempée dedans, en blanchit, ou, pour accourcir, ſi un peu de ce Réſidu ſec, frotté ſur un morceau de cuivre poli & moüillé, lui imprime de la blancheur? En ce cas on ne ſçauroit mieux faire que de calciner le tout un peu vivement ſous une cheminée, ou plûtôt dans une place ouverte pour en diſſiper ce qui y peut reſter de Mercure; après quoi on n'a rien à craindre pour le Sel, qu'on en retire.

EXAMEN DES LIGNES DU QUATRIÉME ORDRE.

SECONDE PARTIE DE LA SECTION I.

Dans laquelle on traite en général des Lignes du 4me ordre qui ont des points doubles.

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON a vû dans la premiére Partie de cette Section, que les Lignes Algébriques sont susceptibles de différentes especes de points simples & de différentes especes de points multiples, selon qu'elles sont d'un ordre plus ou moins élevé; J'ai tâché d'y développer une Méthode générale, pour discerner si un point donné sur une Ligne algébrique quelconque est simple ou multiple, & de quelle espece de multiplicité il est. Il s'agit maintenant de faire l'application de cette Méthode aux Lignes du 4me ordre, dont les unes peuvent avoir des points doubles de toutes les especes, comme on l'a démontré dans les art. 37 & 56, les autres un point triple formé par l'intersection commune de trois branches de la même Courbe, ou par le rebroussement de deux branches par lequel il en passe une troisiéme, ou enfin par l'adhésion d'une Ovale infiniment petite sur une des branches de la Courbe, cas singulier dont j'ai fait voir la possibilité dans les art. 59 & 60 du Mémoire précédent. Nous ne parlerons dans celui-ci que des points doubles, & nous renverrons à une troisiéme Partie tout ce qui concerne les points triples des Lignes du 4me ordre, le champ étant trop vaste pour pouvoir être parcouru avec quelque exactitude dans un seul Mémoire.

Il faut se souvenir qu'on a donné dans l'art. 31 du premier Mémoire une Equation générale pour toutes les Lignes du 4me ordre, soit qu'elles s'étendent à l'infini, soit qu'elles

rentrent en elles-mêmes ; celles que l'on va donner ici, la premiére pour les Lignes du 4me ordre, qui ont un point double à l'origine de leur axe, la seconde pour celles qui ont deux points doubles sur leur axe, & la troisiéme pour celles qui ont trois points doubles, conviennent aussi aux Lignes de cet ordre, qui s'étendent à l'infini, & à celles qui rentrent en elles-mêmes, & l'on en fait l'application aux unes & aux autres par des exemples choisis parmi le grand nombre de Lignes dont le 4me ordre est composé.

Enfin les Lignes du 4me ordre étant susceptibles des trois especes de points doubles d'intersection, comme on l'a démontré dans l'art. 37, après avoir donné des regles pour reconnoître le point d'intersection d'avec le point de rebroussement & le point conjugué, il a fallu en donner, pour reconnoître parmi les points d'intersection des Lignes du 4me ordre, ceux qui étoient de la 1re, 2de ou 3me espece ; c'est ce qu'on a éxecuté à la fin de cette seconde Partie, que l'on termine enfin par démontrer qu'une Courbe du 4me ordre ne sçauroit jamais avoir plus de trois points doubles.

J'aurois pû commencer mon Mémoire par cette derniére Proposition, & donner en même temps plusieurs nouveaux Théoremes sur les Lignes algébriques des ordres supérieurs au quatriéme : Théoremes qui font voir une analogie parfaite entre les Lignes algébriques & les points multiples dont elles sont susceptibles ; par exemple, on auroit pû démontrer ici, 1.° Qu'une Ligne du 6me ordre ne sçauroit jamais avoir plus de trois points triples ; Qu'une Ligne du 8me ordre ne sçauroit avoir plus de trois points quatruples ; Qu'une Ligne du 10me ordre ne sçauroit avoir plus de trois points quintuples ; Enfin qu'une Ligne d'un ordre pair, exprimé par n, ne sçauroit avoir plus de trois points multiples, dont la multiplicité soit exprimée par $\frac{n}{2}$.

2.° On auroit pû démontrer ici, à l'égard des Lignes d'un ordre impair, que celles du 3me ordre, qui ont un point double, ne sçauroient avoir d'autres points multiples. Que

celles du 5me ordre, qui ont un point triple, ne peuvent avoir plus de trois points doubles. Que celles du 7me ordre, qui ont un point quadruple, ne peuvent avoir plus de trois points triples. Que celles du 9me ordre, qui ont un point quintuple, ne ſçauroient avoir plus de trois points quadruples, & ainſi des autres Lignes d'un ordre impair à l'infini. Mais la démonſtration de ces Théoremes m'auroit trop écarté de mon ſujet, je me réſerve de la donner dans quelque Ecrit détaché: continuons donc l'éxamen des Lignes du 4me ordre, ſans pouſſer plus loin la Théorie générale des Lignes algébriques d'un ordre ſupérieur. C'eſt ce que l'on trouvera dans ce ſecond Mémoire, dont les articles doivent ſuivre le même ordre que ceux du Mémoire précédent, puiſqu'il n'en eſt que la ſuite.

PROPOSITION III.

THEOREME.

LXI. *Toutes les Lignes du 4me ordre, telles que* MGDGmZEV*, *ou* MGmZEV*, *ou* MDmZEV*, *dont la nature eſt exprimée par l'équation générale marquée ici par* (10), *dans laquelle l'indéterminée* (z) *exprime les abſciſſes* GQ, *& les indéterminées* (u), *les ordonnées* QM, *ont un point double à l'origine* G *de leur axe.* * Fig. 41. * Fig. 42. * Fig. 43.

$$(10)\ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times uu + \overline{Ez^3 + Fzz + Gz} \times u + Kz^4 + Lz^3 + Mzz = 0.$$

DÉMONSTRATION.

Lorſque le point *Q* tombe en *G*, alors *z* étant $=0$, l'égalité marquée par *(L)* dans l'art. 49, eſt telle qu'on la voit ici,

$$(L)\ldots \Delta u^4 + Au^3 + Du^2 = 0.$$

Cette égalité ayant deux racines égales & de même ſigne, qui ſont $u=0$ & $u=0$, il eſt viſible qu'il y a au point *G* deux ordonnées égales & de mêmes ſignes. Mais quand l'ordonnée *QM(u)* eſt $=0$, l'égalité marquée par *(A)* dans l'art. 49, qui donne les valeurs des abſciſſes *GQ(z)*, lorſque

les ordonnées $QM(u)$ sont $=0$, est telle qu'on la voit ici.

$$(A)\ldots Kz^4 + Lz^3 + Mzz = 0.$$

Cette seconde égalité ayant encore deux racines égales & de mêmes signes, sçavoir $z=0$ & $z=0$, il est visible qu'il y a au point G, non seulement deux ordonnées égales & de mêmes signes, comme on vient de le voir, mais encore deux abscisses égales & de mêmes signes, qui sont $z=0$ & $z=0$; donc* il doit y avoir en G un point double de la courbe $MGDGmZEV$, ou $MGmZEV$, ou $MDmZEV$, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par (10).

* Art. 51.

Mais les coëfficients $\Delta, Q, A, B, C, D, E, F, G, K, L, M$, de l'équation (10) étant des coëfficients indéterminés, quoique constants, qui portent avec eux leurs signes $+$ & $-$, il est évident que l'équation marquée par (10) exprime la nature de plusieurs lignes du 4me ordre; & comme les différentes valeurs de ces coëfficients ne changent rien à la présente démonstration, il est visible que cette démonstration convient à toutes les Courbes, dont la nature peut être exprimée par l'équation (10), & par conséquent que toutes ces courbes ont un point double à l'origine G de leur axe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

LXII. Donc toutes les lignes du 4me ordre, dont la nature est exprimée par l'équation marquée ici par (20) ont un point double à l'origine G de leur axe.

$$(20)\ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times u^2$$
$$+ \overline{Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}zz + Gz} \times u + Kz^4$$
$$+ 2\sqrt{MK}z^3 + Mzz = 0.$$

Car l'abscisse (z) étant $=0$, on aura toûjours l'égalité $\Delta u^4 + Au^3 + Du^2 = 0$, & l'indéterminée (u) étant $=0$, on aura toûjours l'égalité $Kz^4 + 2z^3\sqrt{KM} + Mz^2 = 0$; d'où il suit qu'au point G, ou $z=0$, on aura, comme dans

l'article précédent, deux valeurs de l'indéterminée (u) réelles, & l'une & l'autre $= 0$, & deux valeurs de l'indéterminée (z) réelles, & l'une & l'autre $= 0$; ainsi le point G sera, comme dans l'article précédent, un point double auquel l'axe GQ & l'ordonnée principale GL seront sécantes. Donc, &c.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

LXIII. *Toutes choses demeurant les mêmes comme dans la Proposition précédente, déterminer si le point double* G *de la courbe* MGDmZEV *dont la nature est exprimée par l'équation* (10), *déterminer si ce point double* G *est fait par l'intersection de deux branches de la courbe*, ou s'il est un point de rebroussement*, ou enfin s'il est un point double invisible sur le plan, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite conjuguée*.* * Fig. 41. * Fig. 42. * Fig. 43.

SOLUTION.

On cherchera d'abord quel est le rapport du (du) au (dz) dans tous les points doubles de la courbe $MGDGmZEV$, en différentiant deux fois * son équation marquée par (10) (dans l'exposé de la Proposition précédente); cette double différentiation donnera l'équation irrationnelle que l'on voit ici marquée par Σ. * *Art. 46.*

$$\Sigma \ldots \left\{ \begin{matrix} +6\Delta u^2 \\ +3Qzu \\ +3Au \\ +Bzz \\ +Cz \\ +D \end{matrix} \right\} du^2 \quad \begin{matrix} +3Qu^2 \\ +4Bzu \\ +2Cu \\ +3Ez^2 \\ +2Fz \\ +G \end{matrix} \left\} dz\,du \quad \begin{matrix} +Bu^2 \\ +3Euz \\ +Fu \\ +6Kz^2 \\ +3Lz \\ +M \end{matrix} \right\} dz^2 = 0.$$

On rendra cette équation différentielle propre au point double G, en y substituant, au lieu des indéterminées (z) & (u), leurs valeurs en ce point double G, qui sont * $z = 0$ & $u = 0$, ainsi l'équation Σ deviendra $D\,du^2 + G\,dz\,du + M\,dz^2 = 0$, d'où l'on tirera par le calcul ordinaire $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$. * *Art. 61.*

Cela posé, je dis que ces deux valeurs $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, & $-\frac{du}{dz} = \frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, feront connoître si le point double G est un point d'interfection de deux branches de la courbe
* Fig. 41. $MGDGmZEV$*; ou s'il est un point de rebroussement
* Fig. 42. de la courbe $MGmZEV$*, ou bien s'il est un point double
* Fig. 43. invisible de la courbe $MDmZEV$*. Car si l'on prend sur l'axe GQ le point Π, tel que $G\Pi = 2D$, & sur l'ordonnée principale GL le point Λ, tel que $G\Lambda = G$: si sur cette même ordonnée principale GL, de part & d'autre du point Λ, on prend les parties $\Lambda\theta$ & $\Lambda\Phi$ égales l'une & l'autre à $\sqrt{GG-4DM}$: si l'on joint les points Π & θ, Π & Φ, par les droites $\Pi\theta$, $\Pi\Phi$; & enfin si par le point double G, on tire les droites GT, Gt, paralleles à $\Pi\theta$, $\Pi\Phi$, il est évident, par la doctrine des tangentes, que ces droites GT, Gt, feront les tangentes de la courbe au point double G. Or il est visible qu'il peut arriver trois différents cas : car 1.° si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, sont des grandeurs réelles & inégales, ou bien réelles & égales, mais de différents signes, il est clair que les deux tangentes GT, Gt, feront réelles & distinctes l'une de l'autre. 2.° Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, sont réelles, égales & de mêmes signes, les deux droites $G\theta$, $G\Phi$, se confondront, & par conséquent les deux tangentes GT, Gt, tomberont l'une sur l'autre, & ne feront plus qu'une même tangente. 3.° Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ sont imaginaires, les deux droites $G\theta$, $G\Phi$, feront imaginaires, &

& par conséquent les deux tangentes GT, Gt. Mais dans le premier cas, y ayant deux tangentes * qui se coupent au point G, il doit y avoir deux branches de la courbe qui passent en G; donc le point double G sera un point d'intersection, lorsque les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ sont des grandeurs réelles & inégales, ou des grandeurs réelles & égales, mais de différents signes; Dans le second cas, les deux tangentes se confondant en une, le point double G sera un point de rebroussement *, ou une osculation, ou bien une Lemniscate infiniment petite conjuguée; Enfin dans le troisiéme cas, les deux tangentes GT, Gt, étant imaginaires, le point double G, quoique réel, & faisant partie de la courbe, n'aura point de tangente, & sera par conséquent un point double invisible sur le plan *, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite conjuguée. Donc par le moyen de l'équation $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$, on déterminera la nature du point double G, dont on connoît l'éxistence & la position par la proposition précédente. *Ce qu'il falloit trouver.*

* Art. 52.

* Art. id. Voyés ce qui est dit ensuite sur les Osculations & les Lemniscates infinim. petites.

* Art. 52. & 59.

COROLLAIRE.

LXIV. Donc 1.° lorsque dans l'équation *(10)* * les coëfficients D & M sont affectés de signes contraires, le point double G est un point d'intersection de deux branches finies ou infinies de la courbe $MGDGmZEV$; car il est visible que l'expression $\pm\sqrt{GG - 4DM}$ marque alors des grandeurs réelles & de différents signes. 2.° Lorsque dans la même équation marquée par *(10)* * les coëfficients D & M sont affectés du même signe, si $GG > 4DM$, le point double G est encore un point d'intersection : mais si $GG = 4DM$, ce point double G est un point de rebroussement,

* Art. 61.

* Art. id.

ou une osculation, ou bien une Lemniscate infiniment petite conjuguée : & si $GG < 4DM$, le point double G est un point conjugué, c'est-à-dire, un point double invisible sur le plan ; car dans le premier cas les expressions $\pm\sqrt{GG - 4DM}$ marquent des grandeurs réelles & de différents signes : dans le second cas, ces expressions sont égales à zero, & par conséquent l'on a $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm o$: dans le troisiéme cas, les expressions $\pm\sqrt{GG - 4DM}$ sont l'une & l'autre imaginaires.

EXEMPLE I.

* Fig. 41. LXV. Soit un triangle* quelconque $G\Pi\Lambda$, dont les trois côtés $G\Pi\ (b)$, $G\Lambda\ (c)$ & $\Pi\Lambda\ (a)$, sont donnés ; si l'on prolonge indéfiniment de part & d'autre du point G les deux côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, de ce triangle, & que l'on prenne la droite $G\Pi$ pour l'axe, & la droite $G\Lambda$ pour l'ordonnée principale d'une courbe $MGDGmZEV$, dans laquelle le rapport des ordonnées $QM\ (u)$ aux abscisses $GQ\ (z)$ soit exprimé par l'équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 - \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}gfb^2zz + c^2b^2z^2 = o$, dans laquelle on

* Art. 61. suppose $f > 2g$; il est visible, par la troisiéme Proposition*, que cette courbe a un point double à l'origine G de son axe GQ & de son ordonnée principale GL ; car quand $GQ\ (z) = o$, on a $\overline{QM}^2\ (uu) = o$: de plus $QM\ (u)$ étant $= o$, il vient $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}gfb^2z^2 - c^2b^2z^2 = o$, d'où l'on tire $zz = o$, & $\frac{1}{4}a^2zz + \frac{1}{3}afbz + \frac{1}{3}agbz + \frac{1}{2}gfbb - ccbb = o$: or les deux premiéres égalités font

* Art. 61. connoître* que les droites GQ, GL, sont l'une & l'autre sécantes de la courbe $MGDGmZEV$ en un point double G.

* Art. 63. Mais, par la quatriéme Proposition * & le Corollaire qui la suit, il est clair que ce point double G est un point d'intersection de deux branches de la courbe $MGDGmZEV$, qui se coupent en G : car en comparant les coëfficients de l'équation générale marquée par (10) dans l'art. 61, avec ceux de

l'équation particulière $b^4u^2+2cb^3zu-\frac{1}{4}a^2z^4-\frac{1}{3}afbz^3$ $-\frac{1}{3}agbz^3-\frac{1}{2}gfb^2zz+c^2b^2z^2=0$, on a $\Delta=0$, $Q=0$, $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=b^4$, $E=0$, $F=0$, $G=2cb^3$, $K=-\frac{1}{4}a^2$, $L=-\frac{1}{3}ab\times\overline{f+g}$, $M=\frac{2ccbb-gfbb}{2}$, ensorte qu'au point double G le rapport de (du) à $dz)$, c'est-à-dire, $\frac{du}{dz}\left(-\frac{G}{2D}\pm\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}\right)$ $=-\frac{c}{b}\pm\frac{1}{2b^4}\sqrt{4c^2b^6-4c^2b^6+2b^6gf}=-\frac{c}{b}$ $\pm\frac{1}{2b}\sqrt{2gf}$; or ces deux valeurs $-\frac{2c+\sqrt{2gf}}{2b}$ & $-\frac{2c-\sqrt{2gf}}{2b}$ étant réelles & inégales, font connoître * que le point double G est un point d'interſection de deux branches MGD, mGD. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.* * Art. 63.

COROLLAIRE.

LXVI. Ainſi en prenant ſur l'axe la partie $G\Pi=b$, ſur l'ordonnée principale GL la partie $G\Lambda=c$, & ſur cette même ordonnée principale, de part & d'autre du point Λ, les portions $\Lambda\theta$, $\Lambda\Phi$, égales l'une & l'autre à $\frac{\sqrt{gf}}{\sqrt{2}}$, les droites $\theta\Pi$, $\Phi\Pi$, ſeront paralleles aux deux tangentes de la courbe au point double G.

EXEMPLE II.

LXVII. Les mêmes choſes étant ſuppoſées comme dans l'Exemple précédent, ſoient encore pris les côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, du triangle $G\Pi\Lambda$, prolongés autant qu'il ſera néceſſaire, le premier pour l'axe des (z), le ſecond pour l'axe des (u), c'eſt-à-dire, pour l'ordonnée principale d'une courbe $MGmZEV$*, dont la nature eſt exprimée par l'équation b^4u^2 * Fig. 42. $+2cb^3zu-\frac{1}{4}a^2z^4-\frac{1}{3}afbz^3+c^2b^2z^2=0$, il eſt viſible, par la troiſiéme Propoſition *, que cette courbe a * Art. 61. un point double à l'origine G de ſon axe GQ & de ſon or-

donnée principale GL. Car quand GQ (z) $= 0$, on a $\overline{QM}$ (uu) $= 0$, & la valeur de $u = 0$, étant substituée dans l'équation, il vient $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 - c^2b^2z^2 = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$ & $\frac{1}{4}aazz + \frac{1}{3}afbz - c^2b^2 = 0$; or les deux premiéres égalités $uu = 0$ & $zz = 0$ font connoître qu'il y a au point G deux ordonnées égales & deux abscisses égales, & par conséquent que les droites GL, GQ, sont l'une & l'autre sécantes de la courbe $MGmZEV$ en un point double G. Mais, par la quatriéme Proposition & les Corollaires qui la suivent, il est évident que ce point double G est ici un point de rebroussement : car comparant chaque terme de l'équation donnée, dans cet exemple, avec celui qui lui correspond dans l'équation générale de l'art. 61, on a $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = -\frac{1}{3}afb$, $M = ccbb$, ensorte qu'au point double G le rapport de (du) à dz, c'est-à-dire, $\frac{du}{dz}$ $(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})$ est $= -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b^4}\sqrt{4ccb^6 - 4ccb^6} = -\frac{c}{b} \pm 0$, ce qui fait voir que les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ & $-\frac{G}{2D} - \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$, sont deux racines réelles, égales & de mêmes signes, & par conséquent * que le point double G est un point de rebroussement. Donc avant de supposer la courbe tracée sur le plan, on connoît par son équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + c^2b^2z^2 = 0$, que cette courbe a un point de rebroussement à l'origine G de son axe. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

* *Art.* 63.

COROLLAIRE.

LXVIII. Donc en prenant sur l'axe GQ la partie $G\Pi = b$, & sur l'ordonnée principale la partie $G\Lambda = c$, si l'on joint les points Π & Λ, & que par le point G on tire la droite GP parallele à $\Lambda\Pi$, cette droite GP sera tangente de la courbe $MGmZEV$ au point de rebroussement G.

EXEMPLE III.

LXIX. Les mêmes choses étant supposées comme dans le premier Exemple *, à l'exception de ce qu'il y a ici de * *Art. 65.* particulier, soit une courbe $MDmZEV$*, dont le rapport * Fig. 43. des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par l'équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}fgb^2z^2 + c^2b^2zz = 0$, dans laquelle $f > g$; il est visible, par la troisiéme Proposition *, que cette courbe a un point * *Art. 61.* double à l'origine G de ses abscisses & de ses ordonnées. Car quand GQ $(z) = 0$, on a $uu = 0$, & cette valeur $(u = 0)$ étant substituée dans l'équation donnée, on a $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 - \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}fgb^2zz - ccbbzz = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$ & $\frac{1}{4}a^2zz + \frac{1}{3}afbz - \frac{1}{3}agbz - \frac{1}{2}fgbb - ccbb = 0$; or les deux premiéres équations $uu = 0$ & $zz = 0$ font connoître qu'il y a en G, origine de l'axe, deux abscisses égales & deux ordonnées égales entre elles, & par conséquent que l'axe GQ & l'ordonnée principale GL sont l'une & l'autre sécantes de la courbe, en deux points, à leur origine G; donc cette origine G est un point double de la courbe $MDmZEV$, dont la nature est exprimée par l'équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}fgb^2zz + c^2b^2zz = 0$. Mais par la quatriéme Proposition * & les Corollaires qui la suivent, il est évident que * *Art. 63.* ce point double G est ici un point double invisible sur le plan, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite; car les coëfficients de l'équation marquée (10)* étant ici $\Delta = 0$, $Q = 0$, * *Art. 64.* $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = \frac{agb - afb}{3}$, $M = \frac{fgbb + 2ccbb}{2}$, on voit que les coëfficients D & M sont affectés des mêmes signes, & que GG $(4c^2b^6) < 4DM$ $(2fgb^6 + 4c^2b^6)$, ensorte que $\pm\sqrt{GG - 4DM} = \pm\sqrt{-2fgb^6} = \pm b^3\sqrt{-2fg}$ sont des expressions imaginaires; d'où il suit que les deux racines $\frac{du}{dz} = (-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})$

$= -\frac{e}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{-2fg}$ ſont imaginaires, & par conſéquent que le rapport du (du) au (dz), au point double G, eſt un rapport imaginaire. Donc quoique ce point double G ſoit un point de la courbe (puiſque le rapport des coordonnées (z) & (u) y eſt réel) elle n'y a pas de tangente. Donc* ce point double G eſt un point double inviſible, ou, ce qui eſt la même choſe, une ovale infiniment petite conjuguée. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

* Art. 63.

REMARQUES.

LXX. N'ayant pas établi tous les principes généraux qui ſervent à la connoiſſance des lignes du 4me ordre, ce n'eſt pas encore ici le lieu de faire connoître les différentes propriétés des trois courbes dont nous venons de parler dans les Exemples précédents; cependant il ne ſera pas hors de propos de faire remarquer en paſſant, 1.° Que ces trois courbes* ſont compoſées de quatre branches infinies, dont il y en a deux qui s'étendent du côté des (z) poſitifs, & deux autres qui s'étendent du côté des (z) négatifs. 2.° Qu'en tirant par le point G la droite GP, parallele au troiſiéme côté $\Pi\Lambda$ du triangle $G\Pi\Lambda$, & prolongée indéfiniment de part & d'autre du point G, cette droite GP coupe en deux portions égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement à l'ordonnée principale GL, & terminées de part & d'autre par la courbe, enſorte que cette droite GP eſt le diametre de la courbe.

* Fig. 41. 42. & 43.

A l'égard du premier Exemple*, on peut remarquer, 1.° Qu'en prenant ſur le diametre GP, du côté où les (z) ſont négatifs, le point B, tel que GB ſoit $= \frac{2}{3} \times \overline{g+f}$, & ſur ce même diametre, de part & d'autre du point B, les parties BD, BE, égales l'une & l'autre à $\frac{1}{3}\sqrt{4gg-10fg+4ff}$, les points D & E feront les points de la courbe $MGDGmZEV$ auxquels les tangentes ſont paralleles à l'ordonnée principale GL.

* Fig. 41.

2.° Que toutes les droites, comme BC, menées parallc-

lement à cette même ordonnée principale GL entre les points D & E, ne rencontreront la courbe en aucun point. Mais que toutes les droites, comme Mm & ZV, menées parallelement à cette même ordonnée principale [les premiéres au de-là du point D du côté des (z) positifs, les autres au de-là du point E du côté des (z) négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelques distances qu'elles soient du point G, ensorte que les deux portions $MGDGm$, ZEV, de cette courbe seront séparées l'une de l'autre de la distance $DE = \frac{2}{3}\sqrt{4gg - 10fg + 4ff}$.

3.° Si l'on prend sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point F, tel que GF soit $= g$; si par ce point F on tire la droite IFK parallele à l'ordonnée principale GL, & si l'on prend sur cette droite IFK, de part & d'autre du point F, les portions FI, FK, égales l'une & l'autre à $\frac{g\sqrt{fg - gg}}{2a\sqrt{3}}$, les points I & K seront les points de la courbe auxquels les tangentes $I2$, $K3$, sont paralleles au diametre GP, ensorte que FI & FK sont les *maxima* du *folium* $GIDKG$.

4.° Toutes les droites menées parallelement au diametre GP, entre les tangentes $I2$, $K3$, rencontreront la courbe en quatre points, dont il y en aura toûjours deux entre les droites BC, GL, un au de-là de GL, & le quatriéme au de-là de BC; Mais les droites, comme Mz, menées parallelement à ce diametre GP au dessus de la droite $K3$, ou au dessous de la droite $I2$, telles que mv, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels sera au de-là de la droite GL, du côté des (z) positifs, & l'autre au de-là de la droite BC, du côté des (z) négatifs.

5.° Si l'on prend sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point H, tel que GH soit double de GB; si par le point H on tire parallelement à l'ordonnée principale GL une droite HZ prolongée de part & d'autre du point H jusqu'à ce qu'elle aille rencontrer en Z & en V les tangentes GT, Gt, du point double G, prolongées autant

qu'il ſera néceſſaire, je dis que ces points Z & *V* ſeront les points où ces tangentes *GT*, *Gt*, rencontreront la portion de courbe *ZzEuV*, enſorte que le *folium GIDKG* ſe trouvera tout entier dans le triangle *GZV*.

* Fig. 42. A l'égard du ſecond Exemple *, on peut remarquer, 1.° Qu'en prenant ſur le diametre *GP*, du côté où les *(z)* ſont négatifs, le point *E*, tel que *GE* ſoit $= \frac{4}{3}f$, ce point *E* ſera le point de la courbe *MGmZEV* auquel la tangente eſt parallele à l'ordonnée principale *GL*.

2.° Que toutes les droites, comme *BC*, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points *E* & *G*, ne rencontreront la courbe en aucun point ; mais que toutes les droites, comme *Mm*, *ZV*, menées parallelement à cette même ordonnée principale *GL* [les premiéres au de-là du point *G*, du côté des *(z)* poſitifs, les autres au de-là du point *E*, du côté des *(z)* négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelque diſtance qu'elles ſoient du point *G*, enſorte que les deux portions infinies *MGm* & *ZEV* de cette courbe ſeront ſéparées l'une & l'autre de la diſtance $GE = \frac{4}{3}f$.

3.° Que toutes les droites, comme *MZ*, menées parallelement au diametre *GP*, & de part & d'autre de ce diametre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un deſquels ſera au de-là de la droite *GL*, du côté des *(z)* poſitifs, l'autre au de-là de la droite *BC*, du côté des *(z)* négatifs.

* Fig. 43. A l'égard du troiſiéme Exemple *, on peut remarquer, 1.° Qu'en prenant ſur le diametre *GP*, du côté où les *(z)* ſont négatifs, le point *B*, tel que *GB* ſoit $= \frac{2}{3} \times \overline{f - g}$, & ſur ce même diametre, de part & d'autre du point *B*, les portions *BD*, *DE*, égales l'une & l'autre à $\frac{1}{9}\sqrt{4gg + 10fg + 4ff}$, ces points *D* & *E* ſeront les points de la courbe *MDmZEV* où les tangentes ſeront paralleles à l'ordonnée principale *GL*.

2.° Que toutes les droites, comme *BC*, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points *D* & *E*, ne

ne rencontreront la courbe en aucun point, excepté la droite *GL*, qui passera par le point double invisible, ou ovale infiniment petite *G*; mais que toutes les droites, comme *Mm*, *ZV*, menées parallelement à cette même ordonnée principale *GL*, les premiéres au de-là du point *D*, du côté des (z) positifs, les secondes au de-là du point *E*, du côté des (z) négatifs, rencontreront toûjours la courbe en deux points, à quelque distance qu'elles soient du point *G*, ensorte que les deux portions infinies *MDm*, *ZEV*, de cette troisiéme courbe seront séparées & distantes l'une de l'autre de la grandeur $DE = \frac{2}{3}\sqrt{4gg + 10fg + 4ff}$.

3.° Que toutes les droites, comme *MZ*, menées parallelement au diametre *GP*, & de part & d'autre de ce diametre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels, comme *M*, sera au de-là de la droite *GL*, du côté des (z) positifs, l'autre au de-là de la droite *BC*, du côté des (z) négatifs.

PROPOSITION V.

THEOREME.

LXXI. *Si les indéterminées* (z) *&* (u) *de l'équation marquée ici par* (20) *représentent la premiére les abscisses* GQ, *la seconde les ordonnées* QM *d'une ligne du* 4me *ordre* MGDGARCRm*, *dont la nature soit exprimée par l'équation* (20) *(qui ne differe de celle de l'art. 61, marquée par* (10), *qu'en ce que les coëfficients indéterminés* F *&* L *sont ici déterminés à être l'un* $F = \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, *l'autre* $L = 2\sqrt{KM}$): *je dis que cette ligne a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine* G *des abscisses, l'autre en un point* R *distant du point* G *de la grandeur* $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. * Fig. 44. 45. 46. & 47.

$(20) \ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times u^2$

$$+ Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}} zz + Gz \times u + Kz^4$$

$$+ 2\overline{\sqrt{KM}} \times z^3 + Mz^4 = 0.$$

D É M O N S T R A T I O N.

* *Art. 62.* On a déja vû * que toutes ces courbes ont un point double à l'origine *G* de leur axe, ainsi il reste à prouver qu'elles en ont un autre en *R*, ce qui est très-aisé : car, quand $u = 0$, l'équation *(20)* devient $K z^4 + 2\sqrt{KM} \times z^3 + Mzz = 0$, égalité du 4me degré, dont les quatre racines sont $z = 0$, $z = 0$, $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$, $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$; les deux premiéres appartiennent visiblement au point double *G*, origine des indéterminées, & les deux derniéres à un point *R* pris sur l'axe, & distant de *G* de la grandeur $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Donc au point *R* il y a deux abscisses qui se confondent en une. Mais, en ce même point *R*, deux des ordonnées qui y correspondent, sont égales entr'elles : car en substituant dans l'équation *(20)* au lieu de *(z)* la valeur de cette indéterminée au point *R*, c'est-à-dire $-\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$, au lieu de *(z)* il vient l'égalité marquée ici par *(L)*

$$(L) \ldots \quad \Delta u^4 + Au^3 - \frac{Q\sqrt{M}}{\sqrt{K}} u^3 + \frac{BM}{K} u^2 - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}} u^2 + Du^2 = 0;$$

dont les quatre racines donnent les valeurs des quatre ordonnées correspondantes au point *R* de l'axe *GQ* : or dans cette égalité il y en a deux réelles & égales entr'elles, qui sont $u = 0$ & $u = 0$; donc au point *R* il y a non seulement deux abscisses qui se confondent en une, mais encore deux ordonnées égales entr'elles & à zero ; donc la courbe

* *Art. 51.* passe deux fois par ce même point *R* *, donc ce point *R* est

un point double de la courbe *MGDGARCRm*; aussi-bien que le point *G*; donc toutes les courbes, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par *(20)*, ont deux points doubles sur leur axe. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

LXXII. *Toutes choses demeurant les mêmes comme dans le Théor. précédent, déterminer la nature du second point double* R, *c'est-à-dire, connoître si ce second point double est un point d'intersection de deux branches, ou s'il est un point de rebroussement, ou enfin s'il est une ovale infiniment petite conjuguée.* La nature du point double *G* étant déja déterminée par la quatriéme Proposition, on ne la détermine pas ici.

SOLUTION.

La Solution de ce Probleme ne differe presque pas de celle de l'art. 63. En effet on cherchera d'abord * quel est le rapport du *(dz)* au *(du)* dans tous les points doubles de la courbe, en différentiant deux fois son équation, marquée par *(20)*, dans l'exposé de la Proposition précédente; cette double différentiation donnera l'équation différentielle, marquée ici par 2Σ. * Art. 46.

$$2\Sigma \ldots \left\{\begin{matrix} +6\Delta u^2 \\ +3Qzu \\ +3Au \\ +Bzz \\ +Cz \\ +D \end{matrix}\right\} du^2 \left\{\begin{matrix} +3Qu^2 \\ +4Bzu \\ +2Cu \\ +3Ezz \\ +\frac{2E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}z \\ +\frac{2G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}z \\ +G \end{matrix}\right\} dz\,du \left\{\begin{matrix} +Buu \\ +3Euz \\ +\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}u \\ +\frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}u \\ +6Kzz \\ +6z\sqrt{KM} \\ +M \end{matrix}\right\} dz^2 = 0.$$

On rendra ensuite cette équation différentielle propre au point double *R*, dont on connoît l'éxistence & la position par l'équation rationnelle, marquée *(20)* *, en substituant dans l'equation différentielle, au lieu des indéterminées *(z)* * Art. 71.

* *Art. 71.* & (u), leurs valeurs au point R, qui sont * $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$ & $u = 0$, & cette équation différentielle 2Σ deviendra $\overline{\frac{BM}{K} - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + D} \times du^2 + \overline{\frac{EM}{K} - G} \times dz\,du + Mdz^2 = 0$, & ensuite $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM} \sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM} - BM - KD}}$, égalité qui exprime les deux rapports de (dz) à (du) au point double R; or il est visible qu'il peut arriver trois différents cas, car la grandeur $\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM} - BM - KD}$, qui est sous le signe radical, peut être ou une grandeur positive, ou une grandeur négative, ou bien être $= 0$, selon que le quarré $\overline{EM - KG}^2$ est plus grand, ou plus petit, ou égal à $4KM \times \overline{KD + BM - C\sqrt{KM}}$.

Dans le 1er cas les deux rapports $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM} \sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM} - BM - KD}}$ sont réels; d'où il suit qu'il y a au point double R deux tangentes, & par conséquent* que ce point double R est un point d'intersection de deux branches ARC, CRM, de la courbe $MGDGARCRm$.

* *Art. 52.*

Dans le second cas, les deux rapports précédents sont imaginaires; d'où il suit qu'il n'y a point de tangente au point double R, & par conséquent* que ce point double est invisible, c'est-à-dire, qu'il y a en ce point R une ovale infiniment petite qu'on peut nommer le point conjugué de la courbe $MDACm$.*

* *Art. id.*

* Fig. 46.

Dans le troisiéme cas, les deux rapports précédents sont

l'un & l'autre égaux à $\frac{KG-EM}{2KM} \pm 0$; d'où il ſuit que les deux tangentes au point double ſe confondent en une, & par conſéquent que ce point double R eſt ou un point de rebrouſſement * de la courbe $MGDGARm$, ou une oſculation, ou bien une Lemniſcale infiniment petite conjuguée.

* Art. 52.

Voyés ce qui eſt dit dans la ſuite de ce Traité ſur les Oſculations & les Lemniſcales infiniment petites conjuguées.

Donc l'équation différentielle, marquée ci-deſſus par 2Σ, fera toûjours connoître la nature du point double R: & avant même de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoîtra ſi ce point double R eſt ou une interſection, ou un point conjugué, ou un rebrouſſement, en ſe ſervant de l'égalité $\frac{dz}{du} = \frac{KG-EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM-KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}.$$

Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

LXXIII. Soit la courbe $MGDGARCRm$ * dans laquelle le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'équation ſuivante

* Fig. 44.

$$z = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{aa + 4u\sqrt{4au + aa}}.$$

Je dis 1.° que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe, l'un à l'origine G de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$; 2.° Que ces deux points doubles ſont des points d'interſection de différentes branches. Car en faiſant évanoüir les ſignes radicaux de l'équation donnée, on a l'équation $au^3 + \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, qui eſt viſiblement un cas particulier de l'équation générale marquée par (20) dans l'art. 71. En effet il eſt viſible par la cinquiéme propoſition, que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe GQ; car quand $uu = 0$, on a $zz = 0$ & $zz + 2az + aa = 0$, les deux premiéres égalités $uu = 0$, $zz = 0$, font connoître que les droites GQ, GL, ſont l'une & l'autre ſécantes de la courbe en un point double G qui

eſt à l'origine des abſciſſes & des ordonnées; & la premiére & la troiſiéme égalité $uu = 0$ & $zz + 2az + aa = 0$, font connoître que l'axe GQ & une droite RC parallele aux ordonnées QM, & diſtante de G de la grandeur $GR = -a$, ſont l'une & l'autre ſécantes de la même courbe $MGDGARCRm$ en un autre point double R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$. Mais par les quatriéme & cinquiéme Propoſitions il eſt évident que les points G & R ſont l'un & l'autre des points d'interſection de la courbe $MGDGARCRm$: car en comparant l'équation donnée $au^3 + \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$ avec les équations générales marquées par (10) & par (20) dans les art. 62 & 71, on trouve $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{4}aa$, $E = 0$,

$$F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right) = 0,\ G = 0,\ K = -\tfrac{1}{4},$$

$$L\,(2\sqrt{KM}) = -\tfrac{1}{2}a \ \&\ M = -\tfrac{1}{4}aa,$$ enſorte

1.° Qu'au point double G, le rapport de (du) à (dz) c'eſt-

* *Art.* 63. à-dire $\frac{du}{dz}\left(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}\right)^* = \pm 1$;

2.° Qu'au point double R, le rapport de (du) à (dz), ou, ce qui revient au même, $\frac{dz}{du}\left(\frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}\right.$

* *Art.* 72. $\left.\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}\right)^*$
$= \frac{0 \times 8}{aa} \pm \frac{8}{aa}\sqrt{0 + \frac{1}{4}aa \times 0 - 0 + \frac{1}{16}aa} = \pm 1$.

Or puiſqu'au point double G, $\frac{du}{dz} = \pm 1$, il s'enſuit qu'il y a deux tangentes en ce point double, & par conſéquent une interſection de deux branches finies ou infinies de la courbe $MGDGARCRm$; De même, puiſqu'au point double R, $\frac{dz}{du} = \pm 1$, il s'enſuit qu'il y a auſſi deux tangentes en ce point double, & par conſéquent deux branches finies ou infinies, de la courbe $MGDGARCRm$, qui y paſſent. Donc il eſt évident, par les Propoſitions quatriéme

& sixiéme, que les deux points doubles G & R de la courbe $MGDGARCRm$, dont la nature est exprimée par l'équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 4u\sqrt{4au + aa}}$, sont des points d'interfection. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXXIV. Donc* 1.° si, de part & d'autre du point double G, on prend sur l'axe GQ les parties $G\Pi$, $G\Lambda$; $= 1$; si des points Π & Λ on mene du côté où les (u) sont négatifs les droites ΠT, Λt, paralleles aux ordonnées, & l'une & l'autre aussi $= 1$, les droites GT, Gt, seront visiblement les deux tangentes de la courbe au point double G. 2.° Si, de part & d'autre du point R, on prend sur l'axe GQ les parties Rq, Rf, l'une & l'autre $= 1$, & si des points q & f on mene du côté où les (u) sont négatifs les droites qT, ft, paralleles aux ordonnées, & l'une & l'autre $= 1$, les droites RT, Rt, seront les deux tangentes de la courbe au point double R. * Fig. 44.

EXEMPLE II.

LXXV. Soit la courbe $MGARm$*, dans laquelle le rapport des abscisses $GQ\ (z)$ aux ordonnées $QM\ (u)$ est exprimé par l'équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 8u\sqrt{au}}$; je dis que cette courbe a deux points de rebroussement sur son axe GQ, l'un à l'origine G de ses abscisses, l'autre au point R, distant de l'origine G de la grandeur $GR = -a$; car l'équation donnée étant délivrée des signes radicaux, devient $au^3 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, & sous cette forme elle se rapporte aux équations générales marquées par (10) & par (20) dans les art. 62 & 71. En effet dans cet Exemple les coëfficients indéterminées Δ, Q, A, B, C, D, E, &c. des art. 62 & 71, sont $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right)$ * Fig. 45.

$= 0$, $G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$, $L\ (2\sqrt{KM}) = -\frac{1}{2}a$; $M = -\frac{1}{4}aa$. Or le coëfficient $L\ (-\frac{1}{2}a)$ étant $=$ $2\sqrt{KM}$, & le coëfficient $F(o)$ étant $= \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$,
* Art. 71. il s'ensuit * que la courbe *MGARm* a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine G des abscisses & des ordonnées, l'autre en un point R distant de G de la grandeur $GR = -a = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Mais le rapport de (dz) à (du) au point double G étant toûjours exprimé par $\frac{du}{dz}\ (-\frac{G}{2D} \pm$
* Art. 63. $\frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})^* = 0 \pm \frac{a}{0}$, il s'ensuit que les deux tangentes de la courbe au point double G se confondent avec l'ordonnée principale GL, & par conséquent que ce point double G est un point de rebroussement auquel l'ordonnée principale GL est tangente : de même le rapport de (du) à (dz) au point double R, étant exprimé par $\frac{dz}{du}\ (\frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$
* Art. 72. $\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD})^*$
$= \frac{0 \times 8}{aa} \pm \frac{8}{aa}\sqrt{0 + \frac{1}{4}aa \times 0} = 0 \pm \frac{4 \times 0}{a} = \pm \frac{0}{a}$, il
* Art. 63. & 72. s'ensuit * que les deux tangentes au point double R se confondent en une & avec une droite RC menée par le point double R parallelement aux ordonnées, & par conséquent que ce point double R est encore un point de rebroussement, auquel la droite RC parallele aux ordonnées QM est tangente. Donc avant de supposer la courbe *MGARm* décrite sur le plan, on connoît par son équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 8u\sqrt{au}}$ non seulement que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ, mais encore le lieu où ces deux points doubles sont situés, & quelle est leur nature. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

EXEMPLE

EXEMPLE III.

LXXVI. Soit la courbe $MDACm$* dans laquelle le rapport des abſciſſes $GQ\ (z)$ aux ordonnées $QM\ (u)$ eſt exprimé par l'équation * Fig. 46.

$$z = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{aa \pm 4u\sqrt{4au - aa}}$$

on trouvera que cette courbe a ſur ſon axe GQ deux points doubles inviſibles : ou, ce qui revient au même, deux ovales infiniment petites, qu'on peut nommer, avec M. Newton, *deux points conjugués*, l'un à l'origine G des abſciſſes, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$. Car, par l'évanoüiſſement des incommenſurables, cette équation devient $au^3 - \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, & ſous cette forme elle ſe rapporte évidemment aux équations (10) & (20) des art. 61 & 71. En effet, dans cet Exemple, les coëfficients des équations (10) & (20) ſont $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$,

$C = 0$, $D = -\frac{1}{4}aa$, $E = 0$, $F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right) = 0$;

$G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$, $L = -\frac{1}{2}a = -2\sqrt{KM}$, $M = -\frac{1}{4}aa$. Or le coëfficient $F = 0$ étant auſſi égal à $\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, & le coëfficient $L = -\frac{1}{2}a$ étant auſſi égal à $-2\sqrt{KM}$, il s'enſuit* que la courbe $MDACm$ a deux points doubles ſur ſon axe GQ, l'un à l'origine G de cet axe, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -\frac{L}{2K}$, qui eſt ici $= -a$. * Art. 71.

Mais ces deux points doubles G & R ſont des points conjugués : car 1.° au point double G le rapport de dz à du étant toûjours exprimé par cette fraction $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}$

$\sqrt{GG - 4DM}$, & les coëfficients G & D étant ici égaux; l'un à zero, l'autre à une grandeur négative, on a $\frac{du}{dz} = 0 \mp \sqrt{-1}$. Or ces deux grandeurs $\mp \sqrt{-1}$ étant l'une & l'autre des grandeurs imaginaires, il s'ensuit que les deux tangentes de la courbe au point double G sont imaginaires, tandis que le rapport de l'abscisse à l'ordonnée correspondante y est réel; donc * le point double G est un point conjugué. 2.° Au point double R le rapport de dz à du étant toûjours exprimé par $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD},$$

& ces grandeurs étant ici $= \mp \sqrt{-1}$, qui sont des imaginaires, il s'ensuit que les deux tangentes au point double R sont imaginaires, & par conséquent * que ce point double R est un point conjugué aussi-bien que le point double G. Donc avant de supposer la courbe décrite, soit par un mouvement continu, soit par plusieurs points, on connoît par son équation non seulement qu'elle a deux points conjugués sur son axe, mais encore la situation de ces points. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

* *Art.* 63.

* *Art.* 72.

REMARQUES.

LXXVII. Il n'est peut-être pas hors de propos de faire remarquer ici, 1.° Que les trois courbes dont on a parlé dans les trois derniers Exemples, sont composées chacune de deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de l'ordonnée principale GL, mais du même côté par rapport à l'axe GQ. 2.° Qu'après avoir partagé GR en deux parties égales au point B, si par ce même point B on mene une droite BAI parallele à l'ordonnée principale GL, cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement à l'axe GQ, & terminées de part & d'autre par la courbe, ensorte que cette droite BI sera le

diametre de la courbe. Voilà ce que ces trois courbes ont de commun ; voici maintenant ce qu'elles ont de propre.

Dans le premier Exemple *, si l'on prend 1.° sur le diametre *BI*, du côté où les *(u)* sont négatifs, le point *E*, tel que *BE* soit $= \frac{1}{6}a$; si par ce point *E* on mene la droite *EH* parallele à l'axe *GQ*, & qu'on prenne sur cette droite *EH*, de part & d'autre du point *E*, les parties *EH*, *EF*, égales à $\frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{27}}}$, & les parties *EK*, *EO*, égales à $\frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{27}}}$, les points *H*, *F*, *K*, *O*, seront les points de la courbe qui ont des tangentes *Hf*, *Ff*, *Kf*, *Of*, paralleles aux ordonnées *QM*.

* Fig. 44.

2.° Si on prend sur l'ordonnée principale *GL* & sur sa parallele *RI*, du côté où les *(u)* sont négatifs, les points *D* & *C*, tels que *GD* & *RC* soient l'une & l'autre $= \frac{1}{4}a$, les points *D* & *C* seront deux des points de la courbe *MGD GARCRM* auxquels les tangentes *DT*, *CT*, sont paralleles à l'axe.

3.° Si on prend sur le diametre *BI*, du côté où les *(u)* sont positifs, le point *A*, tel que *BA* soit égal à la racine réelle de cette égalité $u^3 + \frac{1}{4}auu - \frac{1}{64}a^3 = 0$, on aura le point où ce diametre est coupé par la courbe parallelement à l'axe, ensorte que la tangente *AT* en ce point est parallele à l'axe *GQ* ; Sur quoi il faut remarquer que cette égalité $u^3 + \frac{1}{4}auu = \frac{1}{64}a^3$ ne peut avoir qu'une seule racine réelle : D'où il suit que le diametre *BI* ne rencontre la courbe qu'en un seul point *A*.

4.° Toutes les droites, comme *EH*, menées parallelement à l'axe *GQ*, entre les points *A* & *D*, coupent la courbe en quatre points ; Toutes les droites, comme *Mm*, menées parallelement au même axe *GQ* au dessus du point *A*, par rapport au point *B*, couperont toûjours la courbe en deux points, à quelque distance que le point *I* soit du point *A* ; Enfin toutes les droites menées parallelement à l'axe au

deſſous du point D par rapport au point G, ne couperont la courbe en aucun point; D'où il ſuit que cette courbe $MGDGARCRm$ s'étend à l'infini du côté des (u) poſitifs, & ne s'étend pas au de-là des points D & C du côté des (u) négatifs.

5.° Toutes les droites menées parallelement à l'ordonnée principale GL entre les droites Hf, Kf, & entre les droites Ff, Of, coupent la courbe en trois points : mais celles qui ſont menées parallelement à la même ordonnée principale GL, entre les droites Hf, Ff, ne la coupent qu'en un ſeul point, de même que les droites menées parallelement à l'ordonnée principale au de-là des droites Kf, Of, par rapport au point G.

Enſorte qu'il eſt aiſé de s'appercevoir, 1.° Que la courbe $MGDGARCRm$ eſt compoſée de deux branches infinies GM, Rm, de deux *folium* $GHDKG$, $ROCFR$, & d'une ſinuoſité GAR, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Biſolium-Parabolique.* 2.° Que ces quatre parties principales de la courbe $MGDGARCRm$ ſont continües, le folium $GHDKG$ n'étant qu'une prolongation de la branche infinie GM : la ſinuoſité GAR, une prolongation du demi-folium DKG : le folium $ROCFR$, une prolongation de la ſinuoſité GAR, & enfin la branche infinie Rm, une prolongation du folium $ROCFR$.

* Fig. 45. A l'égard du ſecond Exemple *, 1.° ſi l'on prend ſur le diametre BI, du côté où les (u) ſont poſitifs, la droite $BA = \frac{1}{4}a$, on aura le point A où la courbe $MGARm$ coupe le diametre, & où la tangente AT eſt parallele à l'axe.

2.° Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, entre cet axe & la tangente AT, couperont la courbe en quatre points, au lieu que toutes les droites, comme MIm, menées parallelement à ce même axe GQ au de-là du point A, par rapport au point B, ne la couperont qu'en deux points, à quelque diſtance que le point I ſoit du point G : enfin toutes les droites menées parallelement à ce même axe GQ au de-là du point B, par rapport au point A, ne rencontre-

ront la courbe en aucun point, enſorte que cette courbe eſt toute entiére du côté des *(u)* poſitifs, & n'a par conſéquent que des ordonnées poſitives.

3.° Toutes les droites, comme *QM*, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, ne rencontrent la courbe qu'en un ſeul point, ſoit que le point *Q* ſoit ſitué entre les points doubles rebrouſſants *G* & *R*, ou au de-là de ces points doubles par rapport au point *B*, & à quelque diſtance qu'ils ſoient de ces points doubles *G* & *R*.

Enſorte qu'il eſt aiſé de voir que cette courbe n'a que deux branches infinies *AGM*, *ARM*, qui font, pour ainſi dire, deux cornes aux points rebrouſſants *G* & *R*, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Parabole-Diceratoïde*.

Pour ce qui eſt maintenant du troiſiéme Exemple*, on remarquera, 1.° Qu'en prenant ſur l'ordonnée principale *GL* & ſur ſa parallele *Rl*, du côté où les *(u)* ſont poſitifs, les droites *GD*, *RC*, l'une & l'autre $= \frac{1}{4}a$, on aura les points *D* & *C* de la courbe *MDACm* où les tangentes *DT*, *CT*, ſont paralleles à l'axe *GQ*. * Fig. 46.

2.° Si on prend ſur le diametre *BI*, du côté où les *(u)* ſont poſitifs, la droite *BA* égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 - \frac{1}{4}auu - \frac{1}{64}a^3 = 0$, le point *A* ſera celui où le diametre *BI* eſt coupé parallelement à l'axe par la courbe *MDACm*, enſorte que la tangente *AT* au point *A* ſera parallele à l'axe *GQ*.

3.° Toutes les droites menées parallelement à l'axe *GQ*, entre les points *G* & *D*, ne rencontreront pas la courbe, non plus que leurs paralleles menées de l'autre côté du point *G* par rapport au point *D*.

4.° Mais toutes les droites menées parallelement à l'axe *GQ*, entre les tangentes *DT*, *AT*, rencontreront la courbe en quatre points, tandis que leurs paralleles *MIm*, menées au de-là du point *A*, par rapport au point *B*, ne la rencontreront qu'en deux points, à quelque diſtance que le point *I* ſoit du point *A*.

5.° Que toutes les droites, comme *QM*, menées paral-

lelement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points doubles *G* & *R*, ou au de-là de ces points doubles par rapport au point *B*, ne rencontreront la courbe qu'en un ſeul point *M*, à quelque diſtance qu'elles ſoient de ces points doubles *G* & *R*.

Enſorte qu'il eſt aiſé de concevoir, 1.° Que la courbe *MDACm*, dont la nature eſt exprimée par l'équation $z + \frac{1}{2}a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa \pm 4u\sqrt{4au - aa}}$, n'a que deux branches *ADM*, *ACm* (leſquelles étant, pour ainſi dire, *refléchies* aux points *D* & *C* *par ſinuoſité*, parallelement à l'axe *GQ*, s'étendent à l'infini de part & d'autre du diametre *BAP*) & deux points conjugués, ou, ce qui eſt la même choſe, deux ovales infiniment petites *G* & *R*, diſtantes de la courbe de la grandeur *DG*, ou $CR = \frac{1}{4}a$, & ſéparées l'une de l'autre par la droite $GR = a$, ce qui peut faire donner à cette courbe le nom de *Parabole-Biponctuée*.

EXEMPLE IV.

* Fig. 47. LXXVIII. Soit la courbe *GaRMDLGARΦCHG**, dont *GQ* eſt l'axe, & *GL* l'ordonnée principale, faiſant entr'elles un angle quelconque *LGQ*, & dans laquelle le rapport des abſciſſes *GQ* (z) aux ordonnées *QM* (u) eſt exprimé par l'équat. $z = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{bb \pm 4u\sqrt{\frac{1}{2}aa - uu}}$, où l'on ſuppoſe $b < a$; je dis que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe, l'un en *G*, origine des abſciſſes *GQ* (z) l'autre en un point *R*, diſtant de *G* de la grandeur $GR = b$, & que ces deux points doubles ſont deux points d'interſection de différentes branches. Car en faiſant évanouïr les ſignes radicaux de l'équation donnée, on a cette équation $\frac{1}{2}a^2u^2 - u^4 = z^4 - 2bz^3 + bbzz$, qui eſt un cas particulier de l'équation marquée par (20) dans l'art. 71. En effet, en comparant ces deux équations, on trouve que les coëfficients $\Delta, Q, A, B, C, D, K, L, M$, de l'équation marquée par (20) ſont ici $\Delta = -1$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; $D = \frac{1}{2}aa$, $E = 0$, $G = 0$, $F = 0$, $K = -1$, $L =$

$+ 2b$, $M = - bb$; or le coëfficient $L\ (2b) = 2\sqrt{KM}$ & $F = \frac{EM + GK}{\sqrt{KM}} = 0$. Donc * la courbe a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine G de les abscisses; l'autre en un point R, distant de G de la grandeur $GR = - \frac{L}{2K} = - \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}} = \frac{2b}{2} = b$. *Ce qu'il falloit prouver en premier lieu.* * *Art. 71.*

Mais ces deux points doubles G & R sont ici des points d'intersection : car 1.° au point double G on a $\frac{du}{dz} = (- \frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}) = \pm \frac{b\sqrt{2}}{a}$; or les deux rapports $+ \frac{b\sqrt{2}}{a}$ & $- \frac{b\sqrt{2}}{a}$, étant des grandeurs différentes l'une de l'autre à cause des différents signes $+$ & $-$ dont ils sont affectés, il suit qu'il y a deux tangentes au point double G, & par conséquent que ce point double est un point d'intersection de deux branches. 2.° Au point double R, on a $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}$$

$= 0 \pm \frac{1}{2bb} \sqrt{2bbaa} = \pm \frac{a}{b\sqrt{2}}$; or ces deux valeurs $+ \frac{a}{b\sqrt{2}}$ & $- \frac{a}{b\sqrt{2}}$, étant différentes l'une de l'autre à cause des signes $+$ & $-$ dont elles sont affectées, il s'ensuit qu'il y a encore deux tangentes au point double R, & par conséquent que ce point est une intersection de deux branches de la courbe $GaRMDLGAR\Phi CHG$. Ainsi avant de supposer la courbe décrite sur le plan, on connoît non seulement qu'elle a deux points doubles sur son axe, & le lieu où ils sont situés, mais encore la nature de ces deux points doubles, qui est d'être des points d'intersection. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXXIX. Donc si l'on prend sur l'axe GQ les points q & λ (le premier du côté où les z sont positifs, & le second du côté où les z sont négatifs) tels que les parties de l'axe Rq, $G\lambda$, soient l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: si par les points q & λ on mene parallelement à l'ordonnée principale GL, les droites qT, λT, prolongées de part & d'autre de l'axe jusqu'en θ, ensorte que qT, $q\theta$, λT, $\lambda\theta$, soient égales à (b) : si des points R & G on tire les droites RT, $R\theta$, GT, $G\theta$, il est visible que les deux premiéres RT, $R\theta$, seront les deux tangentes de la courbe au point double R, & que les deux derniéres GT, $G\theta$, seront les deux tangentes de la courbe au point double G.

REMARQUES.

LXXX. On peut remarquer ici, 1.° Que toutes les droites, comme MN, menées en dedans de la courbe $GaRMDLGARNCnG$ parallelement à l'ordonnée principale GL, rencontrent cette courbe en quatre points M, μ, ν, N, & l'axe en un point Q, de telle façon néanmoins que $QM = QN$, & $Q\mu = Q\nu$; Car l'équation $\frac{1}{2}aauu - u^4 = z^4 - 2bz^3 + bbzz$ donne $\pm u = \frac{1}{2}\sqrt{aa \pm \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$, ainsi en prenant GQ pour l'indéterminée (z), on aura $QM(+u)$ ou $QN(-u) = \frac{1}{2}\sqrt{aa + \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$ & $Q\mu\ (+u)$ ou bien $Q\nu\ (-u) = \frac{1}{2}\sqrt{aa - \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$: d'où il suit que l'axe GQ est un des diametres de la courbe.

2.° Après avoir partagé GR en deux parties égales au point B, si par ce même point B on mene une droite DBC parallele à l'ordonnée principale GL, cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement

parallelement à l'axe GQ, & terminées de part & d'autre par la courbe; Enſorte que cette droite BD ſera l'autre diametre de la courbe $GaRMDLGARNÇ\delta G$.

3.° Si l'on prend ſur le diametre BD, de part & d'autre du point B, les points A & a, tels que BA & Ba ſoient l'une & l'autre $= \frac{1}{2}\sqrt{aa - \sqrt{a^4 - b^4}}$, & enſuite les points D & C, tels que BD & BC ſoient l'une & l'autre $= \frac{1}{2}\sqrt{aa + \sqrt{a^4 - b^4}}$: les points A, a, & les points D & C, ſeront ceux où le diametre BD, prolongé de part & d'autre du point B, ſera coupé par la courbe $GaRMD$ $LGARNC\delta G$ parallelement à ſon axe GQ; Enſorte que les tangentes aux points A, a, D, C, ſeront paralleles à l'axe GQ.

4.° Si on prend ſur l'ordonnée principale GL, de part & d'autre du point G, les parties GL, GH, l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$, & ſur la droite Rf, qui eſt parallele à GL, auſſi de part & d'autre du point R, les parties Rf, RF, l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: les points L & H ſeront ceux où la courbe coupe l'ordonnée principale parallelement à l'axe GQ, & les points f & F ſeront ceux où cette même courbe coupe Rf parallelement à l'axe; Enſorte que les tangentes aux points L, H, f, F, ſont toûjours paralleles à l'axe GQ.

5.° Si on prend ſur le diametre BD, de part & d'autre du point B, les parties Be, BE, l'une & l'autre $= \frac{1}{2}a$: ſi par les points e & E on mene parallelement à l'axe GQ les droites $\zeta e \gamma$, $\phi E \delta$, ſur leſquelles on prenne, de part & d'autre des points e & E, les parties $e\zeta$, $e\gamma$, $E\phi$, $E\delta$, chacune égales à $\frac{1}{2}\sqrt{bb + aa}$, les points ζ, γ, ſeront ceux où la droite $\zeta e \gamma$ eſt coupée par la courbe $GaRMDLG$ $ARNC\delta G$ parallelement à l'ordonnée principale GL, & les points ϕ & δ ceux où la droite $\phi E \delta$ eſt coupée par la même courbe $GaRMD$, &c. parallelement à la même

ordonnée principale GL, enforte que les tangentes aux points $\mathfrak{C}$, γ, ϕ, δ, font paralleles à l'ordonnée principale GL.

6.° Toutes les droites menées parallelement aux ordonnées QM, au de-là des tangentes $\mathfrak{C}T$, γt, par rapport au point e, ne rencontreront jamais la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$: mais comme $BR\ (\frac{1}{2}b)$ eft toûjours moindre que $E\phi$ ou $e\mathfrak{C}\ (\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa})$ il fuit de tout ce qu'on a remarqué, que $\phi\delta$ ou fon égale $\mathfrak{C}\gamma = \sqrt{bb+aa}$ font les *maxima* de la courbe par rapport à fon axe.

7.° Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, au de-là des points L & H, ne rencontreront jamais la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$, enforte que les points L & H feront les limites de la courbe par rapport à fon ordonnée principale GL.

8.° Il fuit des deux derniéres remarques, que la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$ rentre en elle-même.

9.° Il eft aifé de s'appercevoir que BD ou fon égale BC $(\frac{1}{2}\sqrt{aa+\sqrt{a^4-b^4}})$ eft toûjours plus petit que RF ou $GL = \frac{a}{\sqrt{2}}$, & que Rf ou $GH = \frac{a}{\sqrt{2}}$; Ainfi la courbe, en allant de F en D, ou de f en C, s'eft rapprochée de fon axe, & en allant de D en L, ou de C en H, elle s'en eft éloignée ; De même on voit que la courbe, en allant de A en R, & de R en ϕ, s'éloigne toûjours de fon diametre DC, parce que $BR\ (\frac{1}{2}b) < E\phi\ (\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa})$; mais que cette même courbe, en allant de ϕ en C, fe rapproche toûjours de ce même diametre DC, & enfuite s'en éloigne, en allant de C en δ, puis s'en rapproche, en allant de δ en G & en A: ce que je dis ici de la portion $AR\phi C\delta GA$, doit s'entendre auffi de la portion $aR\mathfrak{C}D\gamma Ga$.

10.° Enfin de tout ce qu'on a dit dans cet article, il eft vifible que la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$ forme deux efpeces de cœurs, $AR\phi C\delta GA$ & $aR\mathfrak{C}D\gamma Ga$, qui fe noüent enfemble aux points G & R. Ce qui m'engage à lui donner le nom de *Dicardie*.

AVERTISSEMENT.

Il y auroit encore bien des choses à remarquer au sujet de cette Dicardie; *mais comme ce n'est pas ici le lieu de traiter des différentes propriétés des Courbes qui composent le quatriéme ordre, puisqu'il ne s'agit encore que des points doubles, je vais continuer les principes généraux.*

SCHOLIE I.

LXXXI. Soit l'équation générale pour toutes les lignes du 4me ordre, dont on a parlé dans l'art. 31 du premier Mémoire, dans laquelle z exprime les abscisses, & u les ordonnées de toutes ces courbes.

$$(4D)\ldots \Delta u^4 + \overline{qz + A} \times u^3 + \overline{\mathcal{C}z^2 + \gamma z + \delta} \times u^2 + \overline{\epsilon z^3 + n z^2 + \lambda z + \mu} \times u + \overline{\nu z^4 + \rho z^3 + \varphi z^2 + \pi z + \sigma} = 0.$$

Si cette équation est telle, 1.° Que les quatre racines du dernier membre égalé à zero ($\nu z^4 + \rho z^3 + \varphi z^2 + \pi z + \sigma = 0$) étant réelles, deux de ces racines soient égales entre elles, & les deux autres aussi égales entre elles. 2.° Si le pénultiéme membre est nul: ou bien, si les trois racines de ce pénultiéme membre, aussi égalé à zero ($\epsilon z^3 + n z^2 + \lambda z + \mu = 0$) étant réelles, deux de ces racines sont des diviseurs exacts du dernier membre; Toutes les courbes, dont la nature sera exprimée par une telle équation, auront deux points doubles sur leur axe. Telles sont, par exemple, toutes les courbes dont la nature peut être exprimée par l'équation suivante,

$$\Delta u^4 + \overline{qz + A} \times u^3 + \overline{\mathcal{C}z^2 + \gamma z + \delta} \times u^2 + \overline{z^3 + 7Bz^2 + 14BBz + 8B^3} \times u + z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4 = 0;$$

parce que 1.° le dernier membre égalé à zero ($z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4 = 0$) a quatre racines réelles, $z = -B$, $z = -B$, $z = -2B$ & $z = -2B$, dont les deux premiéres sont égales entre elles & de mêmes

ſignes, & les deux derniéres ſont auſſi égales entre elles & de mêmes ſignes. 2.° Parce que dans cette même équation le pénultiéme membre ($z^3 + 7Bz^2 + 14B^2z + 8B^3 = 0$) auſſi égalé à zero, a trois racines réelles, $z = -B$, $z = -2B$ & $z = -4B$, dont les deux premiéres ſont des diviſeurs exacts du dernier membre ($z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4$). Ceci n'étant qu'une ſuite néceſſaire de ce qui a été démontré dans les articles précédents, il eſt inutile de s'y arrêter davantage.*

* *Voyés l'art. 51 du premier Mémoire.*

SCHOLIE II.

LXXXII. Si l'équation générale marquée ($4D$)* a toutes les conditions requiſes par l'article précédent, & outre cela ſi les coëfficients δ, μ & π de cette équation ſont tels que (g étant une grandeur poſitive ou négative déterminée par l'équation) l'on ait $\delta = 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$, $\mu = Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$ & $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$; Toutes les courbes, dont la nature ſera exprimée par l'équation marquée par ($4D$)*, auront trois points doubles : ſçavoir, deux ſur leur axe, à cauſe des conditions de l'article précédent, & un troiſiéme ſur leur ordonnée principale en un point B, diſtant de l'origine G des indéterminées de la grandeur $GB = -g$. Ceci n'eſt encore qu'une ſuite évidente des principes qu'on a établis juſqu'ici.*

* *Art. précéd.*

* *Art. précéd.*

* *Art. 51 du prem. Mémoire.*

COROLLAIRE.

LXXXIII. Donc les lignes du 4me ordre peuvent avoir trois points doubles, & il eſt aiſé, en ſuivant les regles qui ont été données dans les art. 63 & 72, de connoître la nature de ce troiſiéme point double : c'eſt-à-dire, de connoître s'il eſt ou un point d'interſection de deux branches, ou un point de rebrouſſement, ou une ovale infiniment petite conjuguée.

EXEMPLE I.

LXXXIV. Soit la courbe $MRBKEVCR\phi BVm$* telle que le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) ſoit exprimé par l'équation ſuivante :

* Fig. 48.

$$2bu^3 + 3b^2u^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0;$$

Puisque le dernier membre égalé à zero ($z^4 - 2b^2z^2 + b^4 = 0$) a quatre racines réelles, $z = -b$, $z = -b$, $z = b$ & $z = b$, dont les deux premiéres sont égales entre elles & de mêmes signes, & les deux derniéres aussi égales entre elles & de mêmes signes : puisque le pénultiéme membre ($\epsilon z^3 + n z^2 + \lambda z + \mu$) est nul, il est clair * que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ, dont le 1er est distant de G, origine des abscisses & des ordonnées de la grandeur $GR = b$, & le 2d distant de G de la grandeur $GV = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu par cet Exemple.* * *Art. 81.*

Mais outre cela cette courbe (par l'art. 82.) a un 3me point double sur son ordonnée principale en un point B distant de G (origine des indéterminées) de la grandeur $GB = -g = -b$. Car après avoir comparé les termes de cette équation particuliére avec ceux de l'équation generale marquée *(4 D)* dans l'art. 81, on a $\Delta = 0$, $q = 0$, $A = 2b$, $\zeta = 0$, $\gamma = 0$, $\epsilon = 0$, $n = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, $\varphi = 2bb$, $\sigma = -b^4$; & ensuite $\delta = 3bb$, $\mu = 0$, & $\pi = 0$. D'où il suit que les coëfficients δ, μ & π sont tels qu'il est requis par l'art. 82, c'est-à-dire, qu'ils sont $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$, $\mu = Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, & $\delta = 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$: car 1.° il est visible que $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$, puisque la comparaison des termes a donné $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, & $q = 0$; 2.° puisque cette même comparaison des termes a donné $\mu = 0$, il est visible que la supposition de μ égal à $Ag^2 - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, donne $Ag^2 - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g} = 0$, & qu'en substituant dans cette formule, au lieu de A, Δ & σ, leurs valeurs déja trouvées, il vient $2bg^2 - \frac{2b^4}{g} = 0$, d'où l'on tire $g = b$. 3.° Il n'est pas moins évident, qu'en substituant dans la formule $(2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg})$, ou, ce qui est la même chose, dans la formule $(4bg - \frac{b^4}{gg})$ au lieu de l'inconnuë *(g)* sa valeur *(b)* qui vient d'être trouvée : il est, dis-je, évident que cette grandeur devient

$= 3bb$, qui eſt préciſément la valeur qu'on a trouvée par la comparaiſon des termes pour le coëfficient δ, enſorte que ce coëfficient δ eſt, dans cet exemple, $= 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{c}{gg}$. Donc les trois coëfficients δ, μ & π, ont dans l'équation $2bu^3 + 3bbu^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0$, les conditions requiſes par l'art. 82. Donc cette équation exprime la nature d'une courbe, qui (outre les deux points doubles qu'elle a ſur ſon axe par l'art. 81) en a encore un troiſiéme ſur ſon ordonnée principale GL en un point B diſtant de G, origine des indéterminées, de la grandeur $GB = -g = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en ſecond lieu par cet Exemple.*

Maintenant pour connoître la nature de ces trois points doubles, on différentiera deux fois ſon équation, & l'on aura, après la ſeconde différentiation, $\frac{du}{dz} = \pm \sqrt{\frac{6z^2 - 2b^2}{6bu + 3b^2}}$.

[** Par la première partie de cet article.*] Donc au point double R, où * $z = b$, & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc ce point double R eſt une interſection de deux branches. [** Idem.*] De même au point double V, où * $z = -b$, [** Art. 63.*] & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. D'où il ſuit * que ce point double eſt encore une interſection de deux branches. Enfin [** Par la seconde part. de cet art.*] au troiſiéme point double B, où * $z = 0$, & $u = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. [** Art. 63.*] Donc * ce troiſiéme point double eſt encore une interſection de deux branches. Ainſi avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoît, par le moyen de ſon équation, non-ſeulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles ſont trois points d'interſection. *Ce qu'il falloit faire voir en troiſiéme lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXV. On remarquera 1.° que l'ordonnée principale GL eſt toûjours le diametre de la courbe, puiſque l'on a $z = \pm \sqrt{bb \pm u\sqrt{2bu + 3bb}}$.

2.° Si l'on prend ſur cette ordonnée principale, du côté

où les *(u)* sont positifs, le point C, tel que GC soit $= \frac{1}{2} b$, le point C sera celui où la courbe rencontrera l'ordonnée principale parallelement à l'axe GQ.

3.° Si par le point double B on tire parallelement à l'axe une droite EBF, & si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point B, les points E & F, tels que BE ou BF soient l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: ces points E & F seront les points de la courbe où les tangentes deviennent paralleles à l'ordonnée principale GL.

4.° En prenant sur l'ordonnée principale GL, du côté où les *(u)* sont négatifs, le point A, tel que BA soit $= \frac{1}{2} b$: si par ce point A, on mene parallelement à l'axe une droite $KA\phi$, & si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point A, les points K & ϕ, tels que KA & $A\phi$ soient l'une & l'autre $= b$: les points K & ϕ sont ceux où cette droite $KA\phi$ touche la courbe $MRBKEVCR\phi BVm$.

5.° Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale entre les points E & F, rencontrent la courbe en trois points. Mais celles qui sont menées, parallelement à l'ordonnée principale, au de-là des points E & F, par rapport au point B, ne rencontrent la courbe qu'en un point. D'où il suit 1.° Que cette courbe a deux branches qui s'étendent à l'infini du même côté par rapport à l'axe, & de part & d'autre de l'ordonnée principale GL. 2.° Que les portions de cette courbe qui se noüent avec les branches infinies, aux points doubles R, B, V, ne s'étendent pas au de-là des points E & F le long de l'axe GQ.

6.° Toutes les droites, menées parallelement à l'axe GQ entre les points C & A, rencontrent la courbe en quatre points. Mais celles qui sont menées parallelement à l'axe au de-là du point C, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & celles qui sont menées parallelement à l'axe au de-là du point A, par rapport au point G, ne rencontrent pas la courbe. D'où il suit, 1.° que cette courbe ne s'étend pas au de-là du point A, du côté où les *(u)* sont négatifs, & que les points K & ϕ sont ses limites de ce côté-là : 2.° Que

les portions de cette courbe, qui se noüent avec les branches infinies aux points doubles *R, B, V*, ne s'étendent pas au de-là du point *C* le long de l'ordonnée principale *GL*.

7.° De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de voir que la courbe *MRBKEVCR*φ*BVm* est composée de deux branches infinies qui se noüent aux trois points *R, B, V* en formant une espece de Las-d'amour, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Parabole Lemniscerotique*.

EXEMPLE II.

* Fig. 49. LXXXVI. Soit la courbe *ERB*μ*fVAe*ξ*BVF*φ*H*π*E**, dont la nature est exprimée par $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2z^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$. Je dis que cette courbe a trois points doubles, *R, V, B*, qui sont trois points d'intersections. 1.° Il est visible * qu'elle a deux points doubles sur son axe, puisque le dernier membre de cette équation égalé à zero ($z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2z^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$) a quatre racines réelles,

* Art. 81.

$$z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}},\ z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}},\ z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}\ \&\ z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}};$$

dont les deux premiéres sont égales & de mêmes signes, & les deux derniéres aussi égales entre elles & de mêmes signes, & enfin parce que le pénult. membre $(\epsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu \times u)$ est nul. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu par cet Exemple.*

* Art. 82. 2.° Il est visible * qu'elle a un troisiéme point double sur son ordonnée principale *GL* en un point *B* distant de *G* (origine des indéterminées) de la grandeur $GB = -g = -b$. Car en comparant l'équation particuliére de cette courbe avec l'équation générale marquée par (4*D*) dans l'art. 81, on a $\Delta = 1$, $q = 0$, $A = -\frac{4}{3}b$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -4bb$, $\epsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\phi = -\frac{2b^2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $\pi = 0$ & $\sigma = \frac{5}{3}b^4$, ce qui donne 1.° $\lambda g - \gamma g^2 + qg^3 = 0 = \pi$: & c'est une des trois conditions requises par l'art. 82 : 2.° L'on a aussi $(Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g})$, ou, ce qui est

est la même chose, $-\frac{4}{3}bgg - 2g^3 + \frac{10b^4}{3g} = \mu = 0$, (puisque $\mu = 0$), & cette seconde condition donne $g = b$; 3.° enfin cette valeur de g étant substituée dans la formule $2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$, ou, ce qui est la même chose, dans son égale $-\frac{8}{3}bg - 3g^2 + \frac{5b^4}{3gg}$, il vient $(-4bb)$ qui est précisément la valeur trouvée, par la comparaison des termes, pour le coëfficient δ: d'où il suit que ce coëfficient δ est, dans cet exemple, $= 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$. Donc les trois coëfficients δ, μ & π, ont, dans l'équation $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$, toutes les conditions requises par l'article 82. Donc la courbe $ERB\mu fVAe\xi BVF\phi H\pi E$, dont la nature est exprimée par cette équation, a trois points doubles R, V, B, les deux premiers sur son axe GQ en des points R & V distants de G (origine des indéterminées) des grandeurs $GR = b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$ & $GV = -b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, & le troisiéme sur son ordonnée principale GL, en un point B, distant du point G de la grandeur $GB = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en second lieu par cet Exemple.*

Pour connoître la nature de ces trois points doubles, il faut * différentier deux fois l'équation $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$, & la seconde différentiation donnera $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2 - 3z^2}}{\sqrt{3uu - 2bu - 2bb}}$. Ensorte qu'au point double R, où * $u = 0$ & $z = b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il suit * que ce point double est un point d'intersection de deux branches. De même au point double V, où * $u = 0$ & $z = -b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il suit que ce point double V * est encore une intersection de

* *Art. 52.*
* *Prem. partie de cet article.*
* *Art. 63.*
* *Prem. partie de cet article.*
* *Art. 63.*

deux branches. Enfin au point double B, où * $z = 0$ & $u = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$, ce qui fait voir * que ce point double B est une troisiéme interfection. Donc avant de suppofer la courbe décrite sur le plan, on est assûré non seulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles sont trois points d'interfection, & l'on connoît leurs positions, par rapport à l'axe & à l'ordonnée principale. *Ce qu'il falloit faire voir en 3me lieu par cet Exemple.*

* *Seconde part. de cet article.*

* *Art. 63.*

REMARQUES.

LXXXVII. Je ne m'arrête point ici à construire les tangentes de la courbe * $ERB\mu fVAe\xi BVF$ aux points doubles B, R, V, parce qu'il n'y a rien de si facile, dès le moment qu'on a les rapports, des ordonnées de la courbe, en ces points, aux soutangentes qui leur correspondent. Mais pour donner quelque idée de cette courbe, je remarquerai,

* Fig. 49.

1.° Que l'ordonnée principale GL est son diametre, puisque l'on a toûjours $z = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} bb \pm u\sqrt{4b^2 + \frac{4}{3}bu - uu}}$.

2.° Qu'en prenant sur l'ordonnée principale GL, du côté où les (u) sont positifs, les points A & H, tels que GA soit $= \frac{5}{3}b - \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, & $GH = \frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, on aura les points où la courbe coupe son ordonnée principale parallelement à son axe.

3.° En prenant sur l'ordonnée principale GL la partie $GC = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, & $GD = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, si par les points C & D ainsi trouvés, on tire les droites $\phi C\pi$, $\mu D\xi$, paralleles à l'axe GQ, sur lesquelles on prenne, de part & d'autre des points C & D, les parties $C\phi$, $C\pi$, & $D\mu$, $D\xi$, les unes & les autres $= b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$: les points ϕ, π, μ & ξ seront les quatre points, de la courbe, où les tangentes sont paralleles à l'axe.

4.° Si par le point double B on mene, parallelement à l'axe GQ, une droite fBe, sur laquelle on prenne, de part & d'autre du point B, les parties Bf, Be, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: les points f & e seront ceux où la courbe a des tangentes paralleles à l'ordonnée principale GL.

5.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale GL, du côté où les (u) sont positifs, le point I, tel que GI soit $= 2b$: si l'on mene, par ce même point I, une droite EIF parallele à l'axe GQ, sur laquelle on prenne, de part & d'autre du point I, les portions IE, IF, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{32}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: les points E & F seront deux autres points, de la courbe, où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale GL.

6.° Toutes les droites menées, parallelement à l'axe, au de-là des points C & D, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe en aucun point; De même toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale, au de-là des points E & F, par rapport à cette ordonnée principale GL, ne rencontrent pas la courbe. D'où il suit que cette courbe ne s'étend pas au de-là des points ϕ & π, ni au de-là des points μ & ξ, le long de son ordonnée principale : & que, par rapport à son axe, elle ne s'étend pas au de-là des points E & F; Ensorte qu'elle est rentrante en elle-même.

7.° De-là il est aisé de conclure, que les droites $\phi\mu$, $\pi\xi$, (l'une & l'autre, $= \frac{4}{3} b\sqrt{10}$) sont ses *maxima* paralleles à l'ordonnée principale, & la droite $EF = \frac{2b\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{32}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, son *maximum* parallele à l'axe.

8.° On remarquera encore, que toutes les droites menées parallelement à l'axe, entre les points A & D, rencontrent la courbe en quatre points, aussi-bien que toutes les droites menées, parallelement à l'axe, entre les points H & C; Mais celles qui seroient menées, parallelement à ce même

axe GQ, entre les points A & H, ne rencontreroient la courbe qu'en deux points.

9.° On remarquera auſſi, que toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points f & e, rencontrent toûjours la courbe en quatre points : en comptant chaque point double R, B, V, pour deux points ſimples.

10.° De tout ce qui vient d'être dit, & de ce que GH $(\frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}) < GC(\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10})$, il eſt aiſé de voir, 1.° Que la courbe en queſtion repréſente, du côté où les (u) ſont poſitifs, la figure d'un cœur $BE\pi H\phi FB$, dont la pointe eſt en B & le ſommet du milieu en H; 2.° Que la diſtance, du ſommet H aux ſommets ϕ & π, des oreilletes $H\phi F$, $H\pi E$, eſt $HC = \frac{1}{3}b\sqrt{10} - b$, & $C\phi$ ou $C\pi = \pm \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

11.° De ce que $GB\,(b) < GD\,(-\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10})$ il eſt aiſé de voir, 1.° Que cette même courbe forme une autre eſpece de cœur $Af\mu B\xi eA$, dont la baſe eſt en A, & le ſommet en B : 2.° Que la diſtance de ce ſommet B aux ſommets μ & ξ, des oreilletes $B\mu f$, $B\xi e$, eſt $BD = \frac{2}{3}b\sqrt{10} - \frac{5}{3}b$, & $D\mu$ ou $D\xi = \pm b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$.

12.° Enſorte que cette courbe eſt compoſée de deux cœurs $BRE\pi H\phi FVB$, & $AReB\mu fVA$, qui s'uniſſent au point double B, & ſe coupent, par leurs parties laterales, aux points R & V, ce qui lui procure les trois points doubles qui m'ont engagé de la donner ici pour exemple. On peut lui appliquer le nom de *Dicardie*, à cauſe des deux cœurs qu'elle repréſente : mais, pour la diſtinguer de celle dont il eſt parlé dans l'art. 78, il eſt à propos de la nommer *ſeconde Dicardie*.

EXEMPLE III.

* Fig. 50. LXXXVIII. Soit la courbe $MERAVFmNRBVn$*, dans laquelle le rapport des abſciſſes $GQ\,(z)$ aux ordonnées $QM\,(u)$ eſt exprimé par l'équation ſuivante

$$u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u^3 + 2bbu^2\sqrt{3} - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0.$$

Il est visible, 1.° que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ en des points R & V, distans de G, origine des abscisses & des ordonnées, des grandeurs $GR = b$, & $GV = -b$. Car outre, que le dernier membre de cette équation égalé à zero $(z^4 - 2b^2z^2 + b^4 = 0)$ a quatre racines réelles $z = b$, $z = b$, $z = -b$ & $z = -b$, dont les deux premiéres sont égales & de mêmes signes, & les deux derniéres aussi égales & de mêmes signes, il est clair que le penultiéme membre $(\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu)$ est nul : donc* cette courbe doit avoir deux points doubles sur son axe GQ. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu.* * Art. 81.

2.° Il n'est pas moins évident * qu'elle a un troisiéme point double B sur son ordonnée principale GL. Car la comparaison des termes de l'équation donnée, avec ceux de l'équation générale marquée par $(4D)$ dans l'art. 81, donne $\Delta = 1$, $q = 0$, $A = -\frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$, $\zeta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 2bb\sqrt{3}$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, $\phi = 2bb$, $\pi = 0$, & $\sigma = -b^4$. Cela posé, il est visible, 1.° Que $\lambda g - \gamma g^2 + qg^3 = \pi = 0$, ce qui est déja une des conditions de l'art. 82 ; 2.° Outre cela $Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, ou, ce qui est la même chose $(-\frac{8bg^2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - 2g^3 - \frac{2b^4}{g})$ étant égalé à μ, on a $\frac{8bg^2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + 2g^3 + \frac{2b^4}{g} = 0$, ou $g^4 + \frac{4bg^3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + b^4 = 0$, d'où l'on tire $g = -b\sqrt[4]{3}$: 3.° Cette valeur de g étant substituée, dans la formule $(2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg})$, ou, ce qui est la même chose, dans son égale $(-\frac{16b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}g - 3g^2 - \frac{b^4}{gg})$ il vient $(2bb\sqrt{3})$ qui est précisément la valeur trouvée, par la comparaison des termes, pour le coëfficient δ; D'où il suit que l'équation donnée $u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u^3 + 2bbu^2\sqrt{3} - z^4$, * Art. 82.

$+2b^2z^2 - b^4 = 0$, a toutes les conditions requiſes, par l'art. 82, pour exprimer la nature d'une ligne du 4me ordre qui ait trois points doubles, deux ſur ſon axe en des points *R* & *V*, diſtants de *G* (origine des abſciſſes) de la grandeur $GR = b$ & $GV = -b$, & un troiſiéme ſur ſon ordonnée principale *GL*, en un point *B*, diſtant de *G* de la grandeur $GB = -g = b\sqrt[4]{3}$. *Ce qu'il falloit faire voir en ſecond lieu.*

* *Art.* 52. 3.° Pour connoître la nature des trois points doubles de cette courbe, il faut * différentier deux fois ſon équation; la 2de différentiation donnera $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{bb - 3zz}}{\sqrt{4bu\sqrt[4]{3} - 3u^2 - bb\sqrt{3}}}$: Enſorte qu'au point double *R*, ou (par la premiére partie de cet article) $u = 0$, & $z = b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: ce qui

* *Art.* 63. fait voir * que ce point double *R* eſt un point d'interſection. De même au point double *V*, ou (par la premiére partie de cet article) $u = 0$ & $z = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: ce

* *Art. id.* qui fait voir * que ce point double *V* eſt encore un point d'interſection. Enfin au point double *B*, ou (par la ſeconde partie de cet article) $z = 0$ & $u = b\sqrt[4]{3}$, on a $\frac{du}{dz} =$

* *Art. id.* $\pm \frac{b}{0} = \frac{b}{0}$: ce qui fait voir * que les deux tangentes au point double *B* ſe confondent en une & avec l'ordonnée principale *GL*, & par conſéquent que ce point double *B* eſt un point de rebrouſſement auquel l'ordonnée principale *GL* eſt tangente. Donc avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoît non-ſeulement qu'elle a trois points doubles, mais encore quelle eſt la nature de ces trois points doubles. *Ce qu'il falloit faire voir en* 3me *lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXIX. On peut remarquer ici, 1.° Que l'ordonnée principale *GL* eſt le diametre de la courbe

MERAVFmNRBVn, puisque l'on a toûjours

$$z = \pm \sqrt{bb \pm u \sqrt{uu - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}} u + 2bb\sqrt{3}}}.$$

2.° Si l'on prend sur l'ordonnée principale *GL*, du côté où les *(u)* sont négatifs, le point *A*, tel que *GA* soit $= \frac{b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$, ce point *A* sera le point de la courbe où la tangente devient parallele à l'axe.

3.° Si, par le point de rebroussement *B*, on mene, parallelement à l'axe *GQ*, une droite *EBF*: si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point *B*, les parties *BE*, *BF*, l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: les points *E* & *F* seront deux points d'infléxion de la courbe, dont les tangentes seront paralleles à l'ordonnée principale *GL*.

4.° Toutes les droites menées, parallelement à l'axe, entre les points *A* & *B*, rencontrent la courbe en quatre points; Mais les droites menées, parallelement à ce même axe *GQ*, au de-là des points *A* & *B*, par rapport au point *G*, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & la rencontrent toûjours en deux points, à quelque distance qu'elles soient des points *A* & *B*, soit du côté des *(u)* négatifs, soit du côté des *(u)* positifs.

5.° Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points *B* & *E*, ou entre les points *B* & *F*, ou au de-là des points *E* & *F*, par rapport au point *B*, ne rencontrent jamais la courbe qu'en deux points *M* & *N*, dont il y en a toûjours un du côté des *(u)* positifs, & un du côté des *(u)* négatifs.

6.° De tout ce qu'on a remarqué jusqu'ici, il est aisé de comprendre, 1.° Que la courbe *MERAVFmNRBVn* est composée de quatre branches infinies *AREM*, *AVFm*, *BRN*, *BVn*, dont les deux premiéres *AREM*, *AVFm*, s'étendent à l'infini au-dessus de l'axe *GQ*, c'est-à-dire, du côté où les *(u)* sont positifs, & les deux derniéres au-dessous de cet axe, du côté où les *(u)* sont négatifs. 2.° Que les deux

premiéres branches *AREM, AVFm* s'unissent en *A*, sommet d'une sinuosité dont la tangente est parallele à l'axe. 3.° Que les deux derniéres branches *NRB, nVB* s'unissent en *B* par un point de rebroussement, dont la tangente se confond avec l'ordonnée principale. 4.° Que la premiére & troisiéme branche *ARFM, NRB*, se coupent, sur l'axe *GQ*, en un point *R*, où elles forment par conséquent un point d'intersection. 5.° Que la seconde branche *AVFm* coupe la quatriéme branche *nVB*, sur l'axe *GQ*, en un point *V*, où il se trouve par conséquent un second point d'intersection. 6.° Que les deux premiéres branches *AREM, AVFm*, ont chacune un point d'infléxion, l'une en *E*, l'autre en *F*; D'où il suit, que ces deux branches, après avoir été concaves vers leur ordonnée principale *GL*, de *A* en *E*, & de *A* en *F*, deviennent ensuite, l'une & l'autre, convexes vers cette même ordonnée principale *GL*. 7.° Enfin il est aisé de comprendre que les deux derniéres branches *BRN, BVn*, sont toûjours convexes vers leur ordonnée principale *GL*.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

XC. *Une ligne du 4me ordre étant donnée, trouver si elle a des points doubles; Ou, ce qui est la même chose, l'Équation algébrique d'une ligne du 4me ordre étant donnée, connoître si cette équation exprime la nature d'une courbe qui ait des points doubles, & trouver les valeurs des abscisses & des ordonnées, de la courbe en question, correspondantes à ces points doubles.*

SOLUTION.

Soit donnée l'équation générale pour toutes les lignes du 4me ordre, dont on a parlé dans le premier Mémoire & dans l'art. 81 de celui-ci. Elle est désignée ici par (4*D*).

$$(4D)\ldots \Delta u^4 \left.\begin{matrix} +qz \\ +a \end{matrix}\right\} u^3 \left.\begin{matrix} +\beta z^2 \\ +\gamma z \\ +\delta \end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix} +\varepsilon z^3 \\ +\eta z^2 \\ +\lambda z \\ +\mu \end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix} +\nu z^4 \\ +\rho z^3 \\ +\varphi z^2 \\ +\pi z \\ +\varrho \end{matrix}\right\} = 0.$$

Après

Après avoir différentié cette équation, on aura le rapport des (dz) aux (du) exprimé par la fraction marquée ici par (F)

$$(F)\ldots \frac{du}{dz} = \frac{-qu^3 - \overline{2\beta z + \gamma} \times u^2 - \overline{3\varepsilon z^2 + 2\eta z + \lambda} \times u - 4\nu z^3 - 3\rho z^2 - 2\varphi z - \pi}{4\Delta u^3 + \overline{3qz + 3\alpha} \times u^2 + \overline{2\beta z^2 + 2\gamma z + 2\delta} \times u + \varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu}$$

dont le numérateur & le dénominateur s'évanoüiſſent par tout où il y a des points doubles.

Soient de plus les équations ſuivantes marquées par (A) & par (B), qui ne différent, la premiére du numérateur de la fraction (F) égalé à zero, la ſeconde du dénominateur de la même fraction, auſſi égalé à zero, qu'en ce que l'indéterminée (y) s'y trouve au lieu de l'indéterminée (u). Ces deux équations ſe rapportent à deux courbes, que je nomme *Auxiliaires*.

$$(A)\ldots\ldots qy^3 \left.\begin{matrix} +2\beta z \\ +\gamma \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +3\varepsilon z^2 \\ +2\eta z \\ +\lambda \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +4\nu z^3 \\ +3\rho z^2 \\ +2\varphi z \\ +\pi \end{matrix}\right\} = 0.$$

$$(B)\ldots 4\Delta y^3 \left.\begin{matrix} +3qz \\ +3\alpha \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +2\beta z^2 \\ +2\gamma z \\ +2\delta \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +\varepsilon z^3 \\ +\eta z^2 \\ +\lambda z \\ +\mu \end{matrix}\right\} = 0.$$

L'équation marquée par (A) exprime la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3me ordre, mais qui peut être au deſſous, dont l'axe eſt celui de la courbe déſignée par l'équation $(4D)$ & dont les abſciſſes ſont communes à l'une & à l'autre courbe. L'équation marquée par (B) exprime auſſi la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3me ordre, dont l'axe eſt celui des courbes déſignées par les équations (A) & $(4D)$, & dont les abſciſſes ſont communes aux trois courbes.

Cela poſé, il eſt conſtant 1.° que les courbes auxiliaires, déſignées par les équations (A) & (B) peuvent ſe rencontrer en différents points, & qu'aux points de rencontre, les ordonnées qui y aboutiſſent, ſont communes & à la courbe déſignée par l'équation (A) & à la courbe déſignée par l'équation (B).

2.° Il n'eſt pas moins évident, qu'en ſubſtituant dans l'équation *(A)*, au lieu de l'indéterminée *(y)*, ſa valeur (en z & en conſtante) priſe de l'équation *(B)*, on aura une égalité dans laquelle il n'y aura plus d'autre indéterminée que *(z)*, dont les racines réelles donneront les valeurs des abſciſſes, (communes à l'une & à l'autre courbe auxiliaire) correſpondantes aux points de rencontre des deux courbes.

3.° En ſubſtituant enſuite dans l'équation *(B)*, au lieu de l'indéterminée *(z)*, ſes valeurs (en conſtantes) priſes des racines réelles de l'égalité dont on vient de parler *, il eſt viſible qu'on aura de nouvelles égalités, dans leſquelles il n'y aura d'autre indéterminée que *(y)*, dont les racines réelles exprimeront les valeurs des ordonnées communes aux deux courbes auxiliaires, c'eſt-à-dire, les valeurs des ordonnées correſpondantes aux points de rencontre de ces deux courbes.

* *n.° 2 de cet article.*

Ainſi, on aura les valeurs des abſciſſes & des ordonnées, des courbes auxiliaires, aux points où ces deux courbes ſe rencontrent : ou, ce qui eſt la même choſe, on aura les points de rencontre de ces deux courbes.

4.° Maintenant, ſi un ou pluſieurs points de rencontre, des courbes déſignées par les équations *(A)* & *(B)*, tombent ſur la ligne du 4me ordre déſignée par l'équation *(4 D)*, je dis que les endroits de la ligne du 4me ordre où tomberont les points de rencontre des courbes auxiliaires, ſeront autant de points doubles de cette ligne du 4me ordre. Car ces points étant alors communs aux trois lignes déſignées par les équations *(A)*, *(B)*, *(4 D)*, les ordonnées qui y correſpondent ſeront communes aux trois courbes : Donc, dans ces cas, l'indéterminée *(y)*, qui dans les équations *(A)* & *(B)* déſigne les ordonnées des deux courbes auxiliaires, ſera égale à l'indéterminée *(u)* de l'équation *(4 D)*, ou, ce qui eſt la même choſe, à l'indéterminée *(u)* de la fraction marquée par *(F)*. Or comme les équations *(A)* & *(B)* s'évanoüiſſent, lorſqu'on y ſubſtituë, au lieu de *(z)* & de *(y)*, leurs valeurs trouvées pour les points de rencontre des courbes auxiliaires (ce qui eſt évident par les premiers principes de l'Algebre) : il eſt viſible que

les numérateur & dénominateur de la fraction (F) s'évanoüissent dans tous les cas où u est $= y$; Et par conséquent que les points de rencontre des courbes auxiliaires, qui tombent sur la ligne du 4me ordre, y désignent autant de points doubles.

Donc, après avoir trouvé, de la maniére qu'on l'a expliquée ci-dessus *, les valeurs des abscisses & des ordonnées, des courbes auxiliaires désignées par les équations (A) & (B), aux points où ces deux courbes se rencontrent : on substituëra successivement dans l'équation $(4D)$, au lieu de l'indéterminée (u), les différentes valeurs de l'indéterminée (y), & en même temps la valeur correspondante de l'indéterminée (z) : si une ou plusieurs des substitutions font évanoüir tous les termes de l'équation $(4D)$, la ligne du 4me ordre, dont cette équation exprime la nature, aura un ou plusieurs points doubles, & les valeurs des (y) & des (z) correspondants, qui, ayant été substituées, auront fait évanoüir tous les termes de l'équation $(4D)$, désigneront les ordonnées & les abscisses, de la ligne du 4me ordre, correspondantes aux points doubles de cette ligne. Ainsi on sera certain, non-seulement que la ligne donnée a des points doubles, mais encore on aura les valeurs des abscisses & des ordonnées qui correspondent à ces points doubles. *Ce qu'il falloit trouver en 1er lieu.*

* n.° 2 & 3 de cet article.

Après avoir substitué successivement, dans l'équation $(4D)$, au lieu de l'indéterminée (u), les valeurs trouvées, de l'indéterminée (y), aux points de rencontre des deux courbes auxiliaires, & en même temps les valeurs correspondantes de l'indéterminée (z), si aucune des substitutions n'a fait évanoüir tous les termes de l'équation $(4D)$: ou bien, si les deux courbes auxiliaires ne se rencontrent pas, ce qui peut arriver, c'est-à-dire, si la combinaison des équations (A) & (B) ne donne que des racines imaginaires : la ligne du 4me ordre, dont la nature sera exprimée par l'équation $(4D)$, n'aura aucun point double. *Ce qu'il falloit trouver en second lieu.*

EXEMPLE I.

XCI. On demande si la courbe, dont la nature est

exprimée par l'équation ſuivante marquée *(4 D)* a des points

$$(4D)\ldots aau^2 + \overline{az^2 + 3a^2z + 4a^3} \times u = z^4 + 6az^3 + 12a^2z^2 + 9a^3z + a^4$$

doubles. Après avoir différentié cette équation, on a la fraction marquée ici par *(F)*, d'où l'on tire les équations marquées par

$$(F)\ldots \frac{du}{dz} = \frac{-\overline{2az + 3aa} \times u + 4z^3 + 18az^2 + 24a^2z + 9a^3}{2a^2u + az^2 + 3a^2z + 4a^3}$$

(A) & par *(B)* qui ſont ici les équations des courbes auxiliaires.

$$(A)\ldots ay = 2z^2 + 6az + 3a^2$$

$$(B)\ldots 2ay + z^2 + 3az + 4a^2 = 0$$

Ces deux équations combinées enſemble donnent l'égalité $z^2 + 3az + 2a^2 = 0$, qui étant du 2[d] degré, fait connoître que les courbes auxiliaires (qui ſont ici deux paraboles coniques) ſe rencontrent en deux points, auſquels correſpondent les deux abſciſſes $z = -a$, & $z = -2a$, qui ſont les deux racines de l'égalité $zz + 3az + 2aa = 0$: or à l'abſciſſe $z = -a$ correſpond une ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui eſt $y = -a$; & à l'abſciſſe $z = -2a$ correſpond une autre ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui eſt auſſi $y = -a$.

Maintenant ſi l'on ſubſtituë, 1.° dans l'équation donnée *(4 D)*, au lieu des indéterminées *(z)* & *(u)*, les valeurs des *(z)* & des *(y)* du premier point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'eſt-à-dire $(-a)$ au lieu de *(z)*, & $(-a)$ au lieu de *(u)*, tous les termes de l'équation *(4 D)* s'évanoüiſſent : ce qui fait voir * que le premier point d'interſection des paraboles auxiliaires tombe ſur la ligne du 4[me] ordre, dont la nature eſt exprimée par l'équation *(4D)*, & par conſéquent qu'elle a un point double, auquel l'abſciſſe & l'ordonnée ſont l'une & l'autre $= -a$.

* Art. précéd.

2.° Si l'on ſubſtituë dans cette même équation donnée *(4 D)*, au lieu des indéterminées *(z)* & *(u)* les valeurs des *(z)* & des *(y)* du ſecond point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'eſt-à-dire $(-2a)$ au lieu de *(z)* & $(-a)$ au lieu de *(u)*, tous les termes de l'équation *(4 D)* s'évanoüiſſent;

ce qui fait voir * que la courbe proposée a un second point *Art. précéd.
double, & qu'à ce second point double l'absciſſe eſt $= -2a$ & l'ordonnée $= -a$.

Ainſi avant de ſuppoſer la courbe décrite, on connoît par ſon équation, non-ſeulement qu'elle a deux points doubles, mais encore les lieux où ces deux points doubles ſont ſitués par rapport à l'origine de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

EXEMPLE II.

XCII. On demande ſi la courbe $A\phi GEBFG\pi A$*, * Fig. 53.
dont on ſuppoſe ne connoître encore que l'équation marquée ici par $(4D)$, a un ou pluſieurs points doubles.

$$(4D)\ldots u^4 - 4bu^3 \left.\begin{matrix} +2zz \\ -4bz \\ +9bb \end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix} -4bz^2 \\ +8b^2z \\ -10b^3 \end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix} +z^4 \\ -4bz^3 \\ +7b^2z^2 \\ -6b^3z \\ +4b^4 \end{matrix}\right\} = 0.$$

On trouve d'abord le rapport de (du) à (dz) exprimé par la fraction (F).

$$(F)\ldots \frac{du}{dz} = -\frac{\left.\begin{matrix} +4z \\ -4b \end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix} -8bz \\ +8bb \end{matrix}\right\} u \begin{matrix} +4z^3 & +14bbz \\ -12bz^2 & -6b^3 \end{matrix}}{4u^3 - 12bu^2 \left.\begin{matrix} +4z^2 \\ -8bz \\ +18b^2 \end{matrix}\right\} u \begin{matrix} -4bz^2 \\ +8b^2z \\ -10b^3 \end{matrix}}.$$

D'où il ſuit que les deux équations auxiliaires ſont telles qu'on les voit repréſentées ici en (A) & en (B).

$$(A)\ldots\ldots \left\{\begin{matrix} +4z \\ -4b \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} -8bz \\ +8bb \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +4z^3 \\ -12bz^2 \\ +14b^2z \\ -6b^3 \end{matrix}\right\} = 0.$$

$$(B)\ldots 4y^3 - 12by^2 \left.\begin{matrix} +4z^2 \\ -8bz \\ +18b^2 \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} -4bz^2 \\ +8b^2z \\ -10b^3 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Ces deux équations ſont diviſibles, la première par $(4yy - 8by + 4zz - 8bz + 6bb)$, la ſeconde par

$(4yy - 8by + 4zz - 8bz + 10bb)$: Ainſi elles ſe réduiſent, l'une à l'équation $(2A)$, l'autre à l'équation $(2B)$.

$$(2A) \ldots z - b = 0, \quad (2B) \ldots y - b = 0,$$

La premiére des deux nouvelles équations déſigne une ligne droite parallele à l'ordonnée principale, & diſtante de l'origine des (z) de la grandeur (b) : la ſeconde déſigne auſſi une ligne droite parallele à l'axe, & diſtante de cet axe de la grandeur (b); D'où il ſuit que les deux courbes auxiliaires, déſignées par les équations (A) & (B), qui ſe ſont réduites à de ſimples lignes droites, ſe coupent en un point, diſtant de l'axe de la grandeur (b) & de l'origine de cet axe d'une grandeur auſſi $= b$: ce qui fait voir déja que la courbe donnée peut avoir un point double.

Maintenant, ſi l'on ſubſtituë, dans l'équation $(4D)$, au lieu de (z) & de (u), les valeurs (b) & (b) des indéterminées (z) & (y) au point de rencontre des deux lignes auxiliaires: cette ſubſtitution fera évanoüir tous les termes de l'équation $(4D)$; D'où il ſuit que ce point de rencontre des lignes auxiliaires, tombe ſur la courbe donnée $A\phi GEBFG\pi A$ en un point G diſtant de l'origine O de l'axe OP de la grandeur $OP(z) = b$, & de l'axe OP de la grandeur PG
* *Art. 90.* $(u) = b$, & par conſéquent * qu'il y a là un point double.

Donc, avant de ſuppoſer la courbe décrite, on connoît non-ſeulement qu'elle a un point double en G, mais encore qu'elle ne ſçauroit en avoir d'autres. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUE.

XCIII. Il eſt bon de remarquer que la Solution du Probleme précédent eſt, dans de certains cas particuliers, beaucoup plus courte & moins ſujette à de longs calculs, qu'elle ne l'eſt dans le général. Quelquefois on n'a pas beſoin d'avoir recours aux interſections des deux courbes auxiliaires, déſignées par les équations (A) & (B); c'eſt ce qui arrive lorſqu'il n'y a aucun mélange de variable, ni dans le numérateur, ni dans le dénominateur de la fraction marquée par

(F) : car alors la seule extraction des racines des deux égalités formées, l'une par le numérateur égalé à zero, l'autre par le dénominateur aussi égalé à zero, donne les valeurs des *(z)* & des *(u)*, qui étant successivement substituées dans l'équation de la courbe, font connoître si la courbe a ou n'a pas de points doubles. Par exemple, on demande si la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbz^2 = 0$, a des points doubles. Après avoir différentié l'équation, on a $\frac{du}{dz} = \frac{3bz^2 - 3bbz}{2u^3 - 2bbu}$: d'où l'on tire les deux égalités suivantes $z^2 - bz = 0$, & $u^3 - b^2u = 0$; Les racines de la premiére égalité sont $z = 0$ & $z = b$, ausquelles correspondent les racines $u = 0$ & $u = \pm b$ de la 2de égalité.

Or, 1.° $z = 0$ & $u = 0$ étant substitués dans l'équation proposée $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbzz = 0$, tous les termes s'évanoüissent : ce qui fait voir que la courbe proposée a un point double à l'origine de son axe. 2.° Si l'on substituë dans cette même équation, au lieu de *(z)* & de *(u)*, les valeurs $z = b$ & $u = \pm b$, tous les termes s'évanoüissent encore; D'où il suit que cette courbe a deux autres points doubles, de part & d'autre de son axe, distants de cet axe de la grandeur $u = \pm b$, & cela sur une ligne droite parallele aux ordonnées, distante de l'origine des abscisses de la grandeur $z = b$.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

XCIV. *Les points d'intersection d'une ligne du 4me ordre, dont on a l'équation, étant donnés, déterminer si ce point d'intersection est un point double de la premiére, de la seconde, ou de la troisiéme espece.*

SOLUTION.

Soit la courbe *MGDGARCRm**, dont *EP* est l'axe; Le rapport des abscisses *EP* aux ordonnées *PM* étant donné par une équation algébrique quelconque du quatriéme degré, * Fig. 44.

ſoit G un des points doubles de cette courbe, trouvé par le moyen de l'art. 90. Soit $G\Omega$ une droite parallele aux ordonnées PM, menée du point double G ſur l'axe EP; Soit ſuppoſé de plus qu'on a découvert, par l'art. 63, que ce point double G eſt un point d'interſection. On demande ſi ce point d'interſection eſt de la premiére, ſeconde, ou troi-
* Art. 15. ſiéme eſpece.*

Puiſque le point double G eſt donné de poſition, les droites $E\Omega$ & $G\Omega$ ſont données, ainſi on peut tranſporter l'origine des indéterminées de E en G, & par conſéquent prendre GQ pour l'abſciſſe, & QM pour l'ordonnée. D'où il ſuit qu'en nommant GQ (z) & QM (u), le rapport de GQ (z) à QM (u) ſera exprimé par une équation algébrique qu'on pourra toûjours rapporter à l'équation générale de l'art. 61, marquée ici par (10).

$$(10)\ldots \Delta n^4 + qz + \alpha u^3 + \overline{\beta zz + \gamma z + \delta} \times uu + \overline{\epsilon z^3 + \eta zz + \lambda z} \times u + \nu z^4 + \rho z^3 + \phi zz = 0.$$

Cela poſé, par l'art. 63, on menera les droites GT, Gt, tangentes de la courbe au point double G. Si l'une & l'autre de ces tangentes (*Fig. 44.*) rencontre la courbe chacune en un autre point N & n, le point double G n'eſt qu'un point
* Art. 40. n.° 2. double de la premiére eſpece*. Si l'une de ces tangentes GT peut rencontrer la courbe en un autre point N, tandis que l'autre tangente Gt ne ſçauroit la rencontrer en d'autre point qu'en G (*Fig. 59.*) alors le point double G eſt un point
* Art. 41. n.° 1. double de la ſeconde eſpece*. Enfin ſi la courbe n'eſt rencontrée, ni par la tangente Gt, ni par la tangente GT en
* Art. id. d'autre point qu'au point double G, alors* ce point double G eſt de la troiſiéme eſpece.

Maintenant le rapport de (dz) à (du) au point double
* Art. 63. G étant* exprimé par $\frac{du}{dz} = -\frac{\lambda}{2\delta} \pm \frac{1}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi}$; il eſt viſible que les ordonnées $Q\theta$ des tangentes tGn, TGN, ſont $= -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi}$. D'où il ſuit qu'aux

points

points n & N où les tangentes tGn, TGN coupent la courbe $MGDGARCRm$, on a $u = -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$, & cette double valeur de l'indéterminée (u) étant ſubſtituée dans l'équation marquée par (10), il doit en réſulter deux égalités du quatriéme degré. Les racines de la première égalité donneront les points d'interſection de la tangente Gt & de la courbe $MGDGARCRm$, c'eſt-à-dire, les points G & n. Les racines de la ſeconde égalité donneront les points d'interſection de la tangente GT & de la même courbe $MGDGARCRm$, c'eſt-à-dire, les points G & N. Mais puiſque les droites Gt, GT, ſont tangentes de la courbe au point double G, origine des indéterminées (z), il eſt évident qu'il doit y avoir dans chaque égalité au moins trois racines égales à zero : puiſqu'en ce même point G il y a* une abſciſſe GQ $(z) = 0$, trois fois commune à la droite GT & à la même courbe $MGDGARCRm$. * *Art. 19.*

En effet, la ſubſtitution de $-\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$, au lieu de ſon égal (u) dans l'équation marquée par (10), donne les deux égalités qu'on voit ici marquées, l'une par (H) l'autre par $(2H)$, dans chacune deſquelles il y a trois racines

$$(H)\ldots\left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\varphi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\varphi + \beta\lambda^2\delta^2 - \varepsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\varphi^2 - 2\beta\varphi\delta^3 + 2\gamma\delta^4. \\ \left.\begin{array}{l} 2\Delta\lambda\delta\varphi - \Delta\lambda^3 \\ q\lambda^2\delta - q\delta^2\varphi \\ \varepsilon\delta^3 - \beta\lambda\delta^2 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{array}\right\} z^4 - \left\{\begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\varphi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda^2\delta^2 \\ 2\gamma\varphi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ \left.\begin{array}{l} -\alpha\lambda^2\delta \\ +\alpha\delta^2\varphi \\ +\gamma\delta^2\lambda \\ -\eta\delta^3 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{array}\right\} z^3 = 0.$$

$$(2H)\ldots\left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\varphi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\varphi + \beta\lambda^2\delta^2 - \varepsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\varphi^2 - 2\beta\varphi\delta^3 + 2\gamma\delta^4 \\ \left.\begin{array}{l} \Delta\lambda^3 - 2\Delta\lambda\delta\varphi \\ q\delta^2\varphi - q\lambda^2\delta \\ \beta\lambda\delta^2 - \varepsilon\delta^3 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{array}\right\} z^4 - \left\{\begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\varphi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda\lambda\delta^2 \\ 2\gamma\varphi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ \left.\begin{array}{l} +\alpha\lambda^2\delta \\ -\alpha\delta^2\varphi \\ -\gamma\delta^2\lambda \\ +\eta\delta^3 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{array}\right\} z^3 = 0.$$

égales à zero, qui ſont pour le point G trois fois commun à

chacune des droites *Gt, GT*, & à la courbe *MGDGARCRm*, & une quatriéme, qui eſt pour les points ſimples *n* & *N*, où les tangentes *Gt, GT*, coupent la courbe *MGDGARCRm*.

Cela étant ainſi, il eſt viſible que ſi la 4me racine de l'égalité *(H)*, & la 4me racine de l'égalité marquée par *(2 H)* ſont autres que zero (ſoit qu'elles ſoient poſitives, ſoit qu'elles ſoient négatives) : il eſt viſible, dis-je, que les tangentes *Gt, GT* au point double *G* ſeront l'une & l'autre ſécantes de la courbe en des points comme *n* & *N*, & par conſéquent que le point double *G* ne ſera qu'un point double de la premiére eſpece.

Mais ſi la 4me racine d'une des égalités comme *(H)* eſt égale à zero, tandis que la 4me racine de l'autre égalité *(2 H)* eſt autre que zero (ſoit qu'elle ſoit poſitive, ſoit qu'elle ſoit négative) : il eſt viſible que le point *n* ſe confond avec le point double *G*, tandis que le point *N* ne s'y confond pas. Enſorte que la branche *DGMn* a une infléxion en *G*, pendant que la branche *DGA* n'en a point en cet endroit, ce qui fait en *G* un point double de la ſeconde eſpece *.

* *Art.* 15. & 21. *n.*° 2.

Enfin ſi les quatriémes racines des deux égalités *(H)* & *(2 H)* ſont égales à zero, il eſt viſible que non-ſeulement le point *n*, mais encore le point *N* ſe confond avec le point double *G*, enſorte que la branche *DGA* a une infléxion en *G*, auſſi-bien que la branche *DGMn*, ce qui fait en *G* un point double * de la troiſiéme eſpece.

* *Art. id.*

Donc par le moyen des deux égalités précédentes, marquées par *(H)* & *(2 H)* on déterminera toûjours ſi le point double *G* eſt de la premiére, ſeconde ou troiſiéme eſpece. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE I.

* Fig. 51.

XCV. Soit la courbe * *MGDGARCRm*, dans laquelle le rapport des abſciſſes *GQ* (z) aux ordonnées *QM* (u) eſt exprimé par $bu^3 + b^2u^2 - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, il eſt viſible (par les art. 61 & 63) que cette courbe a un point d'interſection à l'origine *G* de ſes abſciſſes *GQ*,

puiſqu'on y a $zz = 0$ & $uu = 0$; & qu'en ce même point G, on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt{2}$. Mais il n'eſt pas moins évident, par l'art. 94, que ce point d'interſection eſt un point double de la ſeconde eſpece ; Car, ſi l'on compare l'équation donnée $bu^3 + b^2u^2 - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, avec l'équation générale marquée par *(10)* dans l'art. 94, on voit que les coëfficients indéterminés de l'équation *(10)* ſont ici $\Delta = 0$, $q = 0$, $\alpha = b$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = -2b\sqrt{2}$, & $\phi = -2bb$: Or, en ſubſtituant ces valeurs dans les égalités marquées par *(H)* & par *(2H)* dans le même art. 94, on trouve que la premiére de ces égalités *(H)* devient $z^4 = 0$, & que la ſeconde *(2H)* devient $z^4 + 4bz^3\sqrt{2} = 0$, enſorte que la 4me racine de l'une de ces égalités eſt égale à zero, tandis que la 4me racine de la ſeconde égalité eſt autre que zero. Donc* des deux tangentes tG, TG, de la courbe au point double G, il y en a une qui eſt tangente d'une branche DGM, qui a une infléxion en ce même point d'interſection G, tandis que l'autre TG eſt tangente d'une branche DGA qui n'a point d'infléxion au point d'attouchement G. Donc* le point double G n'eſt que de la ſeconde eſpece.

* *Art. 94.*

* *Art. 75.*

COROLLAIRE I.

XCVI. Puiſque la racine de l'égalité *(2H)* eſt $z = -4b\sqrt{2}$; il eſt évident qu'après avoir pris ſur l'axe GQ, du côté où les *(z)* ſont négatifs, le point q, tel que Gq ſoit $= 4b\sqrt{2}$, ſi par ce point, on mene une droite qN parallele aux ordonnées QM, le point N où cette droite rencontrera la tangente TG, prolongée autant qu'il ſera néceſſaire, ſera celui où cette même tangente TG rencontre la courbe $MGDG$ $ARCRm$, après l'avoir touchée au point double G.

COROLLAIRE II.

XCVII. Il eſt clair, par les art. 71 & 72, qu'en prenant ſur l'axe GQ, du côté où les *(z)* ſont négatifs, le point R,

tel que GR soit $= b\sqrt{2}$: il est clair, dis-je, que ce point R est encore un point d'interſection ou un ſecond nœud de la courbe $MGDGARCRm$. D'où il ſuit que ſi l'on tranſporte l'origine des abſciſſes de G en R, en faiſant RQ $(z + b\sqrt{2}) = x$, on aura l'équation $bu^3 + bbuu - x^4 + 2bx^3\sqrt{2} - 2b^2x^2 = 0$, qui exprime le rapport des abſciſſes RQ aux ordonnées QM. Cela poſé, il eſt évident que ce ſecond point double R eſt encore un point double de la ſeconde eſpece, ce qui ſe prouve en comparant cette nouvelle équation avec l'équation générale, marquée par $(\iota\,\sigma)$ dans l'art. 94, de même que par la comparaiſon de l'équation $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, on a trouvé * que le point double G étoit un point double de la ſeconde eſpece.

* Art. 95.

REMARQUES.

XCVIII. On peut remarquer, 1.° qu'en prenant ſur la droite GL & ſur la droite RL, (l'une & l'autre paralleles aux ordonnées QM,) en prenant, dis-je, du côté où les (u) ſont négatifs, les points D & C, tels que GD & RC ſoient l'une & l'autre $= b$: Les points D & C ſeront ceux où la courbe $MGDGARCRm$ coupe les deux droites GL, RL parallelement à l'axe GQ.

2.° Si ſur l'axe GQ on prend, du côté où les abſciſſes GQ ſont négatives, le point B, tel que GB ſoit $= \frac{b}{\sqrt{2}}$, ſi par ce point B, on éleve la droite BA parallele à GL, ſur laquelle on prenne la partie BA égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 + buu - \frac{1}{4}b^3 = 0$, le point A eſt celui où cette droite BA eſt coupée par la courbe $MGDGARCRm$ parallelement à ſon axe GQ.

3.° On peut remarquer encore que cette droite BA prolongée à l'infini eſt le diametre de la courbe $MGDGARCRm$; Que cette courbe a deux branches $AGDGM$, $ARCRm$, qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de ce diametre ; Que chaque branche ſe noüe, l'une au point G, en formant le folium GDG, l'autre au point R, en formant le folium

RCR. Enfin que ces deux branches infinies sont unies ensemble par l'arc *GAR* qui fait une espece de sinuosité, dont le sommet est en *A*. Propriétés qui se déduisent si aisément de son équation $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2b^2z^2 = 0$; qu'il suffit de les indiquer.

4.° Enfin il faut remarquer que cette courbe, qui est un *Bifolium parabolique*, ne differe du *Bifolium MGHDKGA ROCFRm* * de l'art. 73, qu'en ce que les deux points doubles de celui qu'on examine ici * sont de la seconde espece, au lieu que ceux du *Bifolium* de l'art. 73 sont de la premiére espece : ce qui suffit pour faire deux différentes especes de courbe.

* Fig. 44.
* Fig. 51.

EXEMPLE IV.

XCIX. Soit la courbe *AGDGMEHFNRCRA* * dans laquelle le rapport des ordonnées $BQ\ (x)$ aux abscisses $QM\ (u)$ est exprimé par l'équation $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4x^4 - 8bbxx\sqrt{2} + 8b^4 = 0$: après avoir prouvé, par les Propositions précédentes *, que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ, l'un en G, l'autre en R, tels que $BG = b\sqrt{\sqrt{2}}$ & $BR = -b\sqrt{\sqrt{2}}$, & que ces deux points doubles sont des points d'intersection *, puisqu'on y a toûjours $\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{2\sqrt{2}}$: on demande si ces deux points d'intersection sont de la premiére, seconde ou troisiéme espece.

* Fig. 52.
* Art. 81.
* Art. 67. & 72.

On transportera l'origine des abscisses de B en G, en prenant $z = x - b\sqrt{\sqrt{2}}$, ou bien en faisant $x = z + b\sqrt{\sqrt{2}}$; & en substituant cette valeur de (x) dans l'équation donnée, on aura l'équat. $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4z^4 + 16bz^3\sqrt{\sqrt{2}} + 16bbzz\sqrt{2} = 0$ qui exprime le rapport des abscisses GQ aux ordonnées QM. Cela fait, on comparera cette nouvelle équation avec celle de l'art. 94, & l'on aura $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = -4b$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -8bb$, $\epsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 4$, $\rho = 16b\sqrt{\sqrt{2}}$, $\phi = 16bb\sqrt{2}$; ensuite substituant les valeurs de ces coëfficients, ainsi trou-

vées, dans les égalités marquées par *(H)* & par *(2H)* dans le même art. 94, la premiére égalité *(H)* deviendra $3z^4 + 8bz^3\sqrt{\sqrt{2}} = 0$, tandis que la seconde *(2H)* se réduit à $z^4 = 0$: ensorte que la quatriéme racine de l'une de ces égalités étant autre que zero, pendant que la quatriéme racine de l'autre égalité est $= 0$, il est visible* que des deux tangentes *GT, Gt*, de la courbe au point double *G*, il y en a une qui est tangente d'une branche *DGA*, qui n'a point d'infléxion en *G*, tandis que l'autre est tangente d'une branche *DGM* qui a une infléxion en *G*; D'où il suit* que le point double *G* est de la seconde espece.

* Art. 94.

* Art. 15.

COROLLAIRE I.

C. Puisque la quatriéme racine de l'égalité *(H)* $3z^4 + 8bz^3\sqrt{\sqrt{2}} = 0$ est $z = -\frac{8}{3}b\sqrt{\sqrt{2}}$, ce qui donne $x = -\frac{5}{3}b\sqrt{\sqrt{2}} = BR + \frac{2}{3}BR$, il est clair qu'en prenant sur l'axe *BQ*, au de-là du point *R*, par rapport au point *B*, le point *q*, tel que $Rq = \frac{2}{3}BR$, il est clair, dis-je, que si l'on mene par ce point *q* une droite *qN* parallele aux ordonnées *QM*, le point *N*, où cette parallele rencontrera la tangente *TG*, sera celui où cette même tangente rencontre la courbe *AGDGMEHFNRCRA*, après l'avoir touchée au point double *G*.

COROLLAIRE II.

CI. Par la même voye on prouvera que le point d'intersection *R* de la même courbe *AGDGMEHFNRCRA* est un point double de la seconde espece, & l'on trouvera de même le point où l'une des tangentes de la courbe, au point double *R*, coupe la portion de la courbe *AGDGMEH*.

REMARQUES.

CII. Il n'est pas hors de propos de remarquer ici en passant, 1.° Qu'en prenant sur l'ordonnée principale *BL* les points *A* & *H*, tels que *BA* soit égale à la moindre des ra-

cines réelles de l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, & *BH* égal à la plus grande des racines réelles de la même égalité, les points *A* & *H* feront ceux où la courbe *AGD GMEHFNRCRA* coupe l'ordonnée principale parallelement à son axe *BQ*.

2.° Que l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, n'ayant que deux racines réelles, qui sont même positives (ainsi qu'il est aisé de le connoître par les premiers principes de l'Algebre) il s'ensuit que l'ordonnée principale *BL* ne rencontre la courbe en question qu'en deux points.

3.° Que cette même ordonnée principale *BL* est le diametre de la courbe *AGDGMEHFNRCRA*, puisqu'on a par-tout $x = \pm \sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$.

4.° Après avoir mené par les points doubles *G* & *R* les droites *GE, RF,* paralleles aux ordonnées *QM*, soient pris sur ces paralleles les points *I* & *K*, tels que *GI* & *RK* soient l'une & l'autre $= 2b$; Si l'on prend, de part & d'autre du point *I*, les points *E* & *D*, & de part & d'autre du point *K* les points *F* & *C*, tels que *IE, ID, KF, KC*, soient les unes & les autres $= 2b\sqrt{3}$: les points *E* & *D* seront ceux où la courbe coupe la droite *GE* parallelement à l'axe *BQ*, & les points *F* & *C*, ceux où cette même courbe coupe la droite *RF* parallelement au même axe *BQ*.

5.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale *BL*, du côté où les *(u)* sont positifs, le point ω, tel que $B\omega = 4b$, & mené par le point ω la droite $\phi\omega\pi$ parallele à l'axe *BQ*; Si sur cette même droite $\phi\omega\pi$, de part & d'autre du point ω, on prend les points ϕ & π, tels que $\omega\phi$ & $\omega\pi$ soient l'une & l'autre $= b\sqrt{5}\sqrt{2} = BG\sqrt{5}$, les points ϕ & π seront les points de la courbe *AGDGMEHFNRCRA*, où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale.

6.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale *BL*, du côté où les *(u)* sont négatifs, le point a, tel que $Ba = b$,

& mené par le point a, la droite *gah*, parallele à l'axe *BQ*, si sur cette même parallele *gh*, on prend, de part & d'autre du point a, les parties a*f* & a*c*, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; & les parties a*h*, a*g*, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$, les points *f*, *c*, *h* & *g* seront quatre points de la courbe où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale *BL*.

7.° Toutes les droites, menées parallelement à l'axe au de-là des points *E* & *F*, par rapport au point *B*, ne rencontrent la courbe en aucun point : car, tant que (u) est plus grand que $2b + 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs de $x = \pm\sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$ sont imaginaires. De même toutes les droites, menées parallelement à l'axe au de-là des points *C* & *D*, par rapport au point *B*, ne rencontrent la courbe en aucun point : car, tant que $(-u)$ surpasse $2b - 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs de $x = \pm\sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$ sont imaginaires. D'où il suit que la courbe ne s'étend pas, le long de son ordonnée principale *BL*, au de-là des poins *E* & *F*, du côté où les (u) sont positifs, ni au de-là des points *C* & *D* du côté où les (u) sont négatifs.

8.° Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale, au de-là des points ϕ & π, par rapport au point ω, ne rencontrent la courbe en aucun point : car dès que (x) surpasse $b\sqrt{5\sqrt{2}}$, les quatre racines de l'égalité $x^4 - 2bbxx\sqrt{2} + \frac{1}{4}u^4 - bu^3 - 2bbuu + 2b^4 = 0$, (dans laquelle au lieu de (x) on auroit mis une grandeur qui surpasseroit $b\sqrt{5\sqrt{2}}$) sont imaginaires. D'où il suit que la courbe ne s'étend pas, le long de son axe *BQ*, au de-là des points ϕ & π; Mais comme par le nombre précédent, elle ne s'étend pas au de-là des points *E*, *F*, *C*, *D*, le long de son

ſon ordonnée principale, il eſt clair que cette courbe rentre en elle-même.

9.° On démontrera de même, 1.° Que toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale *BL*, entre les points *f* & *h*, ou bien entre les points *c* & *g*, rencontrent la courbe en quatre points, dont il y en a toûjours deux du côté où les *(u)* ſont poſitifs, & deux du côté où les *(u)* ſont négatifs. 2.° Que les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale *BL*, entre les points *f* & *c*, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, du côté où les *(u)* ſont poſitifs: enſorte que les portions de la courbe en queſtion, ſituées au de-là de l'axe *BQ*, par rapport aux points *E* & *F*, c'eſt-à-dire, du côté où les ordonnées *(u)* ſont négatives, forment deux *folium GhDfG*, & *RcCgR*, dont les nœuds ſont en *G* & en *R*; Ce qui pourroit faire donner à cette courbe le nom d'*Ovale biſoliée*.

EXEMPLE III.

CIII. Soit la Lemniſcate de M. Bernoulli * *GMFBEGφAπG*, dans laquelle le rapport des abſciſſes *GQ* (z) aux ordonnées *QM* (u) eſt exprimé par $u^4 + \overline{2zz + bb} \times uu + z^4 - bbzz = 0$; Il eſt viſible, 1.° Que cette courbe a un point double à l'origine *G* de ſon axe, puiſqu'on y a toûjours $uu = 0$ & $zz = 0$; 2.° Que ce point double eſt un point d'interſection, puiſqu'en ce même point $\frac{du}{dz} = \pm 1$. Cela poſé, on demande ſi ce point d'interſection *G* eſt de la premiére, ſeconde ou troiſiéme eſpece. * Fig. 53.

Puiſque le point d'interſection eſt à l'origine *G* de l'axe, il ne faut pas tranſporter cet origine ailleurs; ainſi en comparant l'équation donnée avec l'équation générale marquée par *(10)* dans l'art. 94, on aura $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\varphi = -bb$; Enſuite, ſubſtituant les valeurs de ces coëfficients dans les égalités *(H)* & *(2H)* du même art. 94, ces deux égalités deviennent l'une & l'autre $z^4 = 0$, enſorte

que la 4me racine de l'égalité *(H)* & la 4me racine de l'égalité *(2 H)* sont l'une & l'autre égales à zero. D'où * il suit,

* Art. 94.

1.° Que la tangente tG de la courbe au point double G, touche une branche πGF, qui a une infléxion au point d'intersection G.
2.° Que la tangente TG, au même point double G, touche une autre branche $EG\phi$ qui a aussi une infléxion au point d'intersection G. Donc le point double G est un point d'intersection de la troisiéme espece. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

AVERTISSEMENT.

Cette derniére Courbe étant connuë depuis que l'illustre Géometre, dont elle porte le nom, s'en est servi pour construire l'Isochrone-Paracentrique de M. Leibnitz, je ne crois pas devoir m'arrêter sur cet Exemple, comme j'ai fait sur les précédents. Tout le monde sçait que cette courbe rentre en elle-même, & que les tangentes aux points A *&* B, *extrémités de son axe, sont paralleles aux ordonnées* QM *à cet axe, quel que soit l'angle* MQG.

EXEMPLE IV.

* Fig. 54.

CIV. Soit la courbe $MegfmBEG\phi AFG\varepsilon B\mu c\gamma\pi\xi$ *, dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par l'équation $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, (où l'on suppose toûjours $a < b$) il est visible que cette courbe a un point double à l'origine G de ses abscisses GQ, & de ses ordonnées QM, puisqu'on y a toûjours $zz = 0$ & $uu = 0$, & que ce point double est un point d'intersection, puisque $\frac{du}{dz}$ y est $= \pm \frac{b}{a}$. Mais il n'est pas moins évident que ce point d'intersection est un point double de la troisiéme espece; Car si l'on compare l'équation donnée $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, avec l'équation générale, marquée par *(10)* dans l'art. 94, on a ici $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -aa$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, & $\phi = bb$: or en substituant ces valeurs dans les égalités marquées par *(H)* & par *(2H)* dans le même art. 94, on voit que ces deux égalités se réduisent à celle-ci $\overline{b^4 - a^4} \times z^4 = 0$.

dans laquelle les quatre racines de (z) sont $=0$. D'où il suit* que le point d'intersection G est un point double de la troisiéme espece. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.* * Art. 94.

REMARQUES.

CV. Il est aisé de voir, 1.° que l'axe GQ de cette courbe est un des diametres de la courbe en question, puisque l'on a toûjours $u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$.

2.° Si l'on prend sur le diametre GQ, de part & d'autre du point G, les parties Gg & $G\gamma$, l'une & l'autre $=b$, les points g & γ seront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'ordonnée principale GL.

3.° Si l'on prend sur le diametre GQ, de part & d'autre du point G, les parties GS, $G\omega$, l'une & l'autre $=\sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, & ensuite les parties $G\sigma$, $G\delta$, l'une & l'autre $=\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$: si des points S, ω, σ & δ, on éleve des droites SE, $\omega\varepsilon$, σe, δc, paralleles à l'ordonnée principale GL, & les unes & les autres $=\frac{a}{\sqrt{2}}$: si l'on prolonge également ces quatre droites, du côté où les (u) sont négatifs, ensorte que SF soit $=SE$, $\omega\varepsilon = \omega\phi$, $\sigma e = \sigma f$ & $\delta c = \delta\pi$, les points E, F, e, f, ε, ϕ, c, π, seront les huit points de la courbe qui ont des tangentes paralleles à l'ordonnée principale GL.

4.° Il est aisé de voir que l'ordonnée principale GL, prolongée de part & d'autre du point G, est un des diametres de cette courbe, puisque l'on a toûjours $z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$.

5.° Si l'on prend sur le diametre GL, de part & d'autre du point G, les parties GB, GA, l'une & l'autre $=\alpha$, les points B & A seront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'axe GQ.

6.° Toutes les droites menées, parallelement au diametre GL, entre les points $\mathcal{S}$ & ω, rencontrent la courbe en quatre points; Car dès que $\pm z < \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de l'ordonnée (u), qui sont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont réelles. Mais les droites menées, parallelement à ce même diametre GL, entre les points $\mathcal{S}$ & σ, ou entre les points ω & δ, ne rencontrent point la courbe: car dès que $\pm z > \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, & $< \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de (u), qui sont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont imaginaires. D'où il suit que la portion de courbe $GEB\varepsilon GFA\phi G$, renfermée entre les droites ESF, $\varepsilon\omega\phi$, n'est pas unie, sur le plan, aux deux autres portions $Megfm$, $\mu\epsilon\gamma\pi\xi$, de la même courbe.

7.° Toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points σ & g, ou entre les points δ & γ, rencontrent la courbe en quatre points. Car dès que $(\pm z)$ surpasse $\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$ & est moindre que b, les quatre valeurs de l'ordonnée (u), qui sont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont réelles. Mais les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, au de-là des points g & γ, par rapport au point double G, à quelque distance qu'elles soient de ce point double G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que $\pm z > b$, des quatre valeurs de l'indéterminée (u) il n'y en a que deux réelles, sçavoir $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, les deux autres $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$

étant toûjours imaginaires dans ce cas-là. D'où il suit que la portion de courbe $Megfm$ & son opposée $\mu C\gamma\pi\xi$ s'étendent l'une & l'autre à l'infini, de part & d'autre de l'ordonnée principale GL, en formant les quatre branches infinies geM, $\gamma C\mu$, gfm, $\gamma\pi\xi$, dont les deux premiéres sont du côté des (u) positifs, & les deux autres du côté des (u) négatifs.

8.° Toutes les droites, comme $ML\mu$, ou bien $ml\xi$, menées parallelement à l'axe GQ, au de-là des points B & A, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que $GL\,(+u)$ ou $Gl\,(-u)$ surpassent GB ou $GA\,(\pm a)$ des quatre valeurs de l'indéterminée (z) $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$, il n'y en a que deux réelles; sçavoir, $\pm\sqrt{\frac{1}{2}bb + \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$, les deux autres $\pm\sqrt{\frac{1}{2}bb - \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$ étant imaginaires. D'où il suit que la portion de courbe $GEB\varepsilon G$ $FA\phi G$ (qui est entre les quatre branches infinies geM, $\gamma\epsilon\mu$; gfm, $\gamma\pi\xi$) ne s'étend pas au de-là des points B & A, le long de l'ordonnée principale GL; & comme elle ne s'étend pas au de-là des points S & ω, le long de l'axe GQ (comme il a été remarqué dans le nombre 6 de cet article) il est évident que c'est une portion de courbe rentrante en elle-même; D'ailleurs puisque cette portion de courbe $GEB\varepsilon G$ $FA\phi G$ a un point double d'intersection en G, il s'ensuit que cette portion de courbe est une *Lemniscate* conjuguée.

9.° Après avoir mené, par le point g, une droite gH, parallele à l'ordonnée principale GL: si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point g, les portions gH, gh, l'une & l'autre égales à Gg: si par les points G & h, on mene la droite Gh, & par les points G & H, la droite GH: ces deux droites prolongées à l'infini, de part & d'autre du point G, seront asymptotes à la courbe : la 1[ere] aux branches infinies gfm, $\gamma\epsilon\mu$, & la seconde aux branches infinies geM, $\gamma\pi\xi$. D'où il suit que cette courbe est composée de quatre branches hyperboliques, & d'une Lemniscate conjuguée.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

CVI. *Les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points simples, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.*

DÉMONSTRATION.

* Fig. 55.

Soit une ligne du 4me ordre $ZMEFHXShfeV$*, coupée au point m par une Section conique $BmNA8mD$, il faut demontrer que cette Section conique peut couper la ligne du 4me ordre en sept autres points, comme $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, $6m$, $7m$, $8m$, & qu'elle ne sçauroit la couper en un plus grand nombre.

Après avoir mené à discretion la ligne droite GQ (que l'on prendra pour Axe commun à la ligne du 4me ordre $ZMEFHXShfeV$ & à la Section conique $BNAD$), par un point quelconque Q, de la droite GQ, on menera une droite QMN, sécante en M de la ligne du 4me ordre, & en N de la Section conique : si on nomme l'abscisse GQ (z), l'ordonnée de la ligne du 4me ordre $QM(u)$, & l'ordonnée de la Section conique $QN(y)$, le rapport de l'abscisse $GQ(z)$ à l'ordonnée $QM(u)$ sera exprimé par une équation qui ne sera qu'un cas particulier de l'équation générale, marquée par $(4D)$*, puisque (par l'art. 31 du premier Mémoire) cette équation exprime la nature de toutes les lignes du 4me ordre : De même le rapport des abscisses $GQ(z)$ aux ordonnées $QN(y)$ de la Section conique $BNAD$ sera exprimé par une équation particuliére qu'on pourra toûjours rapporter à l'équation générale, marquée par $(2D)$*, puisque (par l'art. 29 du premier Mémoire, nomb. 2) cette équation exprime la nature de toutes les lignes du 2^{d} ordre.

* Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.

* V. la même Table.

Cela posé, il est évident que l'ordonnée $QN(y)$ de la Section conique $BNAD$ devient égale à l'ordonnée $QM(u)$

de la ligne du 4me ordre dans tous les points *m, 2m, 3m*, &c. où ces deux courbes s'entrecoupent ou se rencontrent; D'où il suit qu'on a alors $y = u$, ainsi l'équation *(2 D)* devient telle qu'on la voit marquée par (Δ).*

Maintenant, si l'on substituë dans l'équation marquée par *(4D)*, au lieu de l'indéterminée *(u)*, sa valeur prise de l'équation marquée par (Δ), il est certain qu'il en viendra une équation dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnuë *(z)* dont les racines donneront les valeurs des abscisses *Gq, G2q, G3q, G4q, G5q*, &c. ausquelles correspondent des ordonnées *qm, 2q2m, 3q3m, 4q4m, 5q5m*, &c. communes aux deux courbes *ZMEFHXShfeV* & *BNAD*; Or cette substitution, dont j'obmets ici le calcul, qui est un peu long, mais qui n'a rien de difficile, ni qui ne soit à la portée de tout le monde, cette substitution, dis-je, donne l'égalité marquée par *R* (dans laquelle les coëfficients *A, B, C, D, E, F, G, H* & *K*, sont donnés en q, α, β, γ, δ, ϵ, η, λ, μ, ν, ρ, π, ϕ, σ, & en *f, e, g, h, b*, tels qu'on les voit representées dans la Table qui est à la fin de ce Mémoire). Mais puisque l'égalité marquée par *(R)* est du huitiéme degré, il est évident qu'elle peut fournir huit valeurs réelles & différentes de l'indéterminée *(z)*, & par conséquent huit abscisses *Gq, G2q, G3q, G4q, G5q, G6q, G7q, G8q*, ausquelles correspondent huit ordonnées *qm, 2q2m, 3q3m, 4q4m, 5q5m, 6q6m, 7q7m, 8q8m*, communes à la ligne du 4me ordre *ZMEFHXShfeV*, & à la ligne du 2^{d} ordre ou Section conique *BNAD*, & qu'il ne sçauroit y en avoir un plus grand nombre. Donc, il peut y avoir huit points simples *m, 2m, 3m, 4m, 5m, 6m, 7m* & *8m*, communs à la Section conique & à la ligne du 4me ordre, sans qu'il puisse y en avoir un plus grand nombre. Donc les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.*

COROLLAIRE.

CVII. Si la Section conique *BNAD* passe par un des points doubles *(5m)* de la ligne du 4me ordre *ZMEFH XS5mh6mfeV**, il y aura dans l'égalité marquée par *(R)*, deux racines réelles & de mêmes signes, & cela parce que le point double est équivalent à deux points simples *.

* Fig. 56.

* *Art. 12.*

Si cette Section conique passe par deux des points doubles de la ligne du 4me ordre, l'égalité marquée par *(R)* * outre les deux premiéres racines réelles égales & de mêmes signes, en aura encore deux autres réelles égales & de mêmes signes.

* *V. la Table à la fin de ce Mémoire.*

Enfin si cette Section conique *BNAD** passe par les trois points doubles *2m*, *4m* & *6m* de la ligne du 4me ordre *ZEMFHXSheZ*, l'égalité du huitiéme degré, marquée par *(R)*, outre la premiére paire de racines réelles égales & de mêmes signes, qu'elle doit avoir à cause du point double *2m*: outre la seconde paire de racines réelles égales & de mêmes signes qu'elle aura à cause du point double *4m*, aura encore une troisiéme paire de racines réelles égales & de mêmes signes, à cause du troisiéme point double *6m*; & cela parce que trois points doubles sont équivalents à six points simples, pris deux à deux.

* Fig. 57.

REMARQUES.

CVIII. De même qu'on a démontré dans l'art. 106, que les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre : on démontrera, en suivant la même méthode, 1.° Que les lignes du 5me ordre peuvent être coupées en dix points, par une Section conique, & ne sçauroient l'être en un plus grand nombre : 2.° Que les lignes du 6me ordre peuvent être coupées en douze points, par une Section conique, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points. 3.° Que les lignes du 7me ordre peuvent être coupées par une Section conique en quatorze points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. 4.° Enfin que les lignes algébriques de

l'ordre

l'ordre *n* peuvent être coupées, par une Section conique, en autant de points qu'il y a d'unités dans $2n$, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. Vérités qui ont déja été démontrées par M. Mac-Laurin dans son sçavant Traité intitulé *Geometria organica.*

PROPOSITION X.

THEOREME.

CIX. *Une ligne qui a quatre points doubles ne sçauroit être du 4me ordre.*

DÉMONSTRATION.

Soit * une ligne courbe *ZMBEBGFGRCRVDVX*, dont on connoît les quatre points doubles *B, G, R* & *V*. Je dis que cette ligne ne sçauroit être du 4me ordre. Après avoir pris à discretion sur cette même courbe un point simple quelconque *M*, par les quatre points doubles donnés *B, G, R, V*, & par le 5me point *M*, pris à discretion, faites passer une Section conique *OAH*, (ce qui est toûjours possible par l'art. 180 des Sections coniques de M. le M. de l'Hôpital) il est visible que la Section conique coupera la courbe qui a les quatre points doubles *B, G, R, V*, en neuf points; Car chaque point double étant équivalent à deux points simples *, les quatre points doubles sont équivalents à huit points simples, & le point d'interfection *M* fait le neufviéme; Or, par l'art. 106, les lignes du 4me ordre ne sçauroient être coupées par une Section conique en plus de huit points. Donc puisque la courbe *ZMBEBGFGRCRVDVX*, qui a les quatre points doubles *B, G, R* & *V*, peut toûjours être coupée par une Section conique *OAH* en neuf points, il s'ensuit que cette courbe ne sçauroit être du 4me ordre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Fig. 58.

* *Art. 12.*

COROLLAIRE.

CX. Il suit de-là & de l'art. 83, qu'une ligne du 4me ordre, ne sçauroit avoir plus de trois points doubles.

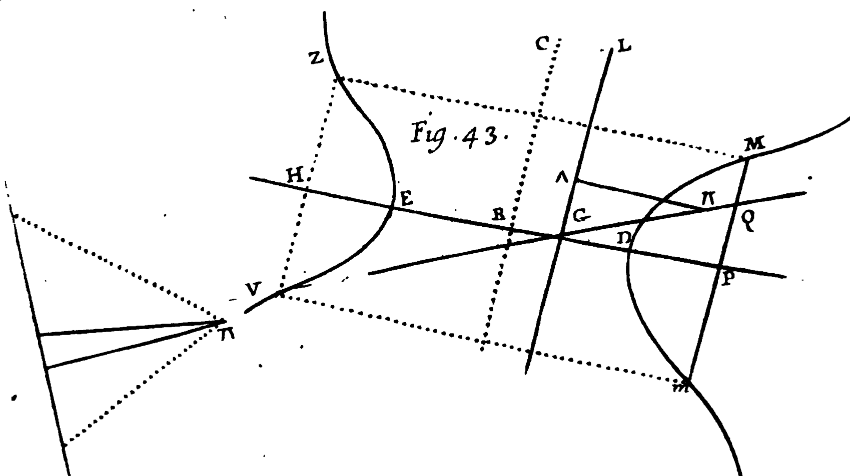
REMARQUES.

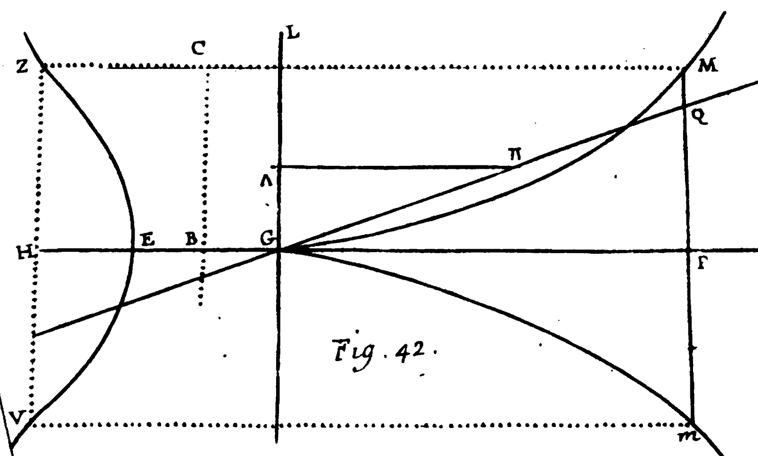
CXI. Après avoir prouvé qu'une ligne du 4me ordre ne sçauroit avoir plus de trois points doubles, on démontrera de même, 1.° Qu'une ligne du 5me ordre ne sçauroit jamais avoir plus de six points doubles. 2.° Qu'une ligne du 6me ordre ne sçauroit en avoir plus de dix. 3.° Qu'une ligne du 7me ordre ne sçauroit en avoir plus de quinze. 4.° Qu'une ligne du 8me ordre ne sçauroit en avoir plus de vingt-un, & ainsi de suite, suivant la progression des nombres triangulaires. Ensorte que si n exprime, par le nombre de ses unités, l'ordre d'une ligne quelconque, le nombre des points doubles, dont les lignes de cet ordre sont susceptibles, sera exprimé par le nombre triangulaire, qui dans le Triangle de M. Pascal correspond au nombre naturel $n-1$. Or, on sçait que le nombre triangulaire, correspondant au nombre naturel $n-1$, est $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2} = \frac{nn-3n+2}{2}$; Donc cette expression $\frac{nn-3n+2}{2}$ exprime toûjours, par le nombre de ses unités, le plus grand nombre de points doubles dont une ligne de l'ordre exprimé par n est susceptible. Vérité qui n'avoit pas encore été remarquée jusqu'ici.

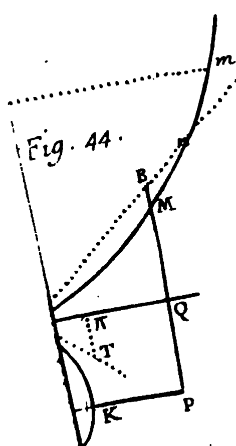
AVERTISSEMENT.

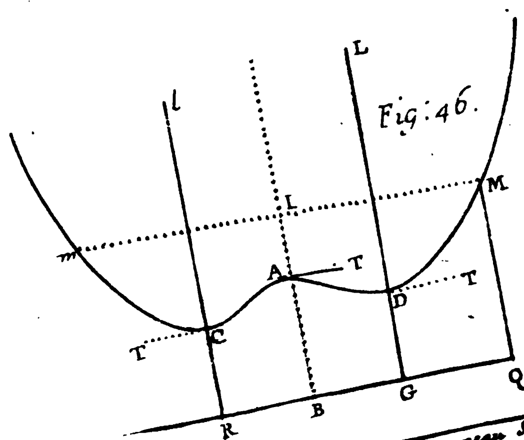
Ce Mémoire étant déja trop long, on a été obligé, après qu'il a été lû à l'Académie, d'en retrancher, à l'impression, une grande partie, pour laisser de la place aux Mémoires suivants. Ce qu'on a retranché de celui-ci concerne les Osculations de deux branches d'une même courbe, & les Lemniscates infiniment petites : propriétés singuliéres dont les lignes algébriques ne deviennent susceptibles que lorsqu'elles sont du quatriéme ordre, ou d'un ordre supérieur au quatriéme. On a donc pris le parti de renvoyer tout ce qui regarde cette Théorie à un troisiéme Mémoire, qu'on a remis dans les Regiſtres de l'Académie, avec celui où il est traité des différentes sortes de points triples qu'on rencontre souvent sur les lignes du quatriéme ordre. Ce qui doit précéder l'énumération de ces mêmes lignes.



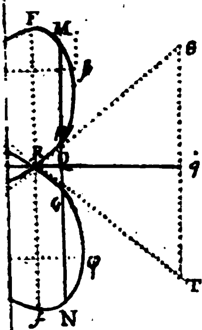


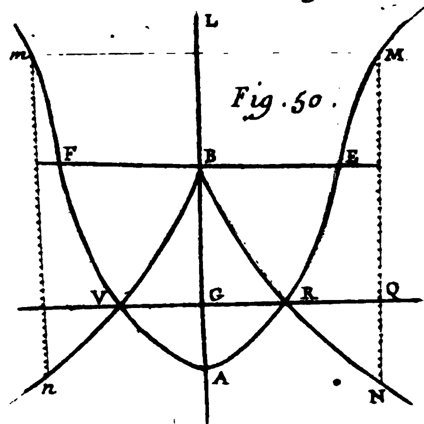


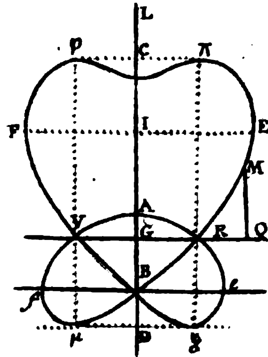


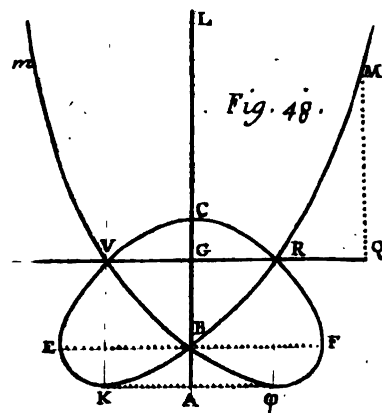


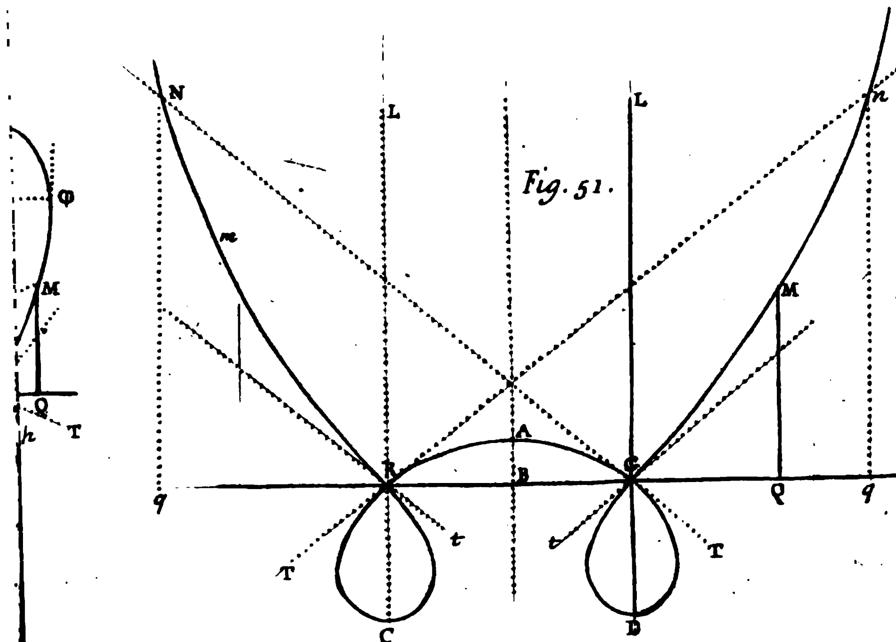
Ph. Simonneau Sculp.



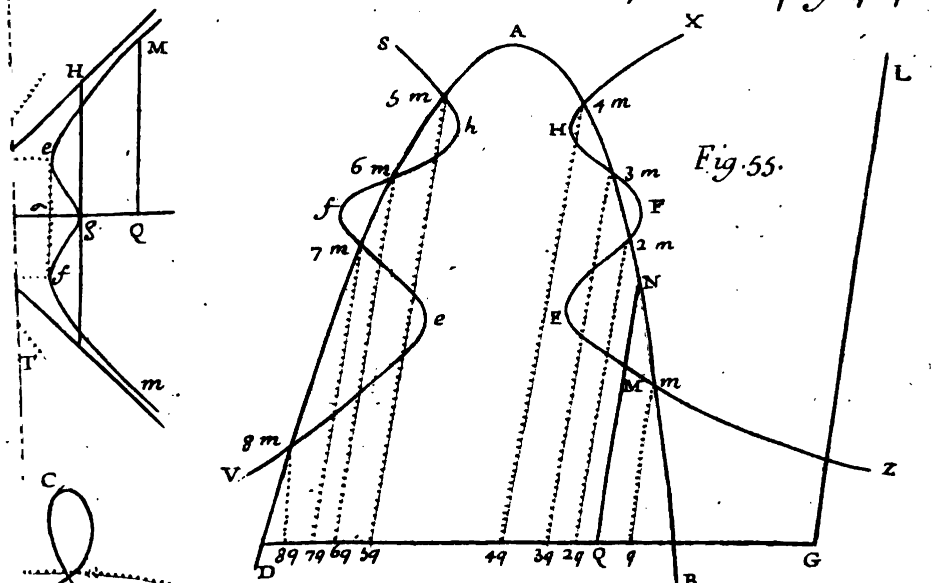


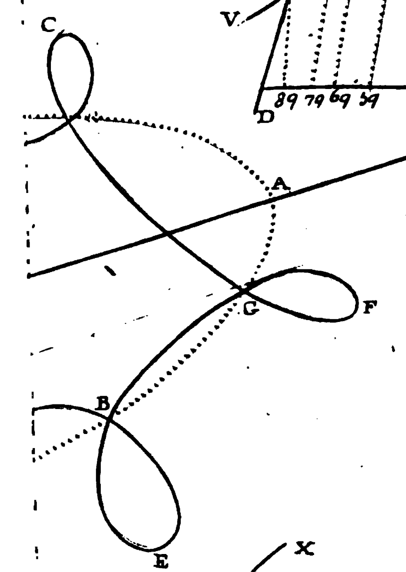


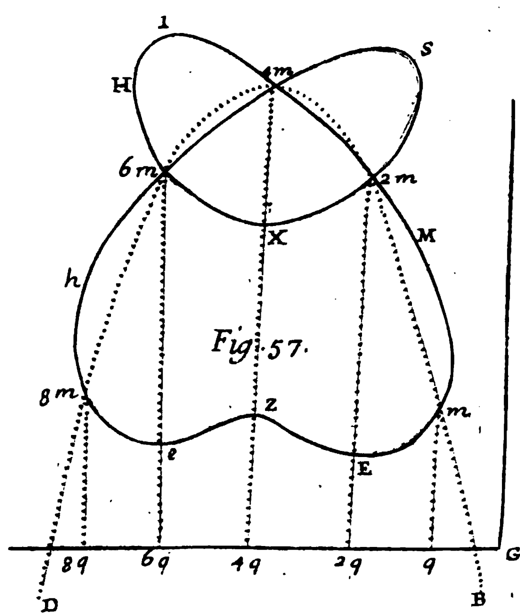


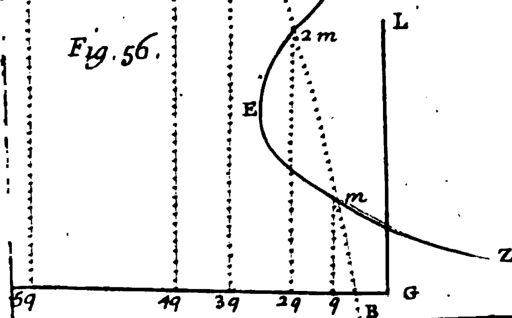


Ph. Simonneau Sculp.









Simonneau Sculp.

DE LA CAPSULE DU CRISTALLIN.

Par M. PETIT le Médecin.

NOUS avons dit, dans nôtre précédent Mémoire, que le Criſtallin eſt enchaſſé dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un diamant dans ſon chaton, & y eſt retenu par une membrane qui l'enveloppe, & qui pour cela eſt nommée la *Capſule du Criſtallin*. 16 Aouſt 1730.

Cette membrane eſt auſſi appellée *Arachnoïde* par les Anatomiſtes, parce que ſa fineſſe la fait reſſembler à une toile d'Araignée.

D'autres l'ont nommée *Criſtalloïde*. Quelques-uns ont douté de ſon exiſtence ; ce qui eſt d'autant plus étonnant, que Galien * en a parlé, & la fait reſſembler à une pellicule d'Oignon, à laquelle auſſi Véſale * la compare : il la fait encore reſſembler à de la Corne très-fine & très-tranſparente. Caſſerius Placentinus * en donne la deſcription. Bartholin & d'autres ont parlé de cette Membrane. Après cela il n'y avoit qu'à la chercher, elle n'eſt pas difficile à trouver dans les Animaux à quatre pieds, principalement dans le Mouton, le Bœuf & le Cheval ; & quoiqu'elle ſoit un peu plus difficile dans l'Homme, on la trouve facilement auſſi-tôt qu'on l'a vû démontrer une ſeule fois ; ce qu'il y a de ſurprenant, c'eſt que Brigs * n'en dit pas un ſeul mot, & qu'un auſſi habile Anatomiſte que Ruiſch ait douté long-temps de ſon exiſtence. Voici comme il s'en explique lui-même * : *De hujuſce membranulæ exiſtentiâ Anatomici alii aliter ſentiunt : quidam illam dari negant, nonnulli ambigant, alii eandem admittunt, ipſe quoque diù anceps hæſi. Quid de hoc negotio ſtatuerem ! verùm cùm repleviſſem arterias Oculi ovini cereâ materiâ, aperiebam Oculum; membranaſque perſcrutabar, & ſic videbam per membranulam araneam plurimas arteriolas diſperſas.* On voit qu'il ne s'eſt

* *De Oculis. cap. 3.*

* *Lib. 7. c. 14.*

* *Lib. 5. c. 16. edit. 1622.*

* *Ophtalmographia.*

* *Theſaurus. Anat. 2. p. 37.*

aſſûré de cette membrane que par l'injection, quoique très-facile à démontrer dans le Mouton.

Cette Capſule eſt adhérente par ſa partie poſtérieure à la membrane hyaloïde ou vitrée; on peut les ſéparer facilement l'une de l'autre ſans le ſecours du ciſeau ou du ſcalpel, ce qui ne ſe peut à l'endroit où la Vitrée fait une continuité avec cette membrane dans toute la circonférence du Criſtallin, car il faut ſe ſervir d'un inſtrument tranchant pour les ſéparer. La partie antérieure de cette Capſule ſe diviſe facilement de la circonférence au centre, & du centre à la circonférence, ſelon la rectitude de ſes fibres.

Quelques Anatomiſtes* ont crû que cette Capſule tient au Criſtallin par ſes bords. Mais ſi l'on diſſéque cette partie avec attention, on trouvera que cette Capſule ne tient en aucun endroit du Criſtallin. D'autres diſent hardiment qu'elle n'eſt point continüe avec la membrane hyaloïde, parce que, diſent-ils, il s'enſuivroit que du moment que cette Capſule ſeroit altérée, ſon altération ſe communiqueroit infailliblement à la membrane hyaloïde, elle la corromproit, & rendroit par-là inutiles toutes les opérations des Cataractes criſtallines, puiſque la membrane du corps vitrée perdroit ſa tranſparence. 1.° Il ne faut que des yeux pour voir la continuité de la Capſule avec la membrane hyaloïde, cela ſe découvre avec la même facilité que l'on voit que la peau du bras eſt continüe avec celle de la main. 2.° Il ne s'enſuit pas de ce qu'une membrane eſt continüe avec une autre, que les altérations ſe communiquent infailliblement de l'une à l'autre; une inflammation peut occuper une partie de la main ſans ſe communiquer à l'autre partie, quoique la peau ſoit continuë. 3.° L'eſpece d'altération, dont on entend parler, qui eſt ſans doute l'opacité de la Capſule, ne ſe doit rencontrer que bien rarement; je ne l'ai jamais trouvée opaque dans aucune des Cataractes que j'ai vû ſur le mort, & l'on verra dans la ſuite de ce Mémoire, que je n'ai pû la rendre opaque par la plûpart des eſprits acides. J'ai une fois rencontré une

* *Hiſt. de l'Acad. des Sc. année 1722. p. 16.*

tache blanche, ronde, d'une ligne de diametre dans cette Capſule, mais qui s'eſt diſſipée, en frottant la partie interne de cette Capſule, ce n'étoit que des particules du Criſtallin devenuës blanches & opaques, & qui ſont reſtées ſur la ſurface interne de la Capſule, lorſque je l'ai enlevée, & ſuppoſé que cette membrane devienne opaque, il ne ſeroit pas poſſible de déterminer ſi c'eſt le Criſtallin ou la membrane, en l'examinant à travers la Cornée.

Il eſt très-difficile de déterminer l'épaiſſeur de cette Capſule, elle eſt dans l'Homme une fois plus épaiſſe qu'une toile d'araignée, elle eſt plus fine de la moitié à ſa partie poſtérieure. On la trouve de cette derniére fineſſe dans la Carpe, le Barbeau, le Brochet, l'Anguille, & d'autres Poiſſons de cette ſorte. Le Marſoüin a cette Capſule un peu plus épaiſſe que celle de l'Homme, je l'ai vû une fois auſſi épaiſſe dans la Carpe de Mer.

Je l'ai vû dans le Bœuf une fois plus épaiſſe que dans l'Homme. Elle eſt plus épaiſſe dans le Cheval que dans le Bœuf.

Le Chien, le Chat, le Loup, le Lapin, le Lievre l'ont tant ſoit peu plus épaiſſe que celle de l'Homme. Elle eſt plus épaiſſe dans le Mouton que dans ces Animaux, mais moins que dans le Bœuf.

Malgré la fineſſe de cette membrane dans l'Homme, elle n'y eſt pour-tant pas ſi tranſparente à ſa partie antérieure, que dans les autres Animaux qui l'ont beaucoup plus épaiſſe, comme le Bœuf & le Cheval.

Si l'on regarde la partie poſtérieure du Criſtallin, de quelque âge que ce ſoit, enveloppé de ſa Capſule, on y trouve plus de tranſparence, que lorſqu'on le regarde par ſa partie antérieure qui paroît tant ſoit peu terne; mais ſi on enleve la Capſule, le Criſtallin paroît également tranſparent des deux côtés. J'ai néantmoins vû des Criſtallins d'Homme, dont la partie antérieure de la Capſule étoit auſſi tranſparente que la poſtérieure. Elle eſt d'une très-grande tranſparence dans ſes deux ſurfaces dans tous les Animaux à quatre pieds, les Oiſeaux & les Poiſſons.

Le ligament ciliaire qui prend ſon origine du plus grand cercle de l'Uvée, s'attache & ſe termine tout à l'entour de la partie anterieure de la Capſule ſur laquelle ce ligament prolonge ſes fibres, & les vaiſſeaux qu'il lui fournit. Il y a des Anatomiſtes qui ont crû que ce ligament s'attache au Criſtallin. Briggs eſt de ce ſentiment, les vaiſſeaux que le ligament fourni à la Capſule ne ſont que des lymphatiques qui dégorgent & répandent leurs liqueurs dans la cavité de la Capſule. Il ſe trouve des occaſions où ces vaiſſeaux ſont remplis de ſang, & pour lors on les voit ramefiés ſur la partie antérieure de la Capſule, je n'en ai jamais trouvé à la partie poſtérieure. Ces vaiſſeaux, ſont formés par pluſieurs petits troncs qui ont leur racine dans le ligament ciliaire, leurs ramifications ſont dirigées vers le centre de la capſule, & forment entr'elles des anoſtomoſes, c'eſt ce que j'ai vû dans quelques Enfants nouveau-nés, mais dans un jeune Marſoüin, la Capſule paroiſſoit ſeulement rougeâtre, il a fallu ſe ſervir d'une Loupe, pour y reconnoître la diſtribution des vaiſſeaux qui étoit la même que dans les Enfants. La Tête de ces Enfants avoit reſté long-temps au paſſage de la Matrice dans des accouchements laborieux. Les parties extérieures de la Tête étant comprimées, le Sang n'a pû y circuler, & s'eſt porté dans les parties intérieures où il s'eſt trouvé pour lors en très-grande quantité, il a forcé les embouchures des vaiſſeaux lymphatiques qui ſe trouvent très-diſpoſés à ſe dilater dans les nouveau-nés, & à donner paſſage au Sang qui les remplit; mais dans le jeune Marſoüin cela eſt arrivé d'une maniére un peu différente, il avoit été pêché avec ſa mere, qui avoit les mammelles remplies de lait. Lorſqu'on tire les Poiſſons de l'eau, on les jette rudement dans les Barques où ils ſe débattent avant que de mourir, & comme ils ſont couchés ſur le côté, les parties extérieures de la Tête & des Yeux ſe froiſſent & ſe meurtriſſent, & pour lors le Sang qui ſe trouve dans les parties extérieures du globe de l'Oeil, n'y pouvant circuler, force les embouchures des vaiſſeaux excrétoires-intérieures, dans

lesquels il s'introduit, comme je l'ai dit des Fœtus humains.

Les vaisseaux de la Capsule n'étoient point remplis dans la mere de ce jeune Marsoüin, dont j'ai disséqué les Yeux. J'ai encore vû ces vaisseaux seringués dans un Fœtus & dans quelques Chats chés un Médecin Anglois qui étoit à Paris. Il en avoit injecté plusieurs, dont quelques-uns avoient réüssis avec du suif seul, coloré avec le cinabre. Le suif avoit été mis en digestion pendant quinze jours dans un Matras sur le sable avec son vaisseau de rencontre.

J'ai disséqué les Yeux de trois Hommes, morts à la Charité avec de grandes inflammations aux yeux ; j'ai examiné la Capsule du Cristallin, je n'y ai trouvé aucun vaisseau rempli de sang.

J'ai examiné avec un grand soin les Capsules des Sujets dont les vaisseaux se sont trouvés seringués ou remplis de sang, pour voir si quelques-uns de ces vaisseaux se continuoient dans le Cristallin ; mais quelque précaution que j'aye prise, je n'en ai trouvé aucun, ni dans les Fœtus dont les vaisseaux de la Capsule étoient remplis de cire ou de sang, ni dans les Chats & le jeune Marsoüin dont j'ai parlé, ni dans quelques Cristallins de Veau dans lesquels l'injection avoit réüssi.

Le célebre M. Ruisch [a], qui paroît avoir injecté plusieurs Animaux, dont il a examiné les Yeux, ne dit rien des vaisseaux du Cristallin, quoiqu'il décrive les vaisseaux de la Capsule ; il dit même une chose qui lui est arrivé, & qu'il est bon de rapporter : Ayant, dit-il, rempli de cire un Oeil de « Mouton, & disséqué cet Oeil, je remarquai plusieurs arteres [b] « dispersés sur la membrane arachnoïde ; je mis ce Cristallin « avec sa Capsule dans une liqueur limpide, mais le jour suivant « voulant examiner les mêmes vaisseaux, je ne les trouvai plus. «

La raison qu'il en donne me paroît très-plausible : J'avois, « dit-il, rempli de matiére de cire *(cereâ materiâ)* les arteres « de l'Oeil jusques près le Cristallin, où elle étoit restée sans «

[a] *Thesaur. Anatom. 2. p. 37.* c'est la suite du même endroit que j'ai rapporté ci-dessus, page 1.

[b] Il veut dire, *les vaisseaux lymphatiques arteriels.*

» pénétrer dans la membrane arachnoïde qui enveloppe le
» Cristallin, mais la matiére de cire ayant poussé devant elle
» le sang qu'elle avoit trouvé dans les arteres, avoit tellement
» rempli les vaisseaux de la membrane arachnoïde, que la cire
» n'y a plus trouvé de passage, & ce sang a été dissout & dis-
» sipé par la liqueur dans laquelle on a mis tremper le Cristallin
» avec sa Capsule. Je rapporte ceci, afin que ceux qui feront ces sortes d'injections prennent garde à cette circonstance, peut-être n'y avoit-il que du sang dans toutes les Capsules que j'ai vû.

* *Tractatus de circulari humorum motu in Oculis.*

Pag. 45.

Examinons présentement ce que pense Hovius * sur cette matiére, lui qui paroît avoir fait quantité d'injections pour les Yeux seuls. Il croit que le Cristallin a des vaisseaux qui pénétrent sa substance. Il dit d'abord, que le Cristallin est un tissu de vaisseaux transparents neurolymphatiques qui portent & rapportent la lymphe, recouvert d'une tunique transparente & très-fine: *Est itaque humor cristallinus contextum mere vasculosum è nervis pellucidis neuroque lymphaticis, tum ad, tum ab ducentibus vasis, constructum, tenuissima & pellucida tunica obductum.* Voyés, dit-il, la Figure 4, Tab. 5. Voici l'explication qu'il donne de cette Figure *.

Pag. 152.

Humor est cristallinus nostra methodo resolutus cum vasculis fluctuantibus depictus. Voilà le titre de cette explication. La Figure, dit-il, représente un Cristallin résout ou dissout par une méthode qui lui est particuliére avec des vaisseaux qui flottent, c'est pourtant ce que l'on n'y voit point, elle représente plûtôt la première partie de son explication. A, *cristallinus est humor, more nostro post tunicæ ablationem in laminas divisus.* Effectivement le Cristallin paroît fendu du centre à la circonférence, comme s'il l'avoit mis tremper dans quelque liqueur acide, ou qu'il l'eût fait boüillir de même que ceux que j'ai démontré à l'Académie. On voit autour de ce Cristallin une distribution de vaisseaux toute semblable à celle que j'ai vûë à la partie antérieure de la Capsule, injectée elle

* Il est bon de voir cette Figure dans Hovius même, en lisant cet endroit du Mémoire.

est

est divisée & ouverte en plusieurs parties pour découvrir le Cristallin. Il dit que ce sont des vaisseaux du Cristallin séparés des lames supérieures du Cristallin. BB, *vascula sunt cristallina conquassatione è laminis superioribus, divulsa, expansa.* Il les a séparé *conquassatione,* par les secousses & les battements, apparamment dans de l'eau, c'est ce qu'il faut deviner sur le titre de cette Figure, *cum vasculis fluctuantibus,* ce qui marque que c'est dans quelque liqueur qu'il a battu ce Cristallin. Il s'est peut-être imaginé que l'on pourroit croire que le Cristallin peut se dissoudre de maniére qu'il n'en reste que les vaisseaux comme il arrive au Foye, dont on peut séparer les vaisseaux de la substance glanduleuse, après l'avoir fait macérer quelque temps dans l'eau : mais il y a bien de la différence, le Foye a des vaisseaux capables de résister aux secousses & aux battements que l'on est obligé de faire, encore les faut-il bien ménager pour ne rompre de vaisseaux que le moins qu'il est possible. Il ne faut pas s'attendre de conserver des vaisseaux aussi fins que ceux qu'il suppose dans le Cristallin, il s'en brise de bien plus gros que l'on ne peut conserver. Si on bat un Cristallin dans l'eau avant de l'avoir laissé tremper quelque temps, on le brise en plusieurs molécules, dans lesquelles on ne voit aucun vaisseau lymphatique, pas même avec le Microscope, on n'y remarque que les fibres que j'ai démontrées à l'Académie. Si l'on fait tremper le Cristallin dans l'eau pendant quelques jours, les fibres qui le composent se dissolvent, & deviennent une matiére semblable à de la boüillie; s'il y avoit des vaisseaux différents de ces fibres, on devroit en trouver quelques ramifications, car ces vaisseaux doivent être différents des fibres par leur direction.

Supposé qu'il y eût des vaisseaux remplis d'injection, ils ne pourroient facilement se séparer de la substance du Cristallin, & laisser cette substance divisée en lame, comme il le dit, tout doit se séparer en molécules, des vaisseaux si délicats se briseroient encore plus facilement que les autres parties du Cristallin.

Enfin Hovius dit, en comparant les vaisseaux de l'Humeur *P. 45. & 47.*

vitrée avec ceux du Criſtallin, que ceux de l'Humeur vitrée ſont longs, & ont peu de ſubdiviſion, que ceux du Criſtallin ſont plus étroits & plus ſerrés, & dont on ne peut trouver
Page 100. les ſubdiviſions, *In Criſtallino vero arctiora & firmiùs compacta ſunt, imperſcrutabiles ſubeunt ſubdiviſiones ;* & il répéte encore qu'on ne peut trouver les ſubdiviſions de ces vaiſſeaux qui ſont pourtant, ſelon lui, entre les lames qui compoſent le Criſtallin, néantmoins il repréſente les diviſions & les ſubdiviſions de ces vaiſſeaux, c'eſt donc par imagination, il ne dit pas un mot des vaiſſeaux de la Capſule. Il faut pourtant que ces vaiſſeaux paſſent à travers la Capſule, pour aller au Criſtallin. Il démontre dans la Table 4, Fig. 3, 4 & 5, les vaiſſeaux qui vont à la Membrane vitrée & à l'Humeur vitrée, & ne parle point de ceux qui vont à la Capſule du Criſtallin, ſans doute qu'elle a auſſi des vaiſſeaux, nous les avons vû. Hovius auroit dû nous repreſenter les tiges de ces vaiſſeaux, ceux qui ſe diſtribuënt dans la Capſule, & l'endroit où ils percent le Criſtallin, mais au lieu de cela il repréſente deux choſes qui me paroiſſent incompatibles ſur un même Criſtallin. 1.° La ſéparation des prétendus vaiſſeaux du Criſtallin. 2.° La ſubſtance du même Criſtallin diviſée en lames. Que reſulte-t-il de cette Figure ? Les vaiſſeaux qu'il repréſente ſont les vaiſſeaux, tels qu'il les a vû ſéringués dans la Capſule, & qu'il attribuë aux lames ſupérieures du Criſtallin. Il aura mis ce Criſtallin dans quelque liqueur acide, ou dans l'eau boüillante, comme j'ai fait, qui étant ſéché à l'air, ſe diviſe en lame, & pour lors ces deux choſes peuvent ſe trouver enſemble.

Après tout, il ne dit point quels ſont les Animaux dont il a employé les Yeux pour faire les obſervations, dont nous venons de parler, il devoit du moins dire le nom de l'Animal, dont il repréſente le Criſtallin avec ſes vaiſſeaux: outre cela il ſe tient très-reſervé ſur les moyens dont il s'eſt ſervi dans ſes prétendües préparations. Il ne l'eſt pas moins ſur la matiére de ſon injection, qu'il ne declare point. A dire le vrai, tout cela
Page 92. m'eſt fort ſuſpect dans un Homme qui dit, qu'il ſeroit indigne

à un honneste Homme de cacher les découvertes sur l'Humeur aqueuse, la Vitrée & le Cristallin.

S'il y avoit quelque vaisseau qui passât de la Capsule dans le Cristallin, j'avois lieu d'espérer de les trouver dans les Yeux séringués ou remplis de sang, que j'ai disséqués avec toute la précaution possible ; on pourroit, & même on devroit découvrir ces vaisseaux dans les Cristallins des Yeux de Chevaux qui ne sont point séringués, ou dans les Cristallins de gros Poissons, mais on n'y rencontre pas la moindre fibre qui communique de la Capsule au Cristallin ; il n'y a donc aucune communication du Cristallin avec sa Capsule, c'est ce que M. Antoine*, le plus habile Oculiste de son temps, avoit remarqué : d'où il conclud que *de toutes les parties de nôtre corps, le Cristallin est la seule partie qui n'a point de continuité avec ses voisines par aucune fibre ni vaisseau.*

* *Traité des Maladies de l'Oeil, descrip. de l'Oeil du Cristall. ch. 1 1.*

Je n'ai jamais trouvé cette Capsule opaque dans aucun des Yeux que j'ai disséqués, soit d'Homme, soit d'Animaux à quatre pieds, & je l'ai trouvée toûjours transparente dans toutes les Cataractes que j'ai disséquées dans les Cadavres ; & ce qu'il y a de singulier, c'est que la Cornée & la membrane hyaloïde trempées dans l'eau boüillante, ou dans des Esprits acides, ou dans l'Esprit de Vin, deviennent opaques presque dans le moment qu'on les y met, néantmoins la membrane cristalline ne devient opaque que dans l'Esprit de Nitre. Ce n'est pas même une entiére opacité, elle se dissout le plus souvent dans cet Esprit, & quelquefois dans l'Esprit de Sel, & lorsqu'elle ne se dissout point dans le dernier, elle y conserve sa transparence. J'ai quantité d'expériences de Cristallins de Boeuf trempés dans l'Esprit de Sel pur, la membrane est restée entiére, transparente, ferme, & se soûtenoit par elle-même, quoique le Cristallin fût très-opaque. Cette membrane ne se dissout point dans les autres Esprits acides, & y conserve toûjours sa transparence, néantmoins tous les Cristallins que l'on met dans ces Esprits avec leur Capsule, deviennent opaques, comme je l'ai dit, il faut pour cela que la liqueur traverse cette Capsule. La même chose est arrivée aux Cris-

tallins trempés dans les dissolutions de plusieurs sortes de Sels.

Cette membrane est extensible, comme il est facile de le remarquer par le gonflement qui lui arrive en la soufflant par une petite incision qu'on y fait exprès, je l'ai fait voir à l'Académie, puis elle se remet dans son premier état, ce qui marque son ressort qui lui est nécessaire, afin qu'elle s'étende & se ressert toutes les fois qu'il se répand de la liqueur dans sa cavité, & qu'elle se dissipe.

Quelques-uns croyent que cette Capsule comprime le Cristallin & l'applattit au moyen de la contraction des fibres qui composent le ligament ciliaire, qui étant pris pour un sphincter, & les fibres qui composent la Capsule, pour les tendons des fibres du ligament, lorsque les fibres de ce ligament ciliaire se mettent en contraction, elles tirent leurs tendons, étendent la Capsule, compriment la surface du Cristallin & l'applattissent. Mais ces fibres me paroissent bien foibles pour un tel office, qui demande plus de force pour vaincre le ressort du Cristallin ; outre cela ces fibres s'attachent obliquement de devant en derriére sur la circonférence de la Capsule, principalement dans l'Homme, ce qui la rendroit plus capable de faire avancer le Cristallin en devant; si cela se pouvoit, il vaudroit mieux rapporter cet effet à l'effort des muscles des Yeux : j'espere donner un Mémoire sur cette matiére.

Cette Capsule a trois usages. 1.° Elle retient le Cristallin dans le chaton de l'Humeur vitrée, sans qu'il puisse changer de situation. L'on remarque qu'aussi-tôt que cette membrane est ouverte dans le vivant par quelques coups reçûs sur l'Oeil, le Cristallin sort de son chaton, & s'applique sur la partie postérieure de l'Uvée, où il ne reste pas long-temps sans devenir louche, puis opaque, comme l'expérience le fait voir; parce qu'il est gonflé par l'Humeur aqueuse dont il s'imbibe. Cette liqueur écarte inégalement les fibres du Cristallin les unes des autres, les couches ne se trouvent plus paralleles, ce qui dérange la direction des pores pour le passage de la lumiére, & forme l'opacité. Il arrive la même chose à un Cristallin trempé dans l'Eau commune.

2.° Cette Capsule sépare le Cristallin de l'Humeur aqueuse, & empêche qu'il ne soit incessamment baigné de cette humeur, qui en l'humectant, le feroit gonfler, comme je viens de le dire.

3.° Les vaisseaux lymphatiques fournissent une liqueur qu'ils répandent dans sa cavité, dont le Cristallin est incessamment humecté *. En quelque endroit que l'on perce cette Capsule à la partie antérieure ou postérieure, on voit sortir ordinairement cette liqueur, après quoi la Capsule se flétrit, & perd sa tension à proportion de la quantité de la liqueur qui s'est épanchée. Il arrive quelquefois qu'en perçant cette membrane à sa partie antérieure, elle se fend tout aussi-tôt jusqu'à la circonférence, c'est ce que j'ai vû dans l'Oeil de la Carpe de Mer, de quelques Chats ; je l'ai aussi vû dans des Yeux de Boeuf que j'avois fait tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures, ce qui n'arrive que parce que le Cristallin est imbibé & gonflé de liqueur, & que pour lors il est fort serré par sa Capsule, qu'il déchire en se dilatant dans le moment qu'on fait l'ouverture. Le Cristallin se fend quelquefois lui-même par trois rayons du centre à la circonférence. Les Yeux trempés dans l'eau n'ont pas toûjours leurs Cristallins gonflés, mais on y trouve toûjours une certaine quantité de liqueur qui a pénétré toutes les membranes, & qui s'est introduite dans la cavité de la Capsule.

Je n'en ai jamais trouvés dans l'Homme dont la Capsule se soit déchirée après les avoir percés. L'on en rencontre même, dans ceux qui n'ont point été trempés, qui ne donne aucune liqueur. Mais la surface interne de cette Capsule & la surface externe du Cristallin se trouvent humectées, il n'y a quelquefois de liqueur que dans un Oeil, il n'y en a point dans l'autre, ce que j'ai trouvé aussi dans quelques Animaux à quatre pieds.

* M. Antoine Maistrejean, dans son *Traité des Maladies de l'Oeil, Description de l'Oeil, chap. 14,* a dit par conjecture, qu'il y a un suc nourricier qui s'épanche dans la cavité de la Capsule, dont le Cristallin est tout aussi-tôt imbibé : il ne dit point qu'il ait vû ce suc.

Cette liqueur eſt claire, tranſparente & très-liquide dans l'Homme, le Chien, le Chat, le Loup, le Liévre, le Lapin, le Mouton, l'Agneau, le Veau; celle que l'on trouve dans le Bœuf & le Cheval eſt viſqueuſe, & file comme l'Humeur vitrée, filtrée par le papier gris.

Adverſ. 6. p. 90. M. Morgagni a trouvé cette liqueur dans la Capſule du Criſtallin de l'Homme, du Bœuf, du Veau, dans leſquels pourtant il ne l'a pas toûjours rencontrée; il ne l'a pas vûë dans les Poiſſons, mais il dit que quelques-uns l'y ont trouvée.

J'ai trouvé cette liqueur dans un ſeul Marſoüin, de pluſieurs que j'ai diſſéqués: je n'en ai point trouvé dans un grand nombre d'autres Poiſſons, mais la partie extérieure de leur Criſtallin étoit très-humectée, ce qui la rend très-molle dans quelques Poiſſons, quoique la partie intérieure de ces mêmes Criſtallins ſe trouve quelquefois dure comme de la Corne. J'ai encore trouvé cette liqueur dans le Dindon & le Canard.

Généralement parlant, plus les Criſtallins ſont gros, plus on trouve de cette liqueur; neantmoins on en trouve dans les Lapins & les Liévres, davantage que dans le Mouton qui a le Criſtallin plus gros. Je n'ai jamais trouvé le Criſtallin du Lapin & du Liévre ſans cette liqueur.

Pour trouver, avec autant de préciſion qu'il eſt poſſible, la quantité de cette liqueur, il faut tirer de l'Oeil le Criſtallin avec ſa Capſule, le peſer dans une balance qui puiſſe trébucher du moins à un demi-grain, après quoi il faut ouvrir la Capſule du Criſtallin à ſa partie antérieure & poſtérieure avec une Lancette ou un Scalpel très-fin, en faire ſortir la liqueur par une légere preſſion, & l'imbiber avec une éponge, afin qu'il ne reſte que le moins qu'il eſt poſſible, deſſus & dedans la Capſule, dont il ne faut point dépoüiller le Criſtallin, puis le peſer. La diminution du poids fera connoître la quantité de liqueur contenuë dans la Capſule. C'eſt de cette maniére que j'ai trouvé que la Capſule du Criſtallin de l'Homme en contenoit un demi-grain, lorſqu'il s'y en eſt rencontré; j'en ai trouvé juſqu'à un grain dans les Yeux que j'ai mis tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures.

J'en ai trouvé au plus un grain & demi dans les Yeux du Chien-dogue : deux grains dans ceux du Mouton.

Le Lapin & le Liévre en contiennent jusqu'à 2 grains & demi : le Bœuf en a au plus 4 grains, & j'en ai trouvés jusqu'à 12 grains dans quelques Yeux de Chevaux.

J'ai voulu faire des expériences sur cette liqueur, il n'y a pas moyen de la faire sur celle de l'Homme, je n'ai pû en ramasser un seul grain de dix-huit Yeux ; le peu qu'il en a ne peut se rassembler pour former une goutte, & ne se détache pas du Cristallin & de sa Capsule. On ne peut non plus en rassembler assés dans les Yeux de Mouton pour faire une seule expérience ; car en supposant que tous les Yeux de Mouton contiennent chacun 2 grains de cette liqueur, on pourroit au plus en retirer un grain de chacun, il faudroit du moins dix-huit ou vingt Yeux pour en réünir assés pour faire une expérience, mais on ne trouveroit peut-être qu'un de ces Yeux qui contiendroit 2 grains de cette liqueur, & il s'en trouveroit beaucoup qui n'en contiendroient pas un grain & demi, on n'en trouve quelquefois qu'un grain, ainsi de quarante ou cinquante Yeux de Mouton, à peine en trouveroit-on assés pour faire une seule expérience. J'ai donc été obligé de me servir de la liqueur que l'on trouve dans la Capsule du Cristallin des Yeux de Bœufs & de Chevaux, qui, comme je l'ai dit, file & contient beaucoup de parties visqueuses capables de produire plus de coagulum & de précipité que celle de l'Homme & de quelques Animaux.

J'ai mêlé de cette liqueur avec l'Esprit de Sel, le mélange est devenu blanc, après quoi il s'est fait un précipité blanc ; elle s'est moins troublé avec l'Esprit de Vitriol.

Il ne s'est fait aucun changement avec l'Esprit de Nitre, ni avec l'Huile de Vitriol. Il s'est pour-tant trouvé de cette liqueur cristalline qui s'est troublée avec l'Esprit de Nitre & de Vitriol, comme il s'en est trouvé qui ne se sont point troublé avec l'Esprit de Sel & de Vitriol, mais rarement.

Cette liqueur a deux usages, 1.° elle empêche que le Cristallin ne se desséche ; 2.° elle lui fournit sa nourriture.

Le Cristallin ne peut se dessécher pendant qu'il est humecté de cette liqueur, mais aussi-tôt qu'elle lui manque, il devient sec, dur & opaque, & peut se mettre en poudre, c'est ce que j'ai vû plusieurs fois sur des Cadavres, j'en ai donné une observation à M. Brisseau, qu'il a inséré dans son Traité de la Cataracte & du Glaucome, cet accident arrive à la suite d'une inflammation qui pénétre jusqu'au ligament ciliaire, & qui a suppuré. Les vaisseaux qui composent le ligament ciliaire se détruisent, & ce sont ces vaisseaux qui fournissent non-seulement l'humeur aqueuse, mais encore la liqueur qui se répand dans la Capsule du Cristallin, & qui y est charié par les vaisseaux qui partent du ligament, & sont ramefiés dans la partie antérieure de la Capsule, & peut-être aussi dans sa partie postérieure.

L'Humeur aqueuse n'étant plus fournie, à mesure qu'elle se dissipe, les membranes se resserrent, le Cristallin est poussé en devant avec sa Capsule sur la partie postérieure de l'Uvée où elle se colle. Mais le Cristallin n'étant plus humecté par sa propre liqueur cristalline, se desséche & s'attache à la surface interne de la Capsule, & voilà ce qui a fait le fondement de toutes les Cataractes membraneuses, comme je le dirai dans mon Mémoire de la Cataracte; c'est de-là aussi que quelques Anatomistes ont déduit l'opacité de la Capsule*, parce que lorsqu'on a retiré cette Capsule de l'Oeil, on la trouve opaque & épaisse, mais ils n'ont pas pris garde qu'elle n'est épaisse que parce qu'il reste sur cette Capsule un peu de matiére du Cristallin séche & opaque : si l'on prend le soin de la mettre dans l'eau, comme j'ai fait, pour détremper cette matiére, on la sépare facilement de la Capsule que l'on trouve dans son épaisseur & sa transparence naturelle.

* Hist. de l'Ac. 1722. p. 15. n. 16.

Cette liqueur sert encore de nourriture au Cristallin, qui selon toute apparence, ne se nourrit pas de la même maniére que toutes les autres parties de nôtre corps, puisque nous n'avons trouvé aucuns vaisseaux qui communiquent de la membrane dans le Cristallin.

Il semble que cette liqueur étant épanchée dans la cavité de

de la Capſule, & qui environne de tous côtés le Criſtallin, peut le nourrir de l'une des deux maniéres ſuivantes. La premiére eſt qu'elle pénétre le Criſtallin dans toute ſa ſubſtance, & pour lors il ſe fait une application de cette liqueur dans toutes les fibres du Criſtallin, c'eſt le ſentiment de M. Antoine, il dit que le Criſtallin eſt nourri par imbition.

La ſeconde eſt que la partie la plus ſéreuſe de cette liqueur s'imbibe dans la ſubſtance du Criſtallin, & y va entretenir la tranſparence pendant que la partie la plus viſqueuſe reſte ſur la ſuperficie du Criſtallin s'y unit, en y formant une couche, ce qui eſt d'autant plus vrai-ſemblable que tous les Criſtallins ſe trouvent formés par ces ſortes de couches. D'ailleurs il n'y a point de doute que le Criſtallin ne puiſſe s'imbiber de la liqueur qui l'environne. Il en eſt quelquefois ſi gonflé dans certains Animaux qu'il ſe fend en trois rayons du centre vers la circonférence auſſi-tôt qu'on le tire de ſa Capſule, comme je l'ai dit ci-deſſus.



OBSERVATION DE L'ECLIPSE DU SOLEIL,

Faite à son lever, le 15 Juillet de cette année 1730.

Par M. CASSINI.

15 Juillet 1730. LE Soleil devant paroître éclipsé le 15 Juillet de cette année 1730, à son lever, nous observâmes, la veille, l'endroit de l'horizon où il commençoit à paroître, afin de choisir pour nôtre Observation un lieu où on le pût voir commodément, sans qu'il fût couvert par les Maisons ou Eglises qui sont, à l'égard de l'Observatoire, dans la partie de l'horizon qui est entre le Nord & l'Est où on devoit l'appercevoir, & nous observâmes le commencement de son lever à $4^h\ 9'$.

Le matin du 15 je dressai une Lunette de 8 pieds, garnie de mon Micrometre à réticules au point de l'horizon où je l'avois vû la veille. Il étoit couvert en partie de nuages, entre lesquels on voyoit cependant quelques endroits clairs, ce qui faisoit esperer qu'on pourroit en faire quelques Observations.

Le Soleil commença à poindre sur l'horizon à $8^h\ 9'$, mais il entra dans un nuage étroit, dont il sortit quelques minutes après, & à $9^h\ 15'\ 10''$ il parut assés distinctement éclipsé dans sa partie inférieure d'environ 3 doigts, à ce que je pus juger; car ayant essayé de mesurer la quantité de l'Eclipse avec le Micrometre, dont les fils extrêmes comprenoient le diametre horizontal du Soleil, je trouvai que son diametre vertical étoit beaucoup plus petit, ce qui est l'effet ordinaire de la réfraction. Je fus donc obligé de mesurer l'intervalle entre un fil parallele qui passoit par les deux cornes & le fil qui touchoit la concavité de l'Eclipse que je trouvai d'un doigt six minutes, dont le double, supposé le diametre du Soleil égal à celui de la Lune, dont il ne différoit pas sensi-

blement, mesure la quantité de l'Eclipse, qui étoit par conséquent de deux doigts douze minutes.

Cette quantité de l'Eclipse doit être augmentée dans le rapport du diametre horizontal au diametre vertical, qui, comme on l'a dit, étoit diminué par l'effet de la réfraction.

Le Soleil entra ensuite dans un nuage, dont il ne sortit que quelques minutes après, & à 9h 27′ 20″ je jugeai la grandeur de l'Eclipse d'un doigt, à 9h 29′ 18″ d'un demi-doigt, à 9h 30′ 18″ d'un tiers de doigt, & je déterminai sa fin avec assés d'évidence à 4h 32′ 28″.

M. Maraldi, qui a fait cette Observation dans un autre Appartement avec le Micrometre ordinaire, détermina la fin de l'Eclipse à 4h 32′ 26″.

Cette Eclipse doit avoir paru plus grande dans les Pays Orientaux où le Soleil s'est levé sur l'horizon plûtôt qu'à Paris. On en peut voir le détail dans les Ephémérides de M. Manfredy, qui a marqué pour Paris la grandeur de l'Eclipse de 3 doigts 17 minutes à son lever, qui devoit arriver à 4h 12′, & la fin à 4h 32′, à quelques secondes près de celle que nous avons déterminée.



REGLES
POUR
CONSTRUIRE DES THERMOMETRES
DONT LES DEGRÉS SOIENT COMPARABLES,

Et qui donnent des idées d'un Chaud ou d'un Froid qui puissent être rapportés à des mesures connües.

Par M. DE REAUMUR.

15 Novemb. 1730.

LEs Thermometres sont sans contredit une des plus jolies inventions de la Physique moderne, & une de celles qui a le plus contribué à ses progrès. Ils nous ont valu un grand nombre de connoissances curieuses, qu'on n'eût pû se promettre sans leur secours. Combien y a-t-il de cas où sans les Thermometres nous ne serions pas parvenus à sçavoir que des liqueurs mêlées ensemble s'échauffent ? Sans les Thermometres nous n'aurions jamais découvert que certains *Sels*, en se fondant dans l'eau, la refroidissent ; qui sont ceux qui la refroidissent le plus. Nous ne sçaurions point qu'il y a de la Glace plus froide que d'autre Glace. Nous ignorerions que l'Eau qui bout, a acquis le plus grand degré de chaleur qu'elle puisse prendre, un degré au de-là duquel il n'est plus possible de l'échauffer. Enfin les Physiciens sçavent qu'une infinité d'expériences demandent à être faites le Thermometre à la main. Cet instrument même n'est pas à leur seul usage ; il n'est pas resté renfermé dans leurs seuls Cabinets ; généralement on aime à consulter le Thermometre sur la température de l'Air ; & c'est sur-tout lorsque le froid ou le chaud nous deviennent incommodes, qu'on aime à le consulter : pendant les rudes froids de l'Hyver, pendant les chaleurs accablantes de l'Eté, dans les conversations ordinaires, chacun rend vo-

lontiers compte des degrés dont ſon Thermometre eſt deſcendu ou monté.

Mais ſi on ſçait combien cet inſtrument eſt amuſant & utile, on ſçait auſſi combien il eſt encore imparfait. Les marches de preſque tous les Thermometres ſont différentes ; quoiqu'expoſés au même air, la liqueur des uns monte plus haut, ou deſcend plus bas que celle des autres, pour marquer les mêmes augmentations & les mêmes diminutions de chaleur. Le changement de temperature d'air qui ſera marqué ſur l'un par quatre ou cinq degrés, ſera marqué ſur l'autre par ſept à huit, par deux ou trois, ou par tout autre nombre de degrés ; & on ne connoît point les rapports qui ſont entre les degrés de différents Thermometres. Les maniéres dont ils s'expriment, s'il eſt permis de parler de la ſorte, étant toutes différentes, on n'entend que la langue d'un Thermometre qu'on a ſuivi pendant pluſieurs années, on n'entend nullement celle de tout autre. Auſſi les Thermometres ne nous ont-ils encore preſque de rien ſervi pour nous donner des connoiſſances du plus grand degré de froid & du plus grand degré de chaud des différents climats, qui ſeroient pourtant des connoiſſances utiles & curieuſes. Nous aimerions à ſçavoir juſqu'à quel point des hommes, tels que nous, peuvent ſoûtenir le froid ou le chaud. Il ſeroit important de connoître à peu-près la température de l'air qui eſt néceſſaire pour faire croître des Plantes & des Arbres qui, quoiqu'ils ne s'élevent pas actuellement dans nôtre Pays, pourroient peut-être s'y naturaliſer.

Non ſeulement on n'entend pas la langue des différents Thermometres, chacun même n'entend que très-confuſément celle du ſien. On ſçait les termes où il a marqué le plus grand chaud, ou le plus grand froid, on ſçait le nombre des degrés qui les ſéparent, mais ni aucun degré en particulier, ni tous ces degrés enſemble ne nous rappellent aucune idée de véritable meſure.

Les cauſes d'où naiſſent les défauts des Thermometres, ne ſont pas moins connües que les défauts eux-mêmes ; auſſi

feroit-il très-inutile de les rappeller ici, s'il ne convenoit de les avoir présentés, pour juger si les expédients, auxquels j'ai crû qu'il falloit avoir recours, sont capables de produire tout ce que j'en ai esperé.

Les Thermometres sont des instruments de Physiciens, les Physiciens ont été intéressés à les perfectionner ; ils y ont travaillé ; ils en ont imaginé de plusieurs figures différentes; ils en ont rempli de différentes liqueurs. Pour l'ordinaire on s'est servi d'Esprit de Vin. C'est l'air qu'on a fait agir dans plusieurs Thermometres ; dans quelques-uns l'air, en se dilatant, n'a eu à faire mouvoir que de l'Esprit de Vin, dans d'autres il a eu à faire mouvoir une colonne de Mercure.

Nous n'avons garde d'entreprendre d'expliquer ici toutes les différentes constructions de Thermometres qu'on a imaginées, ce seroit la matiére d'un assés long ouvrage ; d'ailleurs nous n'avons besoin actuellement que de la plus simple construction, & une des plus anciennes, & aussi de celle qui a prévalu, je veux dire de celle du Thermometre qu'on a appellé le *Thermometre de Florence*, qui est celui qu'on voit journellement par-tout. Il consiste dans une Boule creuse de verre, scellée à un long & délié Tuyau de verre, dont le bout supérieur est scellé hermétiquement. On sçait de reste que la Boule & partie du Tuyau sont remplis d'un Esprit de Vin coloré de rouge ; que quand la chaleur de l'air, qui environne le Thermometre, augmente, que l'Esprit de Vin, contenu dans la Boule se dilate, qu'il est forcé de s'élever plus haut dans le Tuyau, qu'au contraire la même liqueur descend dans le Tuyau, lorsqu'elle perd de sa chaleur.

Ce Tuyau de verre est assujetti sur une Planche mince, couverte d'un Papier, sur lequel les degrés sont imprimés. Des Papiers semblablement imprimés, ou gravés, servent pour des Thermometres différents, comme si les étendües de leurs degrés devoient être les mêmes.

Il suit cependant de cette construction, & on le sçait assés, que pendant qu'il se fait quelque changement dans la température de l'air, que la liqueur parcourt plus ou moins de

chemin dans différents Thermometres, soit en montant, soit en descendant, selon que le diametre de la Boule contient plus ou moins de fois celui du Tuyau. De-là vient que certains Thermometres sont peu sensibles, & que d'autres au contraire le sont trop; que faute de place pour recevoir la liqueur, le Tuyau ou la Boule de ces derniers sont quelquefois brisés par l'effort qu'elle fait pour se dilater, & que dans de pareils Thermometres la liqueur rentre quelquefois dans la Boule avant que le froid soit devenu excessif. Que de-là vient enfin qu'il est impossible de trouver des Thermometres dont les marches soient les mêmes ou proportionnelles, parce que quelque chose qu'on fasse, il est presque impossible de parvenir à avoir deux Boules de verre, d'égal diametre & d'une même rondeur; car ces Boules ne sont jamais des Boules parfaites. Il n'est pas plus facile d'avoir des Tuyaux de diametres déterminés. Dailleurs ils sont presque toûjours plus gros à un bout qu'à l'autre, & assés considérablement; leur intérieur a souvent des inégalités dont on ne sçauroit juger par dehors. Tout cela ensemble va plus loin qu'on ne l'imagineroit; par des mesures éxactes, j'ai quelquefois trouvé que de deux portions d'un même Tuyau, égales en longueur, & qui sur un Thermometre auroient été prises pour des degrés égaux, l'une contenoit près du double de la liqueur contenuë dans l'autre.

Mais supposons que malgré ces difficultés invincibles, on soit parvenu à sçavoir adapter aux Boules des Tubes dont les diametres soient aux leurs dans une proportion constante, & celle qui a été trouvée la meilleure; ce n'en sera pas encore assés pour avoir des Thermometres qui ayent les mêmes allûres, ou des allûres proportionnelles, c'est-à-dire, qui dans les mêmes changements de température d'air donnent le même nombre de degrés. Il y a encore une autre source de différences à laquelle on ne semble pas avoir assés pris garde, du moins ne sçais-je point qu'on ait cherché à y apporter de remede. C'est la qualité de la liqueur, dont on remplit la Boule du Thermometre. Il s'en faut bien que

toutes les liqueurs se dilatent également à un même degré de chaleur. On ne l'ignore pas, & on a choisi par préférence l'Esprit de Vin pour la liqueur des Thermometres; parce qu'il est peut-être celle qui est la plus sensible aux impressions du froid & du chaud, si on excepte l'air. L'Esprit de Vin est beaucoup plus dilatable que l'Eau. L'Esprit de Vin le plus rectifié n'est pourtant qu'un mêlange d'une matiére inflammable, d'une Huile essentielle ou éthérée avec de l'Eau; l'Eau fait la meilleure portion de ce mêlange. La grande *dilatabilité* de l'Esprit de Vin, s'il m'est permis de me servir de ce terme commode, & dont j'aurai besoin plus d'une fois, est donc dûë à l'Huile éthérée qu'il contient; plus il y en aura dans de l'Esprit de Vin, & plus il sera dilatable; c'est-à-dire, que les Esprits de Vin les mieux rectifiés se dilateront davantage, pendant la même augmentation de la chaleur de l'air, que ceux qui le sont moins. Dans deux Thermometres, égaux dans tout le reste, & chargés aussi chacun d'une quantité égale, mais d'un différent Esprit de Vin, la liqueur ne s'élevera, ni ne s'abbaissera également; ils exprimeront différemment les changements de chaud & de froid. Or, non-seulement on n'a pas cherché jusqu'ici à remplir les Thermometres avec un Esprit de Vin, d'une qualité déterminée & connuë, on s'est servi indifféremment de ceux qui se sont presentés. Les faiseurs de Thermometres ordinaires se contentent souvent d'employer une sorte d'Esprit de Vin très foible, une espece d'Eau-de-vie.

M. Amontons a négligé d'être aussi éxact qu'il a coûtume de l'être, lorsqu'il a parlé de la rarefaction de l'Esprit de Vin, & de celle de l'Eau-de-vie, il en a parlé comme si toutes les especes d'Esprits de Vin, & comme si toutes les especes d'Eaux-de-vie devoient, chacune dans leur genre, donner sensiblement les mêmes rarefactions, il n'est pas même le seul Physicien qui se soit exprimé ainsi. Il est pourtant essentiel, pour comparer les effets du chaud & du froid sur différents Thermometres, qu'ils soient remplis d'une même liqueur ou de deux liqueurs, dont les rapports des degrés de dilatabilité soient

soient connus; & c'est ce qu'on n'a point du tout cherché à déterminer, & ce que nous tâcherons de faire dans la suite de ce Memoire. On y verra que cette source d'erreurs peut rendre le nombre des degrés d'un Thermometre presque double de celui d'un autre, exposé au même air.

Cet inconvénient n'est peut-être pas moins grand dans les Thermometres dont le jeu est produit par l'air qui y est renfermé, que dans ceux qui ne renferment que de l'Esprit de Vin ou toute autre liqueur. Pour peu qu'on y pense, on ne sera pas disposé à croire que l'air de toutes saisons, de tous Pays, pris à un égal degré de chaud, soit également dilatable. L'air n'est nulle part un fluide, ou liquide pur. Dans un même volume d'air, il y a plus ou moins d'air, selon qu'il est plus chargé d'exhalaisons ou de vapeurs, & des expériences ont appris qu'un peu d'eau en vapeurs, mêlée avec l'air, est capable d'augmenter considérablement les grandes dispositions qu'il a à se rarefier.

Enfin quoiqu'on employât une liqueur, dont les rapports de dilatabilité seroient connus, ce ne seroit pas encore assés; les liqueurs n'ont point de volumes constants, ceux des solides ne le sont pas non plus, mais ils ne varient ni si considerablement ni si subitement que ceux de certaines liqueurs; elles passent continuellement d'un degré de dilatation à un ou à plusieurs autres, & reviennent ensuite à des degrés de condensation selon l'état de l'air qui agit sur elles. Or entre ces degrés de dilatation ou de condensation dont est susceptible la liqueur qu'on veut renfermer dans le Thermometre, il en faut trouver un qui soit sensible, qu'on puisse avoir en tout Pays, & qui soit le terme d'où l'on commence à compter les degrés, ou auquel on finisse de les compter. La belle propriété que M. Amontons a découverte à l'Eau, celle de n'être plus capable de s'échauffer lorsqu'elle a commencé à boüillir, donne un de ces termes, un de ces degrés de dilatation qu'on peut avoir en tout temps, & qui sont les mêmes par-tout. Il a aussi cherché à se servir de cette propriété de l'Eau pour construire des Thermometres qui donnassent des degrés qui

puissent être constants en tout Pays. L'usage qu'il en a fait est plein d'adresse, il s'est servi d'air, qu'il a chargé de Mercure; au moyen de l'eau boüillante il a dilaté cet air, qui, en se dilatant, a élevé le Mercure à un point qui a été un point fixe pour M. Amontons. Ces Thermometres à Air & à Mercure ont servi à en graduer d'autres à Esprit de Vin. Mais les différences qui sont dans l'air, pris en différents temps, en différentes saisons, en différents pays, ne me permettent pas de croire que les premiers Thermometres soient propres à produire les effets qu'on en a espéré. Si quelques-uns de ceux qui ont voulu répéter les expériences de M. Amontons sur la dilatation de l'air chargé de différents poids, n'ont pas trouvé les mêmes résultats qu'a eus cet exact Académicien, c'est peut-être qu'ils les ont faites sur un Air différent de celui qui a servi à ses épreuves. Au surplus cet inconvénient n'est pas le seul qui puisse empêcher ce Thermometre de répondre parfaitement aux vûës ingénieuses de son inventeur. L'état moyen de chaleur qu'il veut à l'Air, & qu'il ne détermine que d'une maniére vague, la difficulté de trouver des Boules & des Tubes de capacités égales, ou proportionnelles; difficulté bien grande à surmonter dans la pratique; l'augmentation qui survient au volume de l'Air, qui affoiblit sa force de ressort, & qui ne la laisse pas telle qu'elle devroit être pour produire l'effet dont elle est la cause, & la mesure; en un mot, bien d'autres difficultés sur lesquelles il seroit long d'insister, comme les différentes réductions qu'il faut faire des pesanteurs variables de l'Atmosphere, font que ce Thermometre n'est pas susceptible de toute la précision qu'on lui desireroit. Aussi un Auteur Italien a avancé depuis peu, & a tâché de prouver, que le Thermometre de M. Amontons est inférieur à celui de Florence; c'est assûrément le dégrader beaucoup trop, quoiqu'il soit vrai que l'usage de l'ancien prévaut, mais ce n'est que parce que l'autre est très-difficile à construire.

Il s'en faut bien que j'aye rien pensé sur cette matiére d'aussi ingénieux que ce qu'a imaginé M. Amontons. Tout ce que

j'ai à proposer est extrémement simple, mais je le crois propre à nous donner des Thermometres qui se fassent entendre continuellement, & en tout pays. J'explique d'abord le plan que j'ai crû devoir suivre, & j'expliquerai ensuite ce que j'ai fait pour le mettre en pratique.

Je m'en tiens à une liqueur très-dilatable, c'est-à-dire, à l'Esprit de Vin ; mais comme il est une infinité d'especes d'Esprits de Vin, j'en choisis une par préférence qu'on puisse avoir commodément en tout temps, & en tout pays. J'établis des caracteres pour reconnoître cette espece d'Esprit de Vin, propres à empêcher de la confondre avec toute autre, & à déterminer de combien elle en differe.

Je réduis l'Esprit de Vin choisi, & caractérisé à un volume connu de dilatation. Je le pourrois par le moyen de la chaleur de l'Eau boüillante, en usant de quelques précautions dont je parlerai dans la suite, mais j'aime mieux me servir de la congélation artificielle de l'Eau, c'est-à-dire, de l'Eau qu'on fait geler ; M. Amontons lui-même s'en est servi. Le degré de dilatation, ou, si l'on veut, de condensation, auquel cette glace réduit l'Esprit de Vin, peut être regardé comme un terme fixe, & aisé à avoir dans presque tous les Pays du monde où on sçait faire usage des Thermometres. Quoique l'Hiver nous fasse voir de la glace plus froide que d'autre glace, il n'en sera pas plus difficile d'établir, soit par des raisonnements clairs, soit par des expériences, que le degré de froid de la glace artificielle, le commencement de la congélation de l'Eau, est un degré constant, & tel qu'il nous le faut.

Le caractére de l'Esprit de Vin étant bien déterminé ; l'Esprit de Vin ayant été réduit à un volume qui donne un terme saisissable, tout ce qui reste à faire est de graduer les différents Thermometres, de façon que leurs marches soient les mêmes ou proportionnelles, malgré les différents rapports qui peuvent se trouver entre les diametres des Boules, & ceux des Tuyaux, malgré les formes irréguliéres que peuvent avoir les Boules, & malgré les inégalités qui peuvent se rencontrer dans les Tuyaux ; & de les graduer de façon que les

mêmes degrés, dans les Thermometres différents, soient les mêmes mesures de froid, ou de chaud ; & que ces mesures donnent quelques idées, car les degrés ordinaires n'en donnent point. Ils m'apprennent bien, par exemple, que la liqueur a monté de deux ou trois pouces, mais ils me laissent absolument ignorer le changement qui s'est fait dans le volume de la liqueur pendant qu'elle s'est élevée de deux ou de trois pouces. On auroit, ce me semble, tout ce qu'on peut désirer, si chacun des degrés donnoit une idée précise des degrés de dilatation, ou de condensation de la liqueur, car l'effet de l'augmentation de chaleur est l'augmentation de volume. Comment peut-on mieux mesurer les degrés de chaleur qui s'ajoûtent successivement les uns aux autres, que par des degrés qui expriment les portions, dont le volume s'est successivement renflé, qui en donnent une idée claire. Je m'explique : la quantité d'Esprit de Vin que je fais entrer dans mon Thermometre m'est connuë, je connois le nombre de certaines parties aliquotes dont elle est composée ; par exemple, le volume de ma liqueur condensée par la glace artificielle contient 500 parties ; que ces parties soient chacune de 10, de 20, &c. lignes cubiques, il n'importe, pourvû que j'en aye la mesure. Je marque sur le Tuyau de mon Thermometre jusqu'où va ce volume de liqueur, composé de 500 parties, lorsqu'il est condensé par la glace artificielle*; c'est au-dessus & au-dessous de ce terme que je vais marquer les degrés. Mais au lieu de prendre, pour chaque degré, des parties du Tuyau égales entr'elles en longueur, comme elles le sont dans les Thermometres ordinaires, je détermine chacun des degrés de façon qu'il est une portion du Tuyau qui contient une des parties du volume de liqueur qui a été déterminé. Dans nôtre cas, par exemple, où ce volume étoit de 500 parties, chaque degré sera $\frac{1}{500}$ partie de ce volume, & c'est en pareilles parties, en pareils degrés que le Tuyau est entiérement gradué. Exposons aux impressions de l'air des Thermometres ainsi construits ? Les changements qui y seront exprimés, le seront en expressions intelligibles, qui nous

* Fig. 1. CC.

donneront des idées déterminées, au lieu des idées vagues que les autres Thermometres nous donnent. Que la liqueur s'éleve de 1, 2, 3, ou, si l'on veut, de 20 degrés au-dessus du terme marqué par la congélation de l'eau. Cela signifiera que le volume qui étoit 500 est devenu 501, 502, 503, ou si l'on veut, 520. Quand je sçaurai que la liqueur s'est élevée de 20 degrés, je sçaurai que son volume est augmenté de $\frac{20}{500}$ ou d'un $\frac{1}{25}$. Si au contraire le froid a fait descendre la liqueur de 10 degrés au-dessous du terme marqué, je sçaurai que le froid l'a condensée, ou a diminué son volume de $\frac{1}{50}$. Ainsi dans toute leur marche, les Thermometres donneront des idées précises des changements qui se sont faits dans un volume connu d'une liqueur connuë. Alors on s'entendra, lorsqu'on comparera les degrés où est monté le Thermometre dans une saison avec ceux où il est descendu dans une autre; lorsqu'on comparera les observations faites en différents Païs sur différents Thermometres construits sur ces principes.

Il ne me semble pas qu'on puisse demander aux Thermometres quelque chose de plus que ce que la construction que nous venons de leur supposer leur donne; mais il pourra paroître difficile de les construire sur ces principes, de leur donner la graduation dont nous venons d'expliquer les avantages. Le moyen d'y réüssir est pourtant bien simple, ou plûtôt très-grossier. Il est néantmoins certain que si l'on veut absolument d'aussi petits Thermometres que ceux qui ont été en usage jusqu'ici, qu'il n'est guéres possible de graduer leurs Tuyaux en mesures exactes qui soient des portions du volume de la liqueur qu'on a renfermée. Mais pourquoi s'en est-on tenu jusqu'ici à les faire tous si petits? Il y a grande apparence que c'est parce qu'on a continué de les faire tels qu'ont été les premiers. Sanctorius, leur inventeur, vouloit que ses malades pussent tenir commodement leurs Boules dans la main. Il en est arrivé aux Thermometres, ce qui seroit arrivé aux Horloges si on eût commencé par de petites Montres, & qu'on n'eût cherché qu'à perfectionner des Horloges d'un

si petit volume; on n'auroit jamais eu des mesures exactes du temps jusqu'à ce que quelqu'un eût proposé qu'outre les Horloges qu'on est bien aise de porter sur soi, on en construisit qui restassent toûjours dans les Appartements; qu'alors on parviendroit à en avoir dont les mouvements seroient reglés avec une précision qu'on ne pouvoit se promettre de donner aux Montres. Les Barometres devoient aussi nous faire penser à prendre pour les Thermometres de plus gros Tubes que ceux dont on se sert ordinairement. Les Barometres simples ne valent rien, lorsqu'ils sont faits de Tubes presque capillaires, tels que le sont la plûpart de ceux des Thermometres.

Aussi parviendra-t-on à faire d'excellents Thermometres, dès qu'on employera des Tuyaux de verre d'une grosseur suffisante; & elle le sera, pourvû que leur diametre égale celui des gros Barometres, c'est-à-dire, pourvû qu'ils ayent intérieurement 2 lignes $\frac{1}{2}$ ou 3 lignes de diametre; on pourra pourtant en employer de plus petits, mais leur construction n'en sera que plus aisée & plus sûre si leurs diametres sont encore plus grands, s'ils vont jusqu'à 3 lignes $\frac{1}{2}$, les grosseurs des Boules seront augmentées proportionnellement.

Il est vrai que des Boules & des Tuyaux, des diametres dont nous les demandons, ne feront pas d'aussi jolis instruments que le sont les Thermometres ordinaires. Si les Astronomes ne vouloient se servir que de jolis quarts de cercle, il faudroit qu'ils renonçassent à en avoir qui leur donnassent des mesures exactes. D'ailleurs si on ne veut faire faire aux nouveaux Thermometres que le chemin que font les anciens; si on ne veut point que le degré de chaleur de l'eau boüillante y soit marqué, la longueur des nouveaux Tuyaux excedera peu celle des Tuyaux ordinaires; la grosseur de leurs Boules ne deviendra pas assés considérable pour être difforme, ni pour être embarrassante; la grosseur du Tuyau n'a rien de désagréable: or, pendant que la capacité des Tuyaux égaux en longueur croît comme les quarrés des diametres; celle des Boules croît comme les cubes de leurs diametres. Des Boules qui auront environ 4 pouces $\frac{1}{2}$ de diametre

adaptées à des Tuyaux dont le diametre intérieur soit à peu près de 3 lignes, suffiront pour des Thermometres bons & sensibles.

Persuadé qu'on passera sans peine sur la petitesse des Thermometres ordinaires, pour en avoir de meilleurs, je vais décrire comment il faut graduer & remplir nos grands Thermometres. Les expériences que j'ai faites des procedés que j'ai à rapporter, m'ont appris qu'ils sont plus aisés, & moins longs à mettre en pratique, qu'ils ne le paroîtront dans l'explication que j'ai à en donner. Je suppose que j'aye une Boule d'un diametre convenable, ou à peu près, scellée à un Tuyau de grosseur suffisante*. Toutes les Verreries fourniront des Tuyaux, tels qu'il les faut, celle qui s'est établie depuis quelque temps à Seve est extrêmement commode, pour y faire faire tout ce qu'on a besoin dans ce genre, c'est celle à qui je me suis addressé. * Fig. 1. A.

Comme le Thermometre doit être construit la mesure à la main, la plus grande affaire est de se fournir de différentes mesures. Il en faut de très petites, qui sont celles qui donnent les derniéres divisions du volume de la liqueur qu'on veut faire entrer dans le Thermometre, ce sont celles-là même qui servent à marquer l'étendüe de chaque degré du Tube. Il en faut aussi de grandes, qui contiennent les unes 25, les autres 50, & d'autres jusqu'à 100 des plus petites mesures. L'usage de ces grandes est d'abbréger l'opération. Chacune des petites mesures est telle qu'elle contient seulement la quantité de liqueur qui peut occuper deux ou trois, ou quatre lignes de hauteur dans le Tube. Tout cela est indifférent, & fait seulement que chaque degré a plus ou moins d'étendüe, ce qui est arbitraire, & ne change rien dans la marche du Thermometre, & dans le rapport exact qu'elle doit avoir avec celle de tout Thermometre construit sur les mêmes principes.

Mais la forme de la mesure est essentielle, j'ai choisi celle d'une sorte de petit Instrument assés connu des Physiciens. Il est fait d'une portion d'un petit Tuyau de verre qu'on Fig. 2, 3, 4. & 5.

* Fig. 2, 3, 4, 5, M. a renflé au milieu en eſpece de figure d'olive*, & dont les deux bouts ont été tirés en Tuyaux extrêmement déliés, & véritablement capillaires*. En un mot, les Tuyaux qui aboutiſſent, de part & d'autre, à la partie renflée, ſont ſi petits, qu'une goutte de liqueur y occuperoit l'étendüe de plus d'un pouce. Leur longueur eſt arbitraire, 15 à 16 lignes ſuffiſent à chacun de ces petits Tuyaux, ils peuvent avoir chacun plus de deux pouces. Il y a deux maniéres de remplir ce petit Inſtrument l'une & l'autre également ſûres. La premiére eſt de poſer un de ſes bouts dans la liqueur, & de ſuccer par l'autre bout, qu'on tient dans la bouche, juſqu'à ce qu'on ſente que la liqueur vient moüiller la langue; l'autre eſt d'enfoncer la meſure dans la liqueur juſqu'au deſſus du renflement, bientôt elle s'éleve à l'extrémité ſupérieure du Tuyau capillaire. On bouche le bout ſupérieur de ce Tuyau avec le doigt, ou plus ſûrement encore avec la langue, ainſi on retire du vaſe la meſure pleine de liqueur, ſans qu'il s'écoule une goutte de celle qu'elle a reçûë. Avec cette meſure j'en remplis de plus grandes; chacune de celles-ci conſiſtent en une Boule de verre, de diametre plus ou moins grand, adaptée à un Tube aſſés gros, de 4 à 5 pouces de longueur*. Il eſt abſolument eſſentiel que ces grandes meſures ſoient très-exactes; on marque avec un fil*, qui entoure leur col ou le Tube, juſqu'où elles doivent être remplies. On les meſurera chacune au moins deux ou trois fois. La petite peine qu'on y trouvera ſera payée par le plaiſir qu'on aura de voir combien cette façon de meſurer eſt préciſe.

* OO.

* Fig. 6. & 7.

* q.

Dès qu'on eſt une fois fourni de grandes & de petites meſures, on eſt en état de graduer aſſés vîte des Thermometres, quelque différence qu'il ſe trouve entre les capacités de leurs Boules & de leurs Tubes. Graduons-en un. Les procédés que nous ſuivrons, guidront pour la graduation de tout autre. Commençons pourtant par remarquer qu'on ne doit ſonger à le remplir d'Eſprit de Vin, que lorſque ſes degrés auront été marqués. Je ſuppoſe que la Boule & le Tube, qui me feront bien-tôt un Thermometre, ſont ſcellés enſemble

ensemble. On marquera à peu-près sur ce Tube l'endroit où l'on veut que se trouve le terme de la congélation de l'eau, & cela par le moyen d'un fil assés fin, arrêté par un nœud autour du Tube *. * Fig. 1. B.

Ce terme de la congélation de l'eau peut être pris arbitrairement sur une portion du Tuyau d'une assés grande étendüe; tout ce que sa détermination exige, c'est qu'il soit au moins une fois plus près de la Boule que de l'extrémité supérieure du Tuyau. Quand la distance de ce terme à la Boule ne seroit que le tiers ou le quart de l'autre distance, souvent il n'y auroit aucun inconvenient.

Je verse ensuite dans le Tuyau des mesures de 100, ou même des mesures plus grandes, jusqu'à ce que, la Boule étant remplie, la liqueur s'éleve au terme marqué. Mais une circonstance essentielle à observer, & qui sembleroit devoir jetter en bien des embarras, c'est que le volume de la liqueur qui est borné par ce terme, doit être exprimé par un nombre exact de centaines, par exemple, par 500, par 800, par 1000. Or il n'y a que peu de cas où cela se puisse trouver. Dans une infinité d'autres cas la surface de la liqueur sera un peu au dessous, ou un peu au dessus du fil; alors il n'y a qu'à élever ou abaisser le fil jusqu'à ce qu'il soit le vrai terme du volume mesuré *. Dans un grand nombre d'autres cas la derniére mesure de 100, qui a été versée, suffit à peine pour remplir la Boule *; & si on ajoûtoit une nouvelle mesure de 100, elle monteroit trop haut dans le Tube. L'expédient auquel j'ai recours alors est simple: au lieu de verser un nombre de mesures de liqueur moindre que 100, ce qui donneroit des nombres, d'où résulteroient des degrés difficiles à comparer sur différents Thermometres, je fais entrer dans le Tube des petits grains d'une matiére pesante & solide, comme des grains de gros gravier, de petits fragments de verre. Des grains de plomb seroient la plus commode des matiéres, si une circonstance, dont nous parlerons bientôt, ne demandoit quelquefois qu'on leur en préférât d'autres. Ces grains solides, quels qu'ils soient, tombent dans la Boule *;

* Fig. 1. CC.
* Fig. 8. H.
* Fig. 8. K.

ils y occupent une place qui auparavant étoit occupée par de la liqueur ; la liqueur monte dans le Tube ; des grains jettés successivement la font élever jusqu'au terme où on la veut *. Ces grains produisent un effet semblable à celui qu'on produiroit, si on étoit maître de diminüer à son gré la capacité de la Boule. Comme le volume qu'ils y occupent n'est pas bien grand, & que d'ailleurs leur dilatabilité est si petite, en comparaison de celle de l'Esprit de Vin, qu'elle peut être regardée comme nulle, ils ne produiront par la suite aucun dérangement sensible dans la marche du Thermometre.

* Fig. 8. CC.

La liqueur dont je remplis la mesure de 100 n'est que de l'eau. J'évite d'employer l'Esprit de Vin pour graduer ; le volume de la quantité qu'on auroit fait entrer dans le Thermometre, pourroit croître avant que l'opération fût finie. Des expériences, qui seront rapportées dans la suite, prouveront au contraire qu'il n'y a nullement à craindre que le volume de l'eau change sensiblement pendant le temps nécessaire à graduer le Thermometre.

Que celui sur lequel nous allons continuer de travailler, contienne 1000 mesures jusqu'au terme fixé pour la congélation artificielle *, c'est au dessus & au dessous de ce terme qu'il nous faut marquer les degrés. Le nombre des supérieurs que nous appellons *degrés de dilatation*, doit être au moins double de celui des inférieurs que nous nommons *degrés de condensation*. Ce sont ceux-ci qui doivent être marqués les premiers. Si je veux qu'il y en ait 25, 30, ou tout autre nombre, je vuide de l'eau de mon Thermometre dans une mesure de 25, ou de 30, jusqu'à ce que je l'aye remplie. Ainsi depuis *CC* jusqu'en 25 * il reste un vuide de 25 mesures ou degrés.

* Fig. 1. CC.

* Fig. 1.

Cela fait, j'attache le Thermometre, avec de petites cordes ou des fils de Léton *, sur la Planche destinée à le porter par la suite *, & sur laquelle ses degrés doivent être écrits. Un papier blanc, collé dessus, est prêt à recevoir les traits. Le premier que je tire est celui de la congélation de l'eau ; il est posé à

* Fig. 8. *LL. CC.*

* Fig. 8. *SS. TT.*

la hauteur du fil qui la marque ſur le Tube*. Je tire enſuite un ſecond trait vis-à-vis le niveau de l'eau*, & alors je ſuis en état de commencer à graduer. Je remplis une petite meſure, je la vuide dans le Tuyau : quand toute ſa liqueur eſt deſcendüe, je tire un trait vis-à-vis l'endroit où la ſurface de l'eau s'eſt élevée. On remplit enſuite une ſeconde fois la meſure, on la vuide dans le Tube, & on tire encore un trait à l'endroit où s'eſt élevée la ſurface de l'eau. On répéte cette manœuvre tout autant de fois que le demande le nombre des degrés qui peuvent être contenus dans la capacité du Tuyau, & qui doivent être marqués ſur la Planche.

* Fig. 8. CC.
* 25.

Pour les premiers Thermometres que je fis faire, on rempliſſoit d'eau la petite meſure qui devoit donner l'étendüe d'un degré, mais l'expérience m'apprit que la graduation devenoit longue à faire, &, qui pis eſt, incertaine. Une petite meſure d'eau, verſée dans un long Tuyau, ne ſuffit preſqu'à en moüiller les parois ; elle coule lentement le long de ces parois auxquelles elle a de la diſpoſition à s'attacher. On eſt incertain du temps où toute l'eau d'une meſure eſt deſcendüe ; toute celle des premiéres meſures ne deſcend pas, il en reſte toûjours d'adhérente aux parois. Je penſai que ſi au lieu de remplir la petite meſure d'eau, je la rempliſſois de Mercure, que j'éviterois tous ces inconvénients. Le Mercure ne s'attache point au verre, & ce peſant liquide deſcend promptement. Auſſi ai-je vû qu'en l'employant, la graduation étoit bien faite & bientôt faite. On y gagne en occupant deux Artiſtes à la faire. L'un remplit la petite meſure de Mercure, & la vuide dans le Tuyau. Dès qu'elle eſt deſcendüe dans la Boule, elle ſouleve l'eau à la hauteur où elle doit monter. Dans l'inſtant, le ſecond Artiſte tire un trait ſur la Planche, vis-à-vis le niveau de l'eau. Une centaine de degrés, ou moins, qu'on a à marquer ſur la Planche, ſont ainſi marqués en très-peu de temps & très-exactement.

Tous les traits ayant été tirés, on ôte le Thermometre de deſſus la Planche, & alors on écrit à ſon aiſe la valeur de chaque trait, ſelon ſa place, c'eſt-à-dire, le nombre de chaque

degré ; je les fais même écrire des deux côtés du Tube, & de chaque côté d'une maniére différente *. D'un côté on commence par mettre o vis-à-vis le grand trait qui marque la congélation de l'eau. Le premier trait au dessous est marqué 1 ; celui qui suit en descendant, est marqué 2, & ainsi de suite jusqu'à 25, nombre auquel nous nous sommes fixés dans nôtre exemple ; & c'est-là la suite des degrés descendants ou de condensation. Vis-à-vis le premier trait, au dessus de celui de la congélation, j'écris aussi 1 ; 2 vis-à-vis le suivant ; & ainsi j'écris la suite des degrés ascendants ou de dilatation.

* Fig. 8.

De l'autre côté du Tube, vis-à-vis le terme de la congélation de l'eau, j'écris 1000 pour nôtre Thermometre, dont le volume de la liqueur, lorsqu'elle est au niveau de ce trait, est de 1000 parties. J'écrirois 900, 800, pour celui dont le volume seroit alors de 900, ou de 800 parties. Le trait qui est immédiatement au dessous, est marqué par 999 ; celui d'après par 998, & ainsi des autres qui marquent les degrés descendants. Le premier degré ascendant est marqué 1001, le second 1002, &c. Ainsi les degrés d'un côté expriment simplement de combien la liqueur s'est dilatée ou condensée au dessus ou au dessous du terme de la congélation artificielle, par les nombres 1, 2, 3, 4, &c. & ceux de l'autre côté expriment le volume actuel de la liqueur, qui dans la congélation artificielle est 1000. Tantôt ce volume est réduit à 998, à 985, tantôt il est renflé à 1002, à 1020, &c.

La Planche étant ainsi graduée, le plus difficile, & ce qui demande le plus d'attention, est fait. Il reste à mettre la juste quantité d'Esprit de Vin dans le Thermometre. Auparavant on a à en faire sortir l'eau dont on l'a chargé, & les grains de gravier ou de sable, si on a été contraint d'y en faire entrer. Pour les grains de sable ou de gravier, on les mettra à part, parce qu'il sera nécessaire de les y faire rentrer après qu'ils auront été séchés. On fera aussi sécher le Thermometre ; quand il y resteroit néantmoins une legére humidité, l'inconvénient ne seroit pas grand. Celui seul qu'elle peut produire seroit d'affoiblir l'Esprit de Vin, & quelques gouttes

d'eau n'affoibliroient pas ſenſiblement la quantité de liqueur qui doit être employée.

On verſera donc enfin l'Eſprit de Vin, de la qualité duquel on s'eſt aſſûré, dans le Thermometre, & cela juſqu'à trois ou quatre degrés au-deſſus du fil, qui marque la congélation artificielle, comme juſqu'en *D*. Un peu plus ou un peu moins ne fait rien actuellement, parce que c'eſt le froid de l'eau glacée qui apprendra ce qu'il y aura à ajoûter ou à retrancher à la quantité qu'on y aura fait entrer, car il s'agit à préſent de faire geler de l'eau autour de la Boule où eſt cet Eſprit de Vin. * Fig. 1. *CC*.

Pour cela, on poſera la Boule du Thermometre dans un vaſe de fer blanc, cylindrique, dont le diametre intérieur excedera le ſien de peu*. Si la hauteur de ce vaſe eſt telle que ſes bords s'élevent juſqu'au fil qui marque ſur le Tuyau le terme de la congélation, ce ſera le mieux ; mais quand ſes bords ne s'éleveroient que de quelques degrés au-deſſus de la Boule, le Thermometre n'en ſera pas moins bon ſenſiblement. Enfin on remplira ce vaſe de l'eau qu'on doit faire geler. * Fig. 9. *VV*.

On ſçait aſſés comment ſe fait la glace artificielle ; les procedés uſités journellement ſont ceux même dont on ſe ſervira pour geler l'eau qui environne la Boule de nôtre Thermometre. Le vaſe, où elle eſt contenüe, doit être mis dans un autre vaſe d'un plus grand diametre, & au moins de même hauteur. Le Fer blanc eſt encore une matiére commode pour ces ſortes de vaſes. Le vuide qui reſte entre les parois des deux vaſes, ſera rempli de glace qui aura été bien pilée, & mêlée avec une bonne doſe, ſoit de Salpêtre, ſoit de Sel ammoniac, ſoit de Sel marin. Une précaution encore accélere la congélation, c'eſt de couvrir le deſſus des vaſes; l'air extérieur en eſt moins capable d'arrêter l'effet qu'on veut produire. Les faiſeurs de Liqueurs glacées ſe contentent de mettre au deſſus des vaſes quelques ſerviettes, quelques torchons. On fera encore mieux, ſi ſur le linge étendu ſur les bords du vaſe, on met une couche de glace pilée qu'on recouvrira de pluſieurs torchons ou ſerviettes.

A meſure que l'eau, qui entoure la Boule du Thermometre, ſe refroidit, la liqueur deſcend dans le Tube. Quand la ſurface de cette eau eſt gelée, la liqueur eſt bien près du plus bas terme où elle deſcendra. Lorſqu'on jugera qu'elle eſt à peu-près auſſi bas qu'elle peut aller, ſi elle eſt au deſſous du terme marqué par la congélation comme en *B* *, on fera entrer de l'Eſprit de Vin peu à-peu avec la petite meſure, ou avec le petit entonnoir *, & cela juſqu'à ce que l'Eſprit de Vin s'éleve dans le Tube à la hauteur du fil qui marque le terme *. On ſera enſuite attentif à obſerver ſi la liqueur ne continüe pas à deſcendre ; ſi elle deſcend encore, on ajoûtera encore ce qu'il faut de liqueur pour la faire monter au terme marqué. Lorſqu'elle y reſte conſtanment, on peut retirer la Boule de la glace. Mais pour n'avoir pas la peine de briſer la glace, & ne pas faire courir riſque au Thermometre, il vaut mieux laiſſer fondre la glace, & attendre qu'elle laiſſe ſortir librement la Boule, ou accélérer la fonte de la glace en jettant deſſus de l'eau chaude.

* Fig. 9.

* Fig. 10.

* Fig. 9. *CC*.

Nous devons avertir qu'il arrive quelquefois, qu'après avoir fait entrer dans le Tube la petite quantité d'Eſprit de Vin qui ſembloit néceſſaire pour élever la liqueur juſqu'au fil, qu'après avoir vû ſa ſurface de niveau avec le fil, qu'elle vient, dans un quart d'heure, à l'excéder d'une ligne, ou de davantage. On croiroit que c'eſt que la glace commence à ſe fondre, cependant l'élévation de l'Eſprit de Vin eſt quelquefois dûë à une autre cauſe, il a fallu du temps pour ſe rendre à celui qui en deſcendant a rencontré les parois du vaſe. On a preuve certaine que c'eſt cette cauſe qui produit la quantité excédente de volume de liqueur, lorſqu'on voit que ſa ſurface ſe ſoûtient conſtamment au même terme ; elle s'y ſoûtient pendant plus de huit à dix heures, lorſque les vaſes ſont dans un endroit frais, & qu'ils ont été bien enveloppés. Il faut donc retirer ce qu'il y a de liqueur au deſſus du fil. On le peut, en faiſant entrer dans le Tube un Tuyau capillaire, & ſuçant à ſon bout ſupérieur, pendant que l'inférieur touche la liqueur. On peut auſſi ſe ſervir du Tuyau capillaire pour porter dans le

gros Tuyau ce qui manque de liqueur juſqu'à la ligne de la congélation. Cette façon d'achever de le remplir eſt plus préciſe, & même plus prompte que celle de verſer de la liqueur par ſon ouverture ſupérieure; on n'a point à attendre le long écoulement de celle qui s'eſt attachée contre les parois. Souvent il y a ſi peu de liqueur à ôter, qu'on en ôteroit trop avec le Tuyau capillaire. Il eſt plus commode d'avoir un fil dont on a engagé un des bouts dans un grain de plomb. On fait deſcendre ce grain de plomb dans la liqueur du Tube ; une petite partie de cette liqueur eſt entraînée par le plomb & le fil, lorſqu'on les retire. En répétant deux ou trois fois le même manege, on en ôte ce qui étoit à ôter. Au reſte s'il y a une circonſtance qui demande de l'attention, c'eſt celle dont il s'agit, c'eſt-à-dire, celle de mettre bien de niveau, avec le fil qui entourre le Tube, la ſurface de l'Eſprit de Vin condenſé par la glace. S'il y avoit erreur en cet endroit de $\frac{1}{4}$, ou de $\frac{1}{8}$ de degré, ce ſeroit une erreur qui ſe trouveroit la même à tous les degrés.

Le Thermometre étant retiré de la glace, il ne reſte plus qu'à ſceller hermétiquement le bout du Tube *. Ceux qui connoiſſent la Lampe des Emailleurs, ſçavent aſſés comment cela ſe fait. En ſcellant le bout du Tuyau, on échauffe l'air qu'il contient, on le rarefie, de ſorte que celui qui reſte au deſſus de la liqueur, n'a plus ni la denſité, ni par conſéquent le reſſort de l'air ordinaire.

* Fig. 9. X.

Au lieu de ſceller le bout du Tuyau à la Lampe, on peut ſe contenter de le boucher avec un mélange de Cire & de Thérébentine. C'en eſt aſſés pour ôter à l'air intérieur toute communication avec l'air extérieur. On peut même faire qu'alors l'air intérieur ſe trouve plus rarefié qu'il ne l'eſt, lorſque le Tube a été ſcellé de l'autre maniére, & qu'il ſoit rarefié à un point plus connu. Pour cela on mettra la Boule du Thermometre dans de l'eau, qu'on fera enſuite chauffer peu-à-peu. La liqueur s'élevera, l'air ſera chaſſé, & ſortira par le bout du Tuyau encore ouvert; on le fermera quand l'eſpace occupé par l'air n'en paroîtra contenir que la quantité

qu'on y veut laisser. Si même la longueur du Tuyau le permet, avant de le boucher, on fera monter l'Esprit de Vin au terme où la chaleur de l'eau boüillante peut le conduire, ou à peu-près. Nous expliquerons pourtant une autre maniére de marquer ce terme, qui ne demande pas qu'on mette la Boule du Thermometre dans l'eau boüillante; mais on est plus sûr de la vérité de la détermination d'un point, quand deux méthodes différentes donnent ce même point.

C'est une question, que nous n'examinons pas actuellement, de sçavoir s'il vaut mieux laisser dans le Thermometre de l'air tel à peu-près que l'air ordinaire, ou s'il vaut mieux n'y laisser que de l'air extrémement rarefié, tel qu'est celui des endroits que les Physiciens appellent *vuides*. Je dirai seulement d'avance que dans l'un & dans l'autre parti il y a des inconvénients, qui sont moindres à mon avis dans un état moyen; de sorte que j'incline à ne pas laisser l'air du Tuyau dans son état ordinaire, & aussi de n'y pas laisser un air très-rarefié. Un degré de rarefaction approchant de celui qu'il a dans la plus grande chaleur de nos climats, me paroît le plus convenable; & ce degré est plus aisé à saisir à peu-près en faisant élever l'Esprit de Vin dans le Thermometre au moyen de l'eau chaude, & scellant le bout de ce Thermometre avec nôtre composition de cire sur laquelle on étendra ensuite, si l'on veut, un Vernis, qu'en le scellant à la Lampe. Le seul inconvénient que je sçache à le sceller avec la composition de cire, c'est qu'il faut alors éviter de renverser le Thermometre, de crainte que l'Esprit de Vin ne causât quelque altération au bouchon. On peut pourtant le sceller à la Lampe, sans y renfermer un air très-rarefié, & cela si on se contente d'abord d'allonger le bout du Tuyau en un fil creux, délié, qu'on le laisse refroidir, & qu'on scelle ensuite assés brusquement le bout de ce filet, ou de ce Tuyau capillaire.

Enfin le bout du Tube du Thermometre ayant été scellé de quelque façon que ce soit, il ne reste plus qu'à le mettre sur la Planche graduée, & à l'y assujettir. Sa position exacte est aisée à retrouver; le fil qu'on a laissé sur le Tube, & qui

marque

marque le terme de la congélation de l'eau, est un repaire sûr; ce fil doit être posé vis-à-vis le trait qui la marque aussi sur la Planche.

Au reste, si on en juge par la longueur des petits détails dans lesquels nous venons d'entrer, la construction des nouveaux Thermometres paroîtra plus longue & plus difficile qu'elle ne l'est en effet. Mais on ne doit pas juger du temps que les choses demandent à être faites par celui qu'elles demandent à être dites. Il y aura même bien des abbréviations pour les ouvriers qui se voudront charger de faire ces Thermometres. Ils peuvent avoir de grandes mesures, de capacités différentes, qui chacune en contiendront 1000 petites, & dès qu'ils auront un certain nombre de ces mesures, il s'en trouvera presque toûjours quelqu'une propre à remplir le Thermometre jusqu'au terme de la congélation de l'eau, d'autant plus que ce terme peut être pris sur une assés grande portion de Tube. Si la mesure versée laisse la surface de la liqueur trop bas dans le Tuyau, on a, pour la faire monter, la ressource des grains solides introduits dans la Boule. Une autre abbréviation c'est, au lieu des mesures de 1000, d'en avoir de 975, & céla, comme celles de 1000, de différents volumes. La mesure de 975 ayant été vuidée dans le Thermometre, on versera une à une 25 petites mesures de Mercure. Dès qu'une de ces mesures sera entrée dans la Boule, on marquera sur la Planche, par un trait, jusqu'où la surface de l'eau a été élevée; & ainsi de suite, on graduera le Thermometre d'une maniére plus aisée que celle que nous avons pratiquée ci-devant, car après avoir rempli le Thermometre jusqu'au terme de la congélation de l'eau, nous en avons retiré 25 mesures d'eau, pour y mettre ensuite 25 mesures de Mercure. Enfin on trouvera sans doute bien d'autres abbréviations auxquelles je n'ai pas pensé.

Il y en a pourtant encore une dont nous ne nous dispenserons pas de parler, qui sera d'une très-grande commodité aux ouvriers qui se chargeront de faire beaucoup de Thermometres. Quand ils en auront une fois quelques-uns de

construits dans toute l'exactitude possible, & qu'ils auront du même Esprit de Vin, dont ils les ont remplis, ou d'un Esprit de Vin bien reconnu pour être de la qualité du premier, ils pourront s'épargner les petits frais, & la peine de faire congeler l'eau autour de leurs Boules. Les capacités des Boules & des Tubes ayant été bien mesurées, en un mot la graduation une fois faite, ils verseront de l'Esprit de Vin dans les nouveaux Thermometres jusqu'à ce qu'il y soit élevé au degré où l'est actuellement celui des autres : la marche des uns & des autres sera précisément la même, si les derniers faits ont été gradués soigneusement. Nous n'avons rien dit des petits entonnoirs dont on doit se servir pour vuider dans le Tube les grandes mesures, tels que sont ceux de forme
* Fig. 10. ordinaire *, ou ceux ** de la forme de nos petites mesures
** Fig. 11. avec lesquelles on prend à plusieurs fois la liqueur d'une grande mesure, après l'avoir versée dans un verre.

Quel que soit, dans différents Thermometres, le nombre des degrés qui y exprime le volume de l'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle, il sera toûjours aisé de les ramener à une mesure commune, leurs rapports sont toûjours aisés à voir. Que le volume de la liqueur, qui est exprimé dans l'un par 800, le soit dans l'autre par 900, le rapport de leurs degrés sera comme 8 à 9, c'est-à-dire, que 8 degrés de celui de 800 en vaudront 9 de celui de 900. Ainsi ces deux Thermometres étant exposés à la même température d'air, si la liqueur du premier est élevée à 16 degrés, celle du second le sera à 18. Il en sera de même de ceux où le volume condensé par la congélation est exprimé par tout autre nombre exact de 100es. Mais des nombres rompus, comme 813, 743, rendroient la comparaison des degrés embarrassante, rarement la pourroit-on faire sur le champ, c'est ce qui nous a fait rejetter ces sortes de nombres. J'aimerois pourtant mieux qu'on exprimât le volume de la liqueur par le même nombre de centaines sur tous les Thermometres ; il y a mille gens, parmi ceux qui se servent de Thermometres, que des réductions aussi simples

que les premiéres dont nous venons de parler, embarrasseroient. Je voudrois donc, en leur faveur, que le terme de la congélation de l'eau fût exprimé par un même nombre sur tous les Thermometres; 1000 est celui que j'ai pris pour ceux que j'ai fait faire. Au moyen des grandes mesures de 1000, ou de 975, de différentes capacités, il sera toûjours aisé de construire les Thermometres sur ce nombre. Un qui auroit été construit sur 800, 900, peut aussi y être ramené, pourvû qu'on se donne la peine d'y mettre une nouvelle échelle de degrés. Dès que le nombre de 800, par exemple, est pris pour 1000, 8 des anciens degrés en valent 10 des nouveaux, 4 des anciens en valent 5 de ceux-ci. Pour construire la nouvelle échelle, il n'y a qu'à diviser 4 degrés en cinq. Le Compas de proportion facilitera cette division, & elle ne produira aucun changement sensible dans les rapports que les degrés doivent avoir entr'eux, si quand on divise les quatre degrés en cinq, on marque d'abord les deux nouveaux degrés, de façon que le premier soit pris sur la partie la plus basse, du plus bas des quatre, & le cinquiéme sur la partie la plus élevée du quatriéme. Il en seroit de même de toute autre réduction, comme de 900 à 1000.

Quand on n'aura point éprouvé soi-même combien les procedés que nous avons expliqués pour graduer les Thermometres sont aisés à pratiquer, on aura peine à croire qu'ils donnent des mesures aussi exactes qu'ils les donnent réellement. Au moyen des petites mesures remplies avec le Mercure, chaque degré est déterminé avec une extrême précision. Il paroîtra peut-être plus difficile de mesurer la capacité de la Boule & de la partie du Tube qui contiennent la liqueur, dont le volume est condensé par la congélation de la glace artificielle. Cette capacité est de 1000 mesures; sur 1000 mesures, ne se trompe-t-on point de quelques-unes? Je répondrai que si on est attentif, qu'on ne se trompe pas d'une seule mesure. Mais se trompa-t-on de deux ou trois, ce ne seroit pas une source d'erreur considérable; car supposons qu'au lieu de 1000, on eût mis 1002 mesures, voyons où iroit l'erreur,

dans un cas qui donnera idée de ce qu'elle pourroit être dans les autres. Que le Thermometre, dont le volume de la liqueur condensée par la congélation artificielle est exactement 1000, marque 20, celui dont le volume de la liqueur condensée est 1002, marquera alors 20 degrés plus $\frac{1}{25}$ de degré. L'erreur sur 20 degrés sera donc de $\frac{1}{25}$ de degré, & sur 40 degrés qui est un terme d'un chaud excessif, de $\frac{2}{25}$. Erreurs assés petites pour pouvoir être négligées.

Nous avons remis jusqu'ici tout ce qui est de discussion; la premiére qui se présente est de sçavoir si le terme de la congélation de l'eau est assés fixe pour que nous puissions nous y tenir; si toute glace artificielle, dans le temps qu'elle se forme, a un égal degré de froid. Nous sçavons que pendant l'Hiver le degré de froid de la glace n'est pas à beaucoup près toûjours le même. J'ai fait, dans le mémorable Hiver de 1709, des expériences sur une glace dont le froid surpassoit extrémement celui des glaces ordinaires. Je ne me suis point avisé alors d'observer, dans l'instant même où cette glace se formoit, si elle étoit plus froide que de la glace artificielle. Mais quoique la glace soit susceptible d'une plus grande augmentation de froid, il ne s'ensuit nullement qu'il y ait de la glace d'eau pure, qui, quand elle se forme, soit plus froide que d'autre glace. C'est un fait qui mérite d'être éprouvé. Cependant, quel qu'en soit le succès, il ne fait rien contre le degré de froid de nôtre glace artificielle ; car je suppose que nous faisons congeler de l'eau dans un air moins froid que la glace. Or dans cette supposition, tout le froid que prend l'eau qui se gele, ne peut être produit que par la glace & les sels qui environnent le vase où elle est contenüe ; cette eau reste liquide, eau ordinaire, tant qu'elle n'a pas pris assés de froid, tant qu'elle n'a pas perdu assés de la matiére qui entretient le mouvement de ses parties. Mais quand le mouvement de ses parties s'arrête, quand elle commence à se figer, il paroît que ce doit toûjours être quand il ne lui reste plus qu'une certaine quantité déterminée de la matiére nécessaire à la mettre en mouvement, ou, ce qui est la même chose, à l'échauffer.

Il reste pourtant encore une difficulté considérable, elle naît d'observations curieuses que nous devons aux Thermometres. De l'eau, exposée l'Hiver à un air qui a un certain degré de froid, gele ; exposée d'autres jours de l'Hiver à un air qui a un plus grand degré de froid, elle ne gele pas. Il y a plus : le dégel commence souvent, la glace commence à se fondre, quoique le Thermometre marque un degré de froid beaucoup plus grand que celui qu'il marquoit, lorsque la glace s'est formée. Mais avant de rendre raison de ces faits, toutes leurs circonstances demandent à être mieux examinées que je ne l'ai fait jusqu'ici, l'Hiver où nous allons entrer me mettra apparemment en état de faire cet examen.

Après tout, qu'en résulte-t-il ? c'est que l'air n'est pas toûjours en état, quoiqu'également froid, de glacer l'eau ; qu'il peut même la fondre quelquefois, quoiqu'il ait un degré de froid supérieur à celui avec lequel il l'a gelée. Mais nôtre glace artificielle n'est exposée à aucune des variétés que l'air nous fait voir dans celle dont il occasionne la production par son attouchement. 1.° La nôtre est faite dans un temps où l'air ne pourroit agir que pour la fondre. 2.° Elle est produite par un mélange de sels & de glace plus froid alors que l'air. 3.° Enfin nous prenons la précaution de couvrir le vase qui contient l'eau qui doit être gelée, & celui qui contient le mélange de glace & de sels, de le couvrir, dis-je, d'un linge sur lequel est étendüe une couche de glace. Cette couche de glace dérobe à l'action, ou à la plus grande partie de l'action, de l'air extérieur, toute l'eau qui doit se geler, & le mélange de glace & de sels.

Mais ce qui vaut mieux que tous les raisonnements précédents, & qui est, ce me semble, sans réplique, c'est que j'ai fait des glaces en différentes saisons de l'année, j'en ai fait dans des jours sereins & dans des jours pluvieux, pendant que différents vents souffloient, & ces glaces ont toûjours fait descendre le Thermometre au terme marqué pour la congélation artificielle.

Passons enfin au dernier point fondamental de la conf-

truction des Thermometres, & à celui qui jusqu'ici a été négligé. Nous avons vû combien il est essentiel que la qualité de l'Esprit de Vin qu'on y fait entrer soit connue & bien déterminée, sans quoi on aura eu beau bien déterminer un point fixe d'où partent les degrés, ces degrés auront eu beau à être mesurés exactement, & pris chacun égaux à une certaine partie du volume de la liqueur, différents Thermometres exprimeront les augmentations de froid & de chaud par des nombres de degrés qui ne seront pas comparables, s'ils sont remplis d'Esprits de Vin plus dilatables les uns que les autres, dans des proportions à nous inconnues. Il est donc absolument essentiel d'avoir une méthode qui fasse connoître la qualité de l'Esprit de Vin dont on veut voir les augmentations & les diminutions de volume dans le Thermometre.

Dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1718 nous en avons un de M. Geoffroy le jeune sur la maniére de mesurer la force des Eaux-de-vie, où, après avoir examiné les moyens dont on s'est servi jusqu'ici pour y parvenir, après avoir fait voir combien ils sont imparfaits, il en propose un nouveau qui promet plus d'exactitude, & qui en donne aussi davantage ; c'est de remplir un petit vase cylindrique de l'Eau-de-vie dont on veut connoître la force, de poser ce petit vase dans un autre qui est plein d'eau, de mettre alors le feu à l'Eau-de-vie, & de la laisser brûler autant qu'elle le peut. Il a poussé même la précaution jusqu'à faire couler continuellement de nouvelle eau dans le vase qui contient celui où l'Eau-de-vie brûle, afin d'entretenir cette eau dans un degré de chaleur toûjours égal. Après que l'Eau-de-vie a été brûlée, il reste une certaine quantité d'eau ou de flegme. Il mesure la hauteur, ou, ce qui est la même chose, la quantité du flegme resté ; de deux Eaux-de-vie, celle-là est la plus forte qui laisse une moindre quantité de flegme.

Plus l'Esprit de Vin contenu dans le Thermometre est rectifié, plus il parcourt de chemin pendant qu'il se fait un changement dans la température de l'air qui l'environne. A cet égard il vaut mieux employer un Esprit de Vin plus fort,

qu'un qui l'est moins. Si cependant la qualité d'un Esprit de Vin foible, d'une Eau-de-Vie même, étoit plus aisée à déterminer que celle d'un Esprit de Vin rectifié, on pourroit faire des Thermometres avec de l'Eau-de-Vie. Ce qu'on leur a ôté, en se servant d'une liqueur moins dilatable, il seroit aisé de le leur rendre en augmentant le diametre de la Boule, sans augmenter celui du Tuyau. Aussi m'étois-je proposé de faire entrer dans les Thermometres une Eau-de-Vie, qui, après avoir été brûlée, laissât une quantité de flegme connuë, par exemple, un quart de son premier volume. La méthode que nous venons de rapporter, me paroissoit très-propre à fixer la qualité de celle dont je voudrois faire usage. Ç'a été avec regret que j'ai appris, par des expériences réïtérées, que cette méthode, qui pouvoit être bonne pour le cas où on l'a employée, pour juger une contestation entre des Marchands sur la qualité des Eaux-de-Vie, pour distinguer des Eaux-de-Vie entre lesquelles il y a des différences considérables, ne donnoit pas des mesures d'une exactitude telle qu'il la falloit à des expériences physiques fort délicates. J'ai, à dessein, affoibli de l'Esprit de Vin : tantôt sur quatre mesures d'Esprit de Vin j'en ai mis une d'eau; tantôt j'ai mis la même mesure d'eau seulement sur trois mesures du même Esprit de Vin; tantôt j'ai mêlé ensemble un égal nombre de mesures d'eau & d'Esprit. J'ai fait des mêlanges en diverses autres proportions moyennes, & cela pour avoir des Eaux-de-Vie de différentes forces. J'ai ensuite éprouvé si en faisant brûler ces différentes Eaux-de-Vie, avec toutes les précautions possibles, je trouverois des résidus de flegme proportionnés aux différentes qualités connuës de ces Eaux-de-Vie, & j'ai vû que cette sorte d'épreuve ne répondoit pas assés à ce que j'en avois attendu. La même Eau-de-Vie a laissé souvent des résidus de flegme aussi différents entr'eux que pourroient l'être ceux de deux Eaux-de-Vie de qualités différentes, & deux Eaux-de-Vie de qualités différentes m'ont souvent laissé le même résidu. Un rien est capable de faire que la flamme s'éteigne plûtôt

dans une expérience que dans l'autre, le plus leger souffle d'air y suffit quelquefois. Pour remédier à l'agitation de l'air, j'avois pourtant encore ajoûté aux précautions demandées dans le Mémoire que je viens de citer. J'ai fait brûler mes essays d'Eaux-de-Vie dans des endroits clos, tels que sont les Lanternes des balances d'Essayeurs. Au lieu d'entourer d'eau le vase dans lequel la liqueur brûloit, je l'ai souvent entouré de glace. Mais en un mot, quelque chose que j'aye fait & tenté, je n'ai pû, par cette méthode, parvenir à déterminer avec assés de précision la qualité de l'Eau-de-Vie que je destinois à des Thermometres.

Il est même à remarquer que ces épreuves ne m'ont jamais rendu toute la quantité d'eau que j'avois fait entrer dans l'Esprit de Vin; lorsque la partie spiritueuse s'élevoit en flamme, non-seulement elle enlevoit tout le flegme qui lui étoit comme propre, elle enlevoit encore une bonne portion de celui que je lui avois joint, & cela avec des variétés qui n'eussent pas permis de porter de jugement sur les proportions du mélange à qui les auroit ignorées.

Forcé d'abandonner cette voye, j'en ai cherché une autre qui donnât des mesures plus exactes des qualités des Eaux-de-Vie & des Esprits de Vin. Il s'en présentoit naturellement une, propre même à faire connoître immédiatement la qualité de la liqueur d'où l'effet des Thermometres dépend; c'est de reconnoître de combien une liqueur se dilate depuis un certain terme de froid ou de moindre chaud jusqu'à un autre terme connu d'un plus grand chaud. Ces deux termes doivent être fixes & assés éloignés l'un de l'autre pour donner des différences saisissables. Nous les avons dans la congélation artificielle de l'eau, & dans le degré de chaleur de l'eau boüillante: mais j'avois eû occasion, il y a long-temps, de m'appercevoir que l'Esprit de Vin bout avant que l'eau, dans laquelle est plongée la bouteille qui le contient, soit parvenuë à boüillir. Si on continuë à faire chauffer de l'Esprit de Vin qui a commencé à boüillir, si on lui fait prendre le degré de chaleur de l'eau boüillante, il bout encore plus fortement.

L'irrégularité

L'irrégularité qui est dans le nombre & dans la grosseur des bulles qui sont à la surface, de celles qu'on voit s'élever continuellement du fond du vase, & de celles qui sont par-tout parsemées dans la liqueur, ne permettent pas de déterminer avec précision le volume que la chaleur de l'eau boüillante fait prendre alors à l'Esprit de Vin. Ce sont ces considérations qui m'avoient arrêté; je ne suis venu à chercher les moyens de remédier à l'inconvénient des boüillonnements que quand j'ai vû que j'en avois absolument besoin. Tous les jours la Théorie nous montre comme simples des procedés qu'on reconnoît impraticables, quand on veut en faire usage; au contraire une infinité de procedés paroissent dans la Théorie tous pleins de difficultés qui s'évanoüissent dans la pratique. J'ai voulu voir si les boüillonnements de l'Esprit de Vin ne seroient point de ces difficultés qui semblent plus grandes à surmonter qu'elles ne le sont réellement. Dans un petit Matras *, dont le col étoit assés délié, j'ai versé de l'Esprit de Vin jusqu'au dessus de l'origine du col*; j'ai mis ce Matras dans l'eau, que j'ai fait chauffer peu à peu jusqu'à ce qu'elle vînt à boüillir. L'Esprit de Vin a commencé, à l'ordinaire, à donner des boüillons, avant qu'il en parut sur l'eau; j'ai retiré le Matras de l'eau, & j'ai vû aussi-tôt tout boüillonnement cesser. J'ai marqué l'endroit du col du Matras où étoit resté l'Esprit de Vin immédiatement après que les boüillonnements avoient été appaisés *; ensuite j'ai de nouveau plongé le Matras dans l'eau boüillante; la liqueur s'est élevée dans le col au-dessus du terme que j'avois marqué, après quoi elle a recommencé à boüillir; mais ce qui est à remarquer, c'est que lorsqu'elle a recommencé à boüillir, elle étoit plus haut que le terme où les boüillonnements avoient cessé la premiére fois. Je l'ai encore retirée alors. Tout boüillonnement a encore été appaisé dans un instant, & l'Esprit de Vin s'est trouvé plus élevé encore dans le col du Matras qu'il ne l'étoit la premiére fois *. Ainsi je l'ai retiré & je l'ai replongé plusieurs fois de suite jusqu'à ce que l'eau commençât à boüillir, & même pendant que l'eau boüilloit

* Fig. 12.
* *ff.*
* *gg.*
* *hh.*

fortement. J'ai toûjours vû les bulles, tant de la surface, que celles qui montoient du milieu de l'Esprit de Vin, disparoître, un instant après que l'Esprit de Vin étoit tiré de l'eau, & sa surface supérieure s'applanir. Cette surface s'est élevée de plus en plus jusqu'à un certain point; quand elle
* Fig. 12. *ii.* a été arrivée une fois à ce point*, chaque fois que je remettois le Matras dans l'eau boüillante, les boüillonnements de l'Esprit de Vin s'élevoient; mais dès que je retirois le Matras, & que les boüillonnements étoient arrêtés, la surface applanie de l'Esprit de Vin se retrouvoit toûjours vis-à-vis ce même point du col du Matras. J'ai donc crû devoir regarder ce terme comme le terme fixe du plus grand degré de dilatation où la chaleur de l'eau boüillante pouvoit porter l'Esprit de Vin, que j'essayois, sans le faire boüillir; & j'ai crû que ce terme seroit de même saisissable pour tout autre Esprit de Vin, & pour toute Eau-de-vie, qu'il donneroit une maniére assés aisée & assés précise de reconnoître le degré de dilatabilité de chacune de ces especes de liqueurs, & une maniére de les caractériser.

Pour voir si des expériences plus suivies, & faites avec plus de précautions, me confirmeroient dans cette idée, j'ai suivi la même route que j'ai indiquée pour la construction des Thermometres : après avoir choisi un petit Matras de verre dont le col étoit assés délié, j'ai rempli le Matras jusqu'un peu au dessus de l'origine de son col avec de petites
* Fig. 12. mesures*; il en est entré 400 jusqu'à l'endroit désigné**.
** *CC.* J'ai marqué cet endroit avec un fil, lié autour du col; alors j'ai mis le Matras dans une boîte de fer blanc, que j'ai posée dans une boîte plus grande, remplie de glace pilée, & mêlée avec du sel. En un mot, j'ai fait geler l'eau qui entourroit le Matras. L'Esprit de Vin est descendu au dessous du fil. J'ai fait entrer dans le Matras autant de mesures qu'il en a fallu, afin que l'Esprit de Vin se retrouvât encore à la hauteur du
* *CC.* fil*. Enfin mon fil m'a marqué le terme d'un volume de 400 mesures d'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle de l'eau. Ce que je cherchois étoit d'avoir en parties

de ce même volume, sa différence avec le volume de la même quantité d'Esprit de Vin dilaté par la chaleur de l'eau boüillante. J'ai donc fait chauffer & boüillir de l'eau. A la vapeur seule de l'eau boüillante j'ai échauffé le Matras, qui contenoit l'Esprit de Vin. Quand je l'ai jugé assés échauffé, pour qu'il n'y eût pas à craindre que la chaleur de l'eau boüillante le fit casser, je l'ai enfoncé peu-à-peu dans cette eau ; bientôt l'Esprit de Vin a commencé à boüillir, & aussitôt j'ai retiré le Matras. J'avois eu la précaution d'entourer son col d'un second fil que je pouvois faire glisser en montant. Avec ce fil j'ai marqué l'endroit où l'Esprit de Vin étoit resté après que les boüillonnements avoient été appaisés. Aussitôt j'ai remis l'Esprit de Vin dans l'eau boüillante. Il s'est élevé au dessus du fil, & bientôt il a boüilli. J'ai retiré le Matras. J'ai élevé le fil jusqu'à l'endroit où l'Esprit de Vin s'est trouvé après que les bulles ont eu disparu. Quand j'ai eu répété ce manege cinq à six fois au plus, le terme de l'élévation marquée par le fil, après les boüillonnements cessés, s'est trouvé constamment le même *, ainsi je l'ai regardé comme le terme de la plus grande dilatation que l'eau boüillante pouvoit donner à cet Esprit de Vin sans le faire boüillir. Dans d'autres expériences, dont il suffira de rapporter les résultats, j'ai suivi de pareils procédés. Pour achever celle que nous avons commencé à détailler, il ne restoit plus qu'à mesurer la capacité de l'intervalle compris entre les deux fils *, en mesures pareilles à celles dont il y avoit 400 jusqu'au premier fil, jusqu'à celui qui marquoit le terme de la congélation artificielle. J'ai trouvé que cet espace contenoit 35 de ces mesures. Ainsi le volume de l'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle, étoit 400, rarefié par la chaleur de l'eau boüillante, étoit 435. Cet Esprit de Vin étoit du meilleur qui se trouve ordinairement chés les Marchands. Brûlé dans la cuilliére, il ne laissoit point d'eau, il allumoit la poudre. Mais on sçait combien ses qualités sont peu déterminées par ces derniéres propriétés, qu'elles peuvent convenir à des Esprits de Vin plus ou moins rectifiés, au lieu que le caractere de cet Esprit

* Fig. 12. ii.

* CC, ii.

de Vin eſt bien déterminé, quand on dit qu'il eſt tel que ſon volume condenſé par la glace artificielle eſt à ſon volume dilaté par la chaleur de l'eau boüillante, comme 400 eſt à 435, comme 80 eſt à 87. Un Eſprit de Vin plus rectifié que celui dont il s'eſt agi juſqu'ici, donnera une plus grande différence entre les deux volumes, & un Eſprit de Vin plus foible en donnera une plus petite.

Pour m'aſſûrer ſi les rapports ſe trouveroient tels qu'on les devoit attendre dans les Eſprits de Vin les plus foibles, j'ai commencé par m'aſſûrer des degrés de dilatabilité de l'eau de Seine compris entre le terme de la glace artificielle, qui ne ſuffit pas pour geler l'eau renfermée dans un vaſe qu'elle environne, & le degré de dilatation produit par l'eau boüillante. J'ai trouvé que le premier volume de l'eau étoit au ſecond, environ comme 400 à 415. J'ai mêlé de cette eau, dont les degrés de dilatabilité étoient connus, avec de l'Eſprit de Vin de ma premiére épreuve, en mettant une meſure d'eau ſur trois d'Eſprit de Vin. Une quantité de cet Eſprit de Vin affoibli, dont le volume, condenſé par la glace artificielle, étoit de 400 meſures, a été rarefiée par la chaleur de l'eau boüillante, & ſon volume eſt devenu à peu-près de 430 meſures. Le rapport du premier volume a donc été à celui du ſecond, comme 400 à 430, qui eſt préciſément le rapport qui devoit naître du mêlange que j'avois fait; car le volume total, pendant la condenſation, étoit compoſé de 300 meſures d'Eſprit de Vin, & de 100 meſures d'eau; or nous ſçavons que 400 meſures de cet Eſprit de Vin condenſé, étant enſuite dilatées par l'eau boüillante, ſeroient devenües 435 meſures, ou 400 auroient donné une augmentation de 35. D'où il ſuit que l'augmentation donnée par 300 meſures eſt de 26 meſure & $\frac{1}{4}$ de meſure. De même 400 meſures d'eau condenſée ayant dû donner par la dilatation une augmentation de 15 meſures, 100 meſures doivent donner 3 meſures & $\frac{3}{4}$. Or l'augmentation du volume de nôtre Eſprit de Vin affoibli étoit compoſée de l'augmentation donnée par 300 meſures d'Eſprit de Vin, & de l'augmentation donnée

par 100 mesures d'eau; la premiére est 26 $\frac{1}{4}$, & la seconde 3 $\frac{3}{4}$; les deux ensemble font 30, qui est précisément la quantité qui a été trouvée par l'expérience, dont l'exactitude a passé ce que j'en devois attendre; aussi n'en ai-je pas toûjours eu une aussi grande dans celles que j'ai répétées sur des mêlanges faits en d'autres proportions, mais elle a toûjours été aussi approchée que je le pouvois demander.

J'ai encore trouvé la même exactitude dans un mêlange fait d'un égal nombre de mesures d'Esprit de Vin & d'Eau. Le volume de cette Eau-de-vie, ou de cet Esprit de Vin foible, qui condensé par la congélation artificielle, étoit de 400 mesures, a crû par la chaleur de l'eau boüillante jusqu'à devenir 425.

Mais quand il arriveroit, par quelques circonstances particuliéres, que le volume composé ne seroit pas précisément d'un degré de dilatabilité égal à celui qui doit résulter de ce que doivent fournir chacun des composants, la construction des Thermometres n'en souffriroit point, pourvû qu'on s'assûrât du degré de dilatabilité qu'a l'Esprit de Vin affoibli qu'on y employe. Au reste, non seulement il peut y avoir des circonstances qui empêchent que le degré de dilatabilité du volume composé ne soit égal à celui qui résulte de ce que doivent fournir chacun des composants, il y en a réellement de telles, mais nous ne les examinerons pas aujourd'hui; elles tiennent à quelques autres faits physiques dont l'examen nous meneroit loin, ce sera matiére suffisante à un autre Mémoire; mais les différences qui en naissent sur la dilatabilité de l'Esprit de Vin allié ne donnent pas de différences considérables dans la pratique.

Nous pouvons donc nous en tenir à cette méthode, non seulement pour caractériser les Esprits de Vin plus ou moins rectifiés, mais aussi pour déterminer les degrés de force des différentes Eaux-de-vie, & les comparer entr'eux. Car ayant pris un Esprit de Vin d'une certaine dilatabilité connüe, pour terme fixé, on reconnoîtra par les épreuves de la dilatabilité des Eaux-de-vie qu'on a à essayer, combien il faudroit ajoûter

d'eau à cet Esprit de Vin pour le réduire à être une des Eaux-de-vie soûmise à l'examen, ou, ce qui est la même chose, quelle quantité d'Esprit de Vin, semblable à celui qui a été pris pour terme, & quelle quantité d'eau ou de flegme sont mêlées ensemble pour composer l'Eau-de-vie dont il s'agit. L'utilité de cette méthode ne se borne pas à la construction des Thermometres, il est une infinité d'autres cas, sur-tout dans le commerce, où la connoissance des qualités des Eaux-de-vie & de celles des Esprits de Vin est importante.

Mais nous devons avertir que pour faire exactement l'essai de la dilatabilité de ces liqueurs, qu'il est essentiel de se servir d'un vase de la forme d'un Matras, ou d'une forme approchante, je veux dire que le vase doit avoir un col long, qui ne soit pas extrêmement délié. Si au lieu de Matras on se servoit d'une Boule de Thermometre adaptée à un Tuyau de médiocre grosseur, les bulles d'air trouveroient trop de difficulté à monter, elles éleveroient l'Esprit de vin par vibrations. Dans des cols même assés gros, on pourra être surpris par des jets d'Esprit de Vin qui s'éléveront subitement à une grande hauteur, qui sortiront du Matras, & qui troubleront l'épreuve, si on n'est pas attentif à retirer la Boule de l'eau chaude, ou boüillante, dès que l'Esprit de Vin commence à boüillir. En un mot ces épreuves, pour ainsi dire, du titre de l'Esprit de Vin & de l'Eau-de-vie ne seront exactes que quand elles seront faites avec les circonspections qu'elles demandent, que quand elles auront même été répétées plusieurs fois. Quelque sûres que soient les régles qui font connoître les titres de l'Or & de l'Argent, ces régles, pour être bien mises en pratique, demandent à l'être par gens intelligents, & même qui y soient exercés.

Tout ce qui doit être mesuré physiquement, ne peut l'être que dans une exactitude physique qui ne donne jamais que des à peu près, mais qui ordinairement nous suffisent. Une circonstance accompagne nécessairement nos épreuves des Esprits de Vin & des Eaux-de-Vie, qui empêche que les résultats n'en soient absolument tels qu'ils devroient être. Il

faudroit que la liqueur condensée par la glace, & que la même liqueur rarefiée par l'eau boüillante se trouvât toûjours dans une mesure d'une même capacité; or la mesure, de quelque matiére qu'elle soit faite, est elle-même condensable & rarefiable. Quand le froid de la glace agit sur le Matras, il le resserre, il diminuë sa capacité; au contraire la chaleur de l'eau boüillante augmente sa capacité, elle le dilate. La capacité du Matras, qui, mesurée dans un air temperé, a été trouvée 1000, n'est plus 1000, lorsque ce Matras est resté dans l'eau gelée, & est plus de 1000, lorsqu'il a été échauffé par l'eau boüillante. Nous mesurons les capacités des Matras dans un air tempéré, il arrive donc que l'endroit marqué pour contenir un volume de liqueur appellé 1000, ne le contient pas, lorsque la glace l'a eu refroidi; & que l'endroit du Matras marqué, pendant qu'il étoit échauffé par l'eau boüillante, pour 1075, par ex. ou 1080, a alors une capacité qui surpasse ce nombre. On ne peut éviter ces alternatives de diminutions & d'augmentations dans la capacité du Matras, mais il m'a semblé qu'on pouvoit les évaluer à peu près, & être ensuite en état de faire des corrections aux résultats donnés par les essais, ou de juger s'il y a des corrections qui méritent d'être faites. Voici comment je m'y suis pris. J'ai mesuré dans un air tempéré, la capacité d'un Matras avec de l'eau, 1200 mesures y ont été versées pour le remplir jusqu'à l'endroit du col que j'ai marqué avec un fil. J'ai vuidé ce Matras, & vuide, je l'ai entouré d'eau que j'ai fait geler. Alors je l'ai rempli avec l'eau, dont le froid étoit à peu près égal à celui des parois du vase, avec de l'eau prête à se glacer; 1199 mesures de cette eau se sont élevées jusqu'au fil; donc la capacité étoit diminuée d'une mesure, ou de $\frac{1}{1200}$. La même voye n'a pas aussi bien réüssi, pour mesurer l'augmentation produite par l'eau boüillante, parce qu'il est difficile de remplir les petites mesures avec une eau extrêmement chaude, une autre y a suppléé en quelque sorte: le Matras plein d'eau jusqu'au fil, a été plongé brusquement dans l'eau boüillante, & heureusement il ne s'est point cassé; l'eau a descendu sur le champ dans le col du Matras,

Il y a long-temps que les Thermometres ont fait obſerver quelque choſe de pareil, qu'on a vû que leur liqueur, loin de monter, deſcend, lorſqu'on échauffe ſubitement leur boule. On ſçait auſſi que ſi la liqueur deſcend alors, que c'eſt que les parois de la boule ſont échauffées, avant que la liqueur qu'elle contient, l'ait été ſenſiblement, que ſa capacité eſt augmentée, avant que le volume de la liqueur ait eu le temps de croître. Dans nôtre expérience, nôtre Eſprit de Vin eſt deſcendu d'une meſure, ou environ, donc la capacité du Matras a été augmentée d'une meſure; d'où il ſuit que ſi on néglige d'eſtimer la dilatation & la contraction du vaſe, qu'un Eſprit de Vin, dont l'étenduë de la dilatabilité auroit été priſe dans ce cas de 400 à 435, ou de 1200 à 1305, ſera de 1199 à 1306, ſi on tient compte, comme on le doit, de ce dont la capacité du Matras ſe reſſerre & ſe dilate. Au lieu de meſurer cette capacité dans l'air tempéré, on peut la meſurer dans l'eau gelée, & avec de l'eau prête à geler, comme nous venons de le faire, & alors le fil marquera réellement un volume de 1200 parties ou meſures dans le temps de la congélation. Pour rectifier ce que l'eſſai donnera, il n'y aura donc qu'à ajoûter ce que l'augmentation du volume du vaſe exige qu'on y ajoûte, ce qui n'ira qu'à une meſure ſur l'accroiſſement qu'a paru recevoir un volume de 1200, & à peu près à $\frac{1}{3}$ de meſure ſur un volume de 400. Ainſi le volume d'Eſprit de Vin, qui condenſé, ſeroit 400, & trouvé par l'eſſai 435, devroit être eſtimé de 435 $\frac{1}{3}$. Il faut pourtant remarquer que ce ſeroit trop ajoûter au volume de 400 que le tiers d'augmentation de celui de 1200 : car les dilatations produites dans les boules par la chaleur, ſuivent le rapport des diametres, ou des circonférences de ces boules; & les capacités des boules ſont en raiſon des cubes des diametres augmentés.

Pour avoir des Thermometres, dont les degrés fuſſent exactement & commodement comparables en tout Pays, il ſeroit néceſſaire que les Sçavants vouluſſent bien convenir du choix d'un Eſprit; qu'ils exigeaſſent que tous les Thermometres

mometres fussent remplis de celui qu'ils auroient jugé le plus convenable. Leur choix ne devroit pas tomber, ce me semble, sur un Esprit de Vin très-rectifié ; on ne pourroit pas en recouvrer de tel par-tout. Un dont la dilatation comprise entre nos deux termes est de 32 mesures sur 400, est plus foible que ceux qui se trouvent communément ; il seroit toûjours aisé d'en avoir de tel, ou de ramener à cette condition ceux qui seroient plus forts. Les huit mesures de dilatation, qu'il donne sur 100, est un nombre dont le partage est commode, c'est ce qui m'a déterminé à le faire employer jusqu'à ce qu'on paroisse incliner davantage pour un autre, soit plus fort, soit plus foible.

Mais quel que soit l'Esprit de Vin, en faveur duquel on se détermine, on n'obmettra pas d'écrire son degré de dilatabilité sur la planche du Thermometre. On écrira, par exemple, en haut : *Esprit de Vin, dont le volume condensé par la congélation de l'eau est 1000, & rarefié par l'eau boüillante est 1080.* Dans ce cas, si le Thermometre a assés de hauteur, le degré de dilatation marque d'un côté 80, & de l'autre 1080 sera le terme de l'eau boüillante. Si la hauteur du Thermometre n'a pas permis d'écrire jusques-là la suite des degrés, on verra ceux qui manquent à cette suite. Il importe peu d'ailleurs qu'elle se trouve entiére sur les Thermometres, qui ne doivent nous apprendre que la température de l'air; jamais sa chaleur n'approche de celle de l'eau qui bout.

Lorsqu'on aura de l'Esprit de Vin, dont l'étenduë de sa dilatabilité surpassera celle que l'on veut à celui qui doit remplir le Thermometre, on diminuëra la dilatabilité du premier; on la réduira à devenir égale à celle de l'autre, en mêlant de l'eau avec l'Esprit de Vin trop fort ou trop dilatable. On y parviendroit par des tâtonnements, mais dès qu'on connoît le degré de dilatabilité de l'Esprit de Vin, & qu'on a celui de l'eau, il est aisé de trouver en quelle proportion l'alliage doit être fait pour que la liqueur composée, l'Esprit de Vin affoibli, n'ait précisément qu'un certain degré de dilatabilité moyen, tel qu'on le voudra. En voici la regle.

Soit priſe la différence entre la dilatabilité de l'eau, & la dilatabilité moyenne qu'on veut avoir.

Soit priſe auſſi la différence entre cette dilatabilité moyenne & celle de l'Eſprit de Vin donné.

Si on mêle un nombre de meſures d'Eſprit de Vin égal au nombre exprimé par la différence entre la dilatabilité de l'eau & la moyenne, avec un nombre de parties d'eau égal au nombre qui exprime la différence entre la dilatabilité de l'Eſprit de Vin donné & la moyenne, on aura un Eſprit de Vin affoibli, dont la dilatabilité ſera celle qu'on veut avoir. Par exemple, on a un Eſprit de Vin, dont la dilatabilité eſt de 35 meſures ſur 400, & on en veut un, dont la dilatabilité ſoit ſeulement de 30 ſur 400. Je ſuppoſe la dilatabilité de l'eau exactement de 15 ſur 400. Cela étant, la dilatabilité moyenne qu'on veut avoir eſt 30.

La différence entre la dilatabilité de l'eau, & la moyenne, eſt donc 30 moins 15 ou 15.

La différence entre la dilatabilité de l'Eſprit de Vin qu'on a, & la moyenne qu'on lui veut, eſt 35 moins 30, ou 5.

La regle eſt de mêler 15 meſures d'Eſprit de Vin avec 5 meſures d'eau, & l'Eſprit de Vin affoibli par cet alliage n'aura que 30 meſures de dilatabilité.

L'uſage de cette regle ſera également ſimple pour tous les autres cas.

Quand la différence des qualités des Eſprits de Vin de deux Thermometres ſera connuë, on pourra faire une ſorte de comparaiſon des degrés de ces Thermometres, mais ce ne ſera qu'une ſorte de comparaiſon, indépendamment de la peine du calcul, qui pourroit avoir ſes difficultés, elle ne ſçauroit être exacte. Une obſervation que nous n'avons pas encore rapportée, & digne de l'être, va apprendre pourquoi il ſeroit difficile de ramener à des meſures ſemblables les degrés des Thermometres qui contiennent des Eſprits de Vin de différentes qualités, c'eſt que les degrés de rarefaction de l'eau ne ſont pas, à beaucoup près, proportionnels aux degrés de rarefaction de l'Eſprit de Vin. Pour l'expliquer & le prouver en même temps

par un exemple, je prends un Eſprit de Vin qui, depuis le terme de la congélation juſqu'à celui de la chaleur de l'eau boüillante, ſe dilate de 30 meſures, & de l'eau qui, du premier des deux termes au ſecond, ſe dilate de 15. La ſomme des dilatations d'une des liqueurs eſt à la ſomme des dilatations de l'autre, comme 2 à 1, mais les degrés par où elles paſſent l'une & l'autre, pendant que certains degrés de chaleur agiſſent ſur elles, ne ſont pas dans cette proportion, à beaucoup près. Une après-midi d'un de nos jours d'Eté, aſſés chaud, je mis dans un Matras 400 meſures d'eau, & j'expoſai enſuite ce Matras au froid de la congélation artificielle. Ce froid ne fit deſcendre l'eau, ne la condenſa que d'une demi-meſure ou environ. Le rétréciſſement du vaſe la faiſoit paroître, à la vérité, moins condenſée qu'elle n'étoit, mais les expériences rapportées ci-devant ont prouvé que ce ne pouvoit être que de $\frac{1}{3}$ de meſure, ſuppoſons pour-tant que ce fut d'une demi-meſure. Ainſi l'eau s'étoit au plus condenſée d'une meſure entiére. L'Eſprit de Vin auquel je la compare, expoſé au même froid, eſt deſcendu de près de 10 meſures. Pendant que l'eau s'eſt condenſée d'une meſure, l'Eſprit de Vin s'eſt donc condenſé de 10; deſorte que dans l'intervalle qui eſt depuis la congélation de l'eau, juſqu'à une chaleur aſſés conſidérable pour les Habitants de Paris, l'eau ſe rarefie au plus d'une meſure, pendant que l'Eſprit de Vin ſe rarefie de 10 des mêmes meſures. Le rapport de la rarefaction de l'eau à la rarefaction de cet Eſprit de Vin dans cet intervalle, eſt donc à peu près comme 1 à 10; au lieu que la dilatation de l'eau, depuis la congélation juſqu'à la chaleur de l'eau boüillante, eſt à la dilatation du même Eſprit de Vin entre ces deux termes comme 1 à 2.

Dès que l'eau eſt ſi peu dilatée par une ſuite de degrés de chaleur, qui dilatent aſſés conſidérablement l'Eſprit de Vin, & qu'une autre ſuite de plus grands degrés de chaleur ramenent pour-tant le rapport entre la dilatation de l'eau & celle de l'Eſprit de Vin à être comme 1 à 2, il y a des degrés d'une chaleur forte, qui compenſent le peu d'effet des

degrés d'une chaleur foible. Peut-être s'en trouve-t-il entre les degrés forts, qui dilatent autant, ou presqu'autant l'eau, qu'ils dilatent l'Esprit de Vin.

De tout ceci, on doit conclurre, que si deux Thermometres sont remplis de deux Esprits de Vin de différente dilatabilité, qu'on se tromperoit extrêmement si on évaluoit le rapport du nombre des degrés que l'un & l'autre doivent marquer, exposés à un air de même, ou de différente température, si, dis-je, on évaluoit ce rapport sur celui de l'étenduë du degré de dilatabilité des deux Esprits de Vin. Pour voir combien l'erreur pourroit être considérable, fixons-nous encore à un exemple, sçavoir, à deux Thermometres tels que l'Esprit de Vin de l'un réduit à 400 mesures par la congélation, devienne 435 par la chaleur de l'eau boüillante, & que l'autre Thermometre soit rempli d'Esprit de Vin foible, ou d'Eau-de-vie, dont le volume condensé par la congélation étant 400, devient 425, lorsqu'il est dilaté par l'eau boüillante ; les jeux de ces Thermometres, les étendües de chemins qu'y parcourrent les liqueurs, devroient être dans le rapport de 35 à 25. Cela sera vrai aussi, si on prend le chemin depuis le terme de la congélation de l'eau jusqu'à celui de l'eau boüillante. Mais prenons-le depuis le terme de la congélation jusqu'à une grande chaleur pour de l'air qui doit être respiré, mais très-différente de celle que le feu donne à l'eau prête à boüillir. Supposons, par exemple, que le premier Thermometre, celui qui est rempli de 1000 mesures du plus fort des deux Esprits de Vin, marque 35 degrés, il s'en faudra bien que l'autre, qui est rempli de 1000 mesures de l'Esprit de Vin foible, ne marque 25 degrés; car l'Eau-de-vie, ou l'Esprit de Vin foible, dont le degré de dilatation est 25 sur 400, est un mêlange de parties égales d'eau & d'Esprit de Vin, dont la dilatation est 35 sur 400. Or si nous supposons pour un instant que la dilatation de l'eau, qui est très-petite, pendant que le premier Thermometre parcourt 35 degrés, est nulle, nôtre second Thermometre ne se doit dilater que comme s'il étoit composé de 500

mesures de l'Esprit de Vin, tel que celui du premier. Si donc dans le premier 1000 mesures de volume donnent 35 degrés dans une certaine température d'air, 500 mesures, qui est la quantité réelle de l'Esprit du second Thermometre, ne donneront que 17 degrés $\frac{1}{2}$; ou si l'on veut ajoûter le demi-degré, ou le degré, qui peut être survenu aux 500 mesures d'eau, la dilatation sera de 18 ou 18 degrés $\frac{1}{2}$; au lieu donc que le nombre des degrés du premier, entre les termes de la congélation & de la chaleur de l'eau boüillante, est au nombre des degrés du second comme 35 à 25, entre nos deux autres termes il y sera comme 35 à 18 ou à 18 $\frac{1}{2}$.

Il suit pourtant, même de ce que nous venons de dire, que l'on pourra faire une sorte de comparaison des degrés de deux Thermometres remplis de différents Esprits de Vin dont on connoît le rapport de dilatabilité, & que cette comparaison s'éloignera peu de l'exactitude, tant que les degrés n'exprimeront pas un degré de chaleur d'air excessive; car connoissant les rapports de dilatabilité des deux Esprits de Vin, on connoît aisément, par la regle donnée ci-dessus, la quantité d'eau qui étant ajoûtée au plus fort, le ramene à l'état du plus foible, & on considere l'effet du Thermometre rempli de l'Esprit de Vin le plus foible, comme s'il étoit seulement occupé par un volume d'Esprit de Vin le plus fort, tel que seroit ce volume, si on eût retranché du volume total l'eau qui y entre, comme on l'a fait dans l'exemple précédent. Deux Observateurs, dans des Pays éloignés, ont à comparer leurs observations faites sur deux Thermometres qui ont chacun 1000 mesures condensées par la congélation; mais les 1000 mesures de l'un se dilatent par l'eau boüillante de 87 degrés $\frac{1}{2}$, & celles de l'autre seulement de 62 $\frac{1}{2}$. On sçait bientôt que l'Esprit de Vin affoibli, qui ne se dilateroit que de 62 $\frac{1}{2}$, ne contient que 500 parties d'Esprit de Vin qui sur 400 se dilate de 35; que par conséquent en regardant comme nulle la dilatation de l'eau qui y est mêlée, les degrés de ce Thermometre doivent être à ceux du Thermometre de 1000 comme 500 est à 1000, comme 1 à 2, excepté ce qu'on

évaluera devoir être ajoûté pour la dilatation de 500 mesures d'eau.

Une remarque que nous ne devons pas obmettre, c'est que toutes les Tables ou Echelles de degrés de chaleur qu'on a voulu faire jusqu'ici, & que toutes celles qu'on pourroit faire, ne nous donneront jamais des rapports entre les différents degrés de chaleur que nous puissions regarder comme des rapports véritables, en un mot que les degrés de chaleur ne sont point entr'eux comme les degrés de dilatation des différentes liqueurs. Car si on établissoit sa Table des degrés de chaleur sur la dilatation de l'eau, certains degrés, dans cette Table, se trouveroient très-proches les uns des autres, ne différer que par de petites augmentations du volume de ce liquide, qui différeroient beaucoup si la Table étoit construite sur des degrés de dilatation de l'Esprit de Vin. Différentes autres liqueurs donneroient aussi sans doute d'autres différents intervalles, & feroient juger autrement des rapports des différents degrés de chaleur.

Nous ne pouvons nous refuser ici encore à une autre remarque, un peu étrangere à nôtre sujet, mais à laquelle il nous conduit, c'est que la dilatabilité de la partie spiritueuse, de la partie inflammable, de l'Esprit de Vin est beaucoup plus grande qu'il ne pourroit sembler, & peut être plus grande que celle de toute matiére à nous connüe, sans en excepter l'air. Il s'en faut bien que l'Esprit de Vin le plus rectifié que l'art sçait nous donner soit une huile pure, nullement mélangée avec du flegme. Des expériences, faites avec grand soin par M. Geoffroy le jeune, ont appris que l'eau étoit plus de la moitié du poids de ce qu'on appelle de très-bon Esprit de Vin, & nous laissent imaginer qu'elle en est une partie beaucoup plus considérable. Or si nous supposons que l'huile, la matiére inflammable, n'est que le quart d'un volume d'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle est 400, & rarefiée par la chaleur de l'eau boüillante est 436, l'eau ou le flegme sont les trois quarts de ce volume. Mais si la rarefaction dont ce flegme est susceptible, est prise pour

égale à celle de nôtre eau, ce qui doit être à peu de chose près, on trouvera que l'étendüe de la dilatabilité de la partie inflammable est de 24 mesures $\frac{3}{4}$ sur 100 mesures, ou de 99 sur 400; car le volume 400 d'Esprit de Vin est alors composé de 300 parties d'eau & de 100 parties d'huile, ou de matiére inflammable; or les 300 parties d'eau ne peuvent être dilatées que de 11 mesures $\frac{1}{4}$, puisque 400 mesures d'eau ne peuvent être dilatées que de 15 mesures. La dilatation totale de l'Esprit de Vin étant de 36, il faut donc que les 100 parties d'huile ou de matiére inflammable fournissent les 24 mesures $\frac{3}{4}$ nécessaires pour remplir le nombre de 36 mesures.

Nous sommes bien éloignés de croire que nous ayons supposé la quantité de la matiére inflammable trop petite, en ne la prenant que pour le quart du volume d'Esprit de Vin, nous sommes même disposés à penser qu'en supposant que la matiére proprement inflammable n'est que la huitiéme, ou même que la seiziéme partie de ce mêlange, nous nous tromperons plûtôt pour lui en accorder trop que pour lui en accorder trop peu. En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus, il est aisé de trouver dans ces cas de combien la matiére inflammable est rarefiée par l'eau boüillante. En supposant qu'elle n'est qu'une huitiéme portion du volume, 100 mesures se dilatent de 45 mesures $\frac{3}{4}$; & en supposant qu'elle n'est que la seiziéme partie du volume, on trouvera que 100 mesures se dilatent de 87 mesures $\frac{3}{4}$. Voilà la partie spiritueuse ou inflammable conduite à se dilater de près du double par la chaleur de l'eau boüillante; & s'il étoit vrai, comme bien des Physiciens seront enclins à le croire, qu'elle fût encore une portion beaucoup plus petite du volume de l'Esprit de Vin, que la derniére à laquelle nous nous sommes arrêtés, jusqu'où n'ira point son degré de dilatabilité, borné par le simple terme de la chaleur de l'eau boüillante? aussi est-il à croire que la matiére inflammable a une prodigieuse disposition à se rarefier. Quelle étendüe n'occupe pas la Poudre quand elle s'enflamme, ou se rarefie au dernier point!

Je sçai qu'on a voulu donner à la rarefaction de l'Air celle de la Poudre à Canon, mais la matiére inflammable est par elle-même peut-être beaucoup plus rarefiable que l'Air. L'Air ordinaire ne se dilate pas autant par l'eau boüillante; & si l'on veut attribuer à l'Air même la dilatabilité de l'Esprit de Vin, il faut supposer que celui qu'il contient est prodigieusement condensé. Aussi quoique l'eau contienne beaucoup d'Air, & peut-être autant & plus que l'Esprit de Vin, l'eau n'est que très-peu rarefiable en comparaison de ce que l'est la partie spiritueuse de l'Esprit de Vin.

Mais pour revenir à nos Thermometres, nous avons regardé comme un principe certain que l'exactitude de leur graduation demandoit que leurs Tubes fussent gros, & que plus les Tubes seroient gros, & plus il seroit aisé de les graduer parfaitement ; la grosseur des Tuyaux engage à une augmentation proportionnelle de celle des Boules. Mais nous ne pouvons dissimuler une imperfection à craindre pour les Thermometres à grosses Boules. Il y a une sorte de sensibilité qu'ils ne sçauroient avoir aussi grande que l'ont les Thermometres à petites Boules. Je distingue dans les Thermometres deux especes de sensibilité, dont la premiére se mesure par la quantité de chemin que parcourt la liqueur dans le Tube, pendant qu'il se fait un certain changement dans la température de l'air. Comme celle-ci dépend de la proportion du diametre de la Boule à celui du Tube, elle peut également se trouver dans les Thermometres à grosses Boules, & dans les Thermometres à petites Boules.

Mais il y a une autre espece de sensibilité dans les Thermometres, qui seule même mériteroit ce nom ; elle consiste véritablement dans un sentiment plus exquis, en ce qu'un Thermometre, plus sensible qu'un autre aux changements de chaud & froid, nous apprend plûtôt ceux qui se sont faits dans l'air. Les Thermometres à air l'emportent en ce genre de sensibilité sur ceux à Esprit de Vin ; l'air reçoit plus vite les impressions du chaud & du froid que l'Esprit de Vin le plus rectifié ne les peut recevoir. Or entre les Thermometres

à

à Eſprit de Vin, ceux-là ſeront les plus ſenſibles dans ce point de vûë, dont les Boules ſeront plus petites. Les changements du froid au chaud, d'un degré de chaud à un autre degré de chaud plus grand, ſe font dans l'air avant de ſe faire dans la liqueur du Thermometre. L'air, plus chaud que les corps qu'il touche, leur communique de ſa chaleur; la Boule du Thermometre partage avec la couche d'Eſprit de Vin appliquée contre ſa ſurface, les impreſſions de chaleur qu'elle a reçûës. Cette premiére couche d'Eſprit de Vin partage la ſienne avec la ſeconde couche; ainſi la chaleur, diſtribuée de couches en couches, eſt moins grande vers le centre de la Boule d'Eſprit de Vin que vers ſa ſurface, & eſt d'autant moins grande que la Boule a plus de diametre. Il en eſt ici comme du feu qu'on allume autour de deux vaſes, dont l'un eſt grand, & l'autre petit, quoiqu'on le faſſe agir également ſur toute la ſurface des deux vaſes, la liqueur contenüe dans le petit boüillira plûtôt que celle qui ſera contenüe dans le grand. Auſſi ſi la Boule étoit ſuppoſée groſſe juſqu'à un certain point, il ſe feroit ſouvent des changements du froid au chaud & du chaud au froid, qui ne ſeroient pas marqués dans toute leur étendüe par le Thermometre, car il faudroit alors un temps aſſés conſidérable avant que l'Eſprit de Vin placé près du centre de la Boule, eût pris le degré de chaleur de l'air extérieur; & s'il arrive qu'avant d'avoir pris ce degré de chaleur, l'air commence à ſe refroidir, la liqueur de la Boule ſe refroidira avant d'avoir pris un degré de chaleur égal à celui que l'air avoit ci-devant. Les paſſages du froid au chaud ſont ſouvent ſi ſubits, l'air qui nous environne reſte pendant ſi peu de temps dans un même état, qu'il eſt même à croire que les Thermometres à plus petites Boules ne donnent que très-rarement toute l'étendüe du froid ou du chaud de l'air, & cet inconvénient eſt encore plus grand pour les Thermometres à groſſes Boules.

Mais le remede qu'on peut apporter à ce défaut des Thermometres à groſſes Boules eſt bien ſimple. Rien n'exige que la partie que nous nommons la Boule du Thermometre ſoit

une Boule. Toute figure lui eſt bonne. Tout ce qui y eſt eſſentiel, c'eſt qu'elle ait une certaine capacité. Qu'on lui donne la forme d'une Boîte applatie, ou d'une Lentille, dont les parois laiſſent entr'eux une diſtance moindre que n'eſt le diametre des Boules des petits Thermometres, & alors on rendra les Thermometres à gros Tubes auſſi ſenſibles, & même plus ſenſibles, que le ſont ceux à petites Boules. Plus on applatira les Boîtes, plus on augmentera la ſenſibilité de la ſeconde eſpece. Celle de la premiére ſera auſſi toûjours telle qu'on la voudra ; car en augmentant la grandeur des Boîtes, on eſt toûjours maître de les rendre d'une aſſés grande capacité. Il eſt vrai que dès qu'elles auront une telle figure, qu'il ne ſera peut-être pas poſſible de les faire faire par ceux qui ſoufflent des Boules à la Lampe, mais il eſt aſſés indifférent à ceux qui ont beſoin de Thermometres, qu'on faſſe dans les Verreries les Boîtes & les Tubes, ou qu'on n'y faſſe que les ſeuls Tuyaux, comme on les y a toûjours faits. Si pourtant les Boules n'excédent pas quatre pouces de diametre, la marche de la liqueur des Tubes ne ſera pas long-temps à ſe fixer au terme correſpondant à celui que donne une petite Boule; cela ne ſçauroit aller à un quart d'heure, ni même à un demi-quart d'heure, ſelon les expériences que j'en ai faites. Enfin au lieu de prendre pour la Boîte une Boule d'un ſi grand diametre, on peut en prendre de forme cylindrique. Elle peut être un gros Tuyau qui n'aura qu'autant de diametre, & même moins qu'en ont les Boules des Thermometres ordinaires, on déterminera ſa hauteur ſur la capacité qui convient à la quantité de liqueur qu'elle doit contenir.

Le plus & le moins de ſenſibilité de la ſeconde eſpece ſera quelquefois cauſe que les marches de divers Thermometres, qui devroient être les mêmes, paroîtront différentes. Qu'en deux heures il ſe faſſe dans l'air un changement de chaleur capable de faire monter la liqueur d'un degré & demi, peu après ces deux heures le Thermometre le plus ſenſible marquera ce degré & demi de plus, pendant que celui qui eſt moins ſenſible ne ſe ſera peut-être élevé que d'un degré.

Mais si la chaleur de l'air reste constante pendant quelque temps, le premier se soûtiendra au même point, & le second arrivera à un point semblable. De-là il suit que les temps les moins équivoques pour juger de l'état de la temperature de l'air par les Thermometres, ce sont ceux où la liqueur est restée au même degré d'élévation pendant un quart d'heure, ou environ.

M. Taglini, Professeur à Pises, a fait imprimer, en 1725, une These sur les Thermometres, qui est dans un tout autre goût que celles qui paroissent si souvent dans nos Colleges; elle n'a la forme de These que par ses positions. C'est un petit ouvrage où on a soigneusement rassemblé & discuté tout ce qui a rapport aux Thermometres. Nous n'acquiescerons pourtant pas à toutes ses assertions, & sur-tout à la derniére, elle est trop directement contraire aux principes sur lesquels nous avons cherché à construire des Thermometres dont les degrés de chaud & de froid fussent comparables; elle ôte même toute espérance d'en avoir jamais de tels. Il y soûtient que les degrés fixes de chaud & de froid, que les Physiciens ont cherché jusqu'ici, n'ont point encore été trouvés, & qu'il est impossible de les trouver. Des deux pourtant que nous avons pris pour termes, il n'y en a qu'un qui y soit attaqué directement, celui de chaleur déterminé par l'eau boüillante. Il combat, à la vérité, les degrés fixes qu'on voudroit établir par le froid de la glace, & même par la congélation produite par le froid de l'air. Mais il ne dit rien contre le froid de la glace artificielle faite dans un temps où l'air fonderoit vîte la glace naturelle, & nous croyons avoir prouvé ci-dessus que le degré de froid de cette glace artificielle ne doit pas être confondu avec celui de toute autre glace, & qu'il pouvoit être regardé comme un terme fixe. Nous avoüerons pourtant que ce terme de froid, ou de moindre chaleur, ne nous paroît pas plus fixe que celui de l'eau boüillante, que M. Taglini ne veut pas reconnoître pour tel, & que j'eusse crû hors de toute atteinte. La théorie eût dû même nous apprendre, quand on a eu besoin d'un degré de chaleur

fixe, que nous le pouvions trouver là. Mais il n'arrive que trop souvent, à nôtre honte, que nous devons à des expériences faites assés tard des connoissances où le raisonnement eût dû nous conduire de bonne heure. Sans être Physicien, on a toûjours sçû que de l'eau boüillante est móins chaude que de l'Huile boüillante, que du Plomb, que du Cuivre, que du Fer, que de l'Argent, fondus jusqu'à boüillir. On a donc toûjours reconnu qu'il y avoit des degrés de chaleur où l'eau ne pouvoit atteindre; il y en a donc un qu'elle ne sçauroit passer, & par conséquent qui est un degré fixe. Peut-être a-t-on eû tort de croire que l'eau soit arrivée à ce degré de chaleur, dès qu'il commence à s'en élever quelques boüillons. C'est ce que prouveroit tout au plus l'expérience rapportée par M. Taglini, qui lui a fait voir que l'eau, qui étoit contenüe dans une Boule adaptée à un Tuyau de verre, ne s'étoit élévée qu'à une certaine hauteur, la Boule ayant été mise dans un pot où de l'eau boüilloit, & qu'ayant forcé l'eau du pot à boüillir plus fort, l'eau du Tube s'y étoit élevée plus haut, & si haut qu'elle étoit même sortie hors de ce Tube. Si le diametre de la Boule eût été moins grand par rapport à celui du Tube, ou que le Tube eût eu plus de hauteur, l'eau seroit toûjours restée dans le Tube; & quand elle auroit été arrivée à un certain terme, elle y seroit restée, quelque chose qu'il eut fait pour augmenter la force des boüillonnements de l'eau du pot. C'est ce que j'ai éprouvé sur des Boules de quatre pouces & demi, adaptées à de gros Tubes de plus de six pieds de long. J'ai aussi éprouvé qu'il falloit laisser la Boule pendant un temps assés considérable dans l'eau boüillante, avant que celle du Tube montât jusqu'où elle peut monter, au moins plus d'un quart d'heure, parce que l'eau qui monte dans le Tube s'y refroidit.

Le sçavant Professeur n'a obmis aucune des raisons capables de faire douter du terme fixe donné par l'eau boüillante, ou au moins de faire douter si ce terme est saisissable. Il fait observer combien les eaux different les unes des autres, que leurs différences en pesanteur sont connües, & nous en

doivent faire imaginer dans leurs compositions ; que de-là il suit que le degré de chaleur qui suffit pour faire boüillir une certaine eau, ne suffit pas, ou est plus que suffisant pour en faire boüillir d'autres. Tout cela a bien l'air d'être vrai : mais en concluërons-nous qu'il faut caractériser par le poids, ou par d'autres moyens, l'espece d'eau dont nous nous servirons pour marquer le terme de chaleur de l'eau qui bout, comme nous l'avons fait pour l'Esprit de Vin ? Ce seroit au pis aller à quoi nous serions réduits : mais il y a bien de l'apparence que cette précaution seroit très-inutile. Tant qu'on s'en tiendra à des eaux communes, ce que l'une aura de chaleur plus que l'autre, lorsqu'elle boüillira, ne donnera pas apparemment des différences saisissables. Quand il s'agit de mesures sensibles, nous n'avons besoin que d'égalités sensibles. L'impossibilité d'avoir des mesures exactes, de quelque espece que ce soit, se prouveroit très-solidement ; peut-être n'y en a-t-il jamais eu deux poids de marc, deux aulnes, &c. d'une égalité parfaite. Des mesures qu'on feroit parfaitement égales, cesseroient de l'être selon que la chaleur, la sécheresse ou l'humidité de l'air agiroient sur elles. Nous avons pourtant des mesures de tout genre d'une justesse qui nous suffit, parce qu'elle est telle qu'il n'en résulte pas des inégalités importantes.

Après tout j'avoüerai sans peine, que je n'espere pas qu'on construise beaucoup de Thermometres dont les degrés soient exactement égaux, ou exactement proportionnels. Les Barometres simples, tout simples qu'ils sont, n'ont pas toûjours des marches parfaitement égales ; mais il sera aisé de faire des Thermometres qui différeront peu sensiblement, & qui nous donneront des idées des degrés de froid & de chaud à peu près aussi exactes que nous avons besoin de les avoir. Il en sera de ces instruments comme de tous les autres ouvrages de l'art, on les fera d'autant plus parfaits, qu'on apportera plus d'attention à les construire ; que des mains plus adroites & plus exercées s'y occuperont. Ceux que j'ai fait faire n'ont pas différé dans les rapports de leur marche de plus d'un quart de degré, & certainement mille gens feront mieux

que je n'ai fait faire. Enfin quand on ne pourroit pas remplir dans la derniére exactitude toutes les conditions demandées pour la perfection de nos Thermometres, au moins auroit-t-on toûjours un à peu-près, & alors on auroit des Thermometres bien supérieurs à ceux à Esprit de Vin dont on se sert aujourd'hui, où tout est inconnu, capacité des Boules & des Tubes, valeur des degrés & qualité de la liqueur.

Si la grandeur de nos nouveaux Thermometres déplaît, on pourra par leur moyen en avoir d'aussi petits qu'on souhaitera, dont la graduation sera proportionnelle à celle des grands ; on les remplira du même Esprit de Vin, & on se servira des grands comme d'étalons pour graduer les petits. On pourra même construire des Thermometres assés petits, en les mesurant réellement comme nous avons appris à mesurer ceux d'un plus grand volume, à cela près que les divisions n'en seront bien précises que de cinq en cinq degrés; par exemple, au lieu de les graduer avec une mesure d'un degré, on les gradüera avec une mesure de cinq degrés. Tous les termes de cinq en cinq seront donc exactement déterminés. On divisera chacun de ces espaces en cinq parties pour faire autant de degrés intermédiaires, & cette façon de diviser ne produira pas d'erreurs sensibles dans ces petits instruments.

Au reste quand on a voulu nier l'existence, & même la possibilité de tout degré de chaleur fixe, on n'a pas pensé que les Physiciens de Paris en ont un très-commode dans les Caves de l'Observatoire. C'est, à la vérité, un fait bien singulier, & un de ceux qu'on n'auroit pas prévû, que des Caves dont la profondeur n'est pas extrême, & dont la longueur n'est pas excessive, & à qui on ne s'est pas embarrassé d'ôter toute communication avec l'air extérieur, que ces Caves, dis-je, renferment un air dont la température est toûjours sensiblement la même. Les épreuves qu'on en a faites sont pourtant démonstratives ; M. de la Hire a observé que dans les plus grandes chaleurs de nos Etés, & dans le plus grand froid de 1709, la liqueur du Thermometre est restée assés

conſtamment ſur le même degré ; auſſi ce degré de température des Caves de l'Obſervatoire eſt-il un des termes qu'on a pris ſoin de marquer ſur les meilleurs des Thermometres qu'on a faits juſqu'ici. Un des premiers uſages qu'on a crû devoir faire des Thermometres conſtruits ſur les principes que nous avons donnés a été de le reconnoître. On a trouvé que le degré de chaleur de ces Caves étoit à 10 degrés $\frac{1}{4}$ au deſſus du terme de la congélation dans un Thermometre dont le volume de la liqueur condenſée par la congélation artificielle étoit 1000, & dont le volume de cette liqueur dilatée par l'eau boüillante étoit 1080, ou, ce qui revient au même, le volume de la liqueur de ce Thermometre, qui eſt réduit à 1000, par la congélation de l'eau, eſt 1010 $\frac{1}{4}$ dans les Caves de l'Obſervatoire.

Nous pourrons de même, par le moyen des nouveaux Thermometres, ramener à des degrés connus & comparables les obſervations faites ci-devant ſur des Thermometres qui ſubſiſtent encore, tel qu'eſt celui de M. de la Hire, dont on ſe ſert à l'Obſervatoire depuis tant d'années.

Lorſque nous n'avions ci-deſſus pour objet que la ſeule conſtruction du Thermometre, nous avons dit que nous ne croyons pas qu'il convînt de rarefier extrêmement l'air qu'on renferme dans le Tube, ni de laiſſer cet air dans l'état de condenſation qu'il a dans des temps froids ; que ce qui nous paroiſſoit de mieux, eſt que l'air y fût dilaté à peu-près au point où il l'eſt dans les jours les plus chauds. Les raiſons qui nous ont déterminé à prendre ce parti moyen ſont aiſées à voir. Quand l'Eſprit de Vin ſe rarefie, l'air contenu dans le Tube tend à ſe rarefier ; il fait donc des efforts pour s'oppoſer à la dilatation de l'Eſprit de Vin, qui ne ſçauroit ſe faire ſans condenſer l'air, ces efforts pourroient briſer le Tube ou la Boule, lorſque la chaleur eſt conſidérable. Il ſemble auſſi y avoir un inconvénient, & beaucoup plus grand, à ne renfermer dans le Tube qu'un air extrêmement rarefié. L'air qui entre dans la compoſition de l'Eſprit de Vin, trouve alors de la facilité à s'en dégager ; & s'il s'en dégage, l'Eſprit de Vin

n'eſt plus préciſément le même que celui dont on a déterminé les qualités. Or que l'air contenu dans l'Eſprit de Vin s'en dégage, ſi cet Eſprit de Vin eſt environné d'un air trop rarefié, d'une eſpece de vuide, c'eſt ce qu'une obſervation faite ſur nos Thermometres a montré très-clairement. Après avoir fait prendre à l'Eſprit de Vin de la Boule d'un de ces Thermometres un degré de chaleur qui étoit peu au deſſous de celui de l'eau boüillante, je le couchai preſque horizontalement, je laiſſai refroidir ſa liqueur pendant qu'il étoit dans cette poſition. Bien-tôt le volume de l'Eſprit de Vin, renfermé dans la Boule, diminua ; le vuide, qui ordinairement ſe fait dans le Tube, ſe fit alors dans la partie la plus élevée de la Boule ; je le vis croître, devenir inſenſiblement un ſegment de ſphere de plus grand en plus grand. Mais à meſure que ce vuide croiſſoit, j'obſervois continuellement de petites bulles qui s'élevoient de toutes parts de la ſurface de l'Eſprit de Vin, & qui ſe réüniſſoient enſuite à la grande bulle. Ces bulles ne pouvoient être priſes que pour des bulles d'air qui ſe dégageoient de l'Eſprit de Vin. Cette obſervation nous a conduit à en faire pluſieurs autres, que nous ne ſçaurions placer ici ſans ajoûter beaucoup à la longueur d'un Mémoire déja exceſſivement long; nous ne pourrions nous diſpenſer de les rapporter dans toute leur étendüe; outre qu'elles ſont aſſés curieuſes par elles-mêmes, elles nous apprendront à conſtruire des Thermometres qui ne ſeront point ſujets à des dérangements qu'on a vû arriver à ceux qu'on a conſtruits juſqu'ici, & dont les nôtres même ne ſeroient pas exempts.

Nous ferons ſeulement faire attention à la ſource des dérangements dont nous voulons parler. On n'eſt pas certain ſi un Thermometre, après pluſieurs années, ou même après un temps plus court, eſt tel qu'il étoit dans le temps de ſa conſtruction. L'Eſprit de Vin peut perdre peu-à-peu, à la longue, cet air qui s'en eſt ſéparé en un temps court dans l'expérience que nous venons de rapporter ; peut-être même que quelques-unes des parties des plus ſpiritueuſes de l'Eſprit

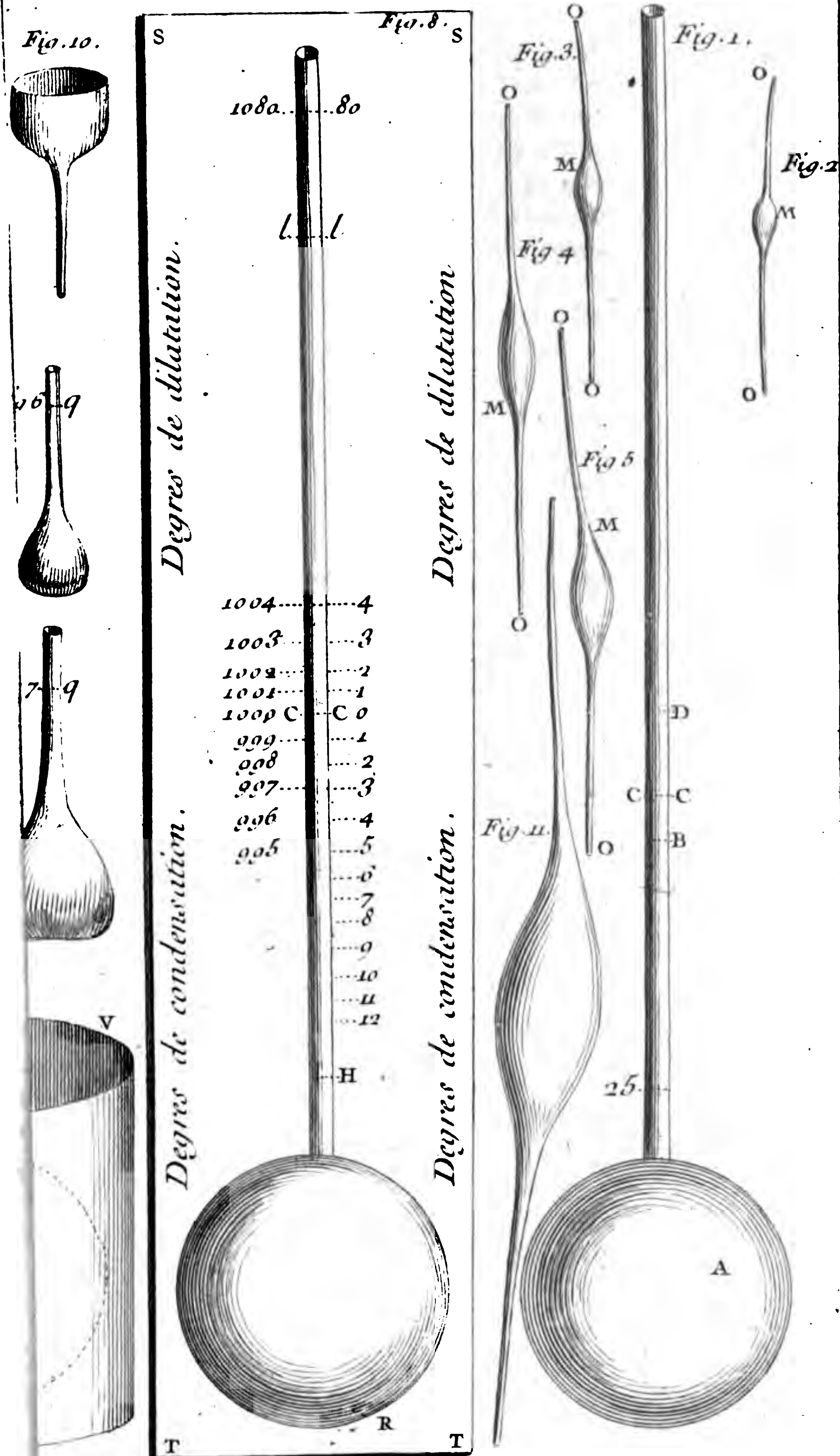
de

de Vin s'élevent dans le Tube, & y restent en vapeur; peut-être aussi que l'Esprit de Vin reprend l'air qui l'avoit abandonné, comme nous voyons que l'eau se recharge avec le temps de celui qui en avoit été chassé pendant qu'elle boüilloit; & peut-être que de même les parties spiritueuses qui se sont élevées de l'Esprit de Vin, viennent ensuite s'y réünir, qu'ainsi il se fait une sorte de circulation qui entretient l'Esprit de Vin renfermé toûjours à peu-près dans un même état. C'est ce qui a été difficile à décider jusqu'ici, & ce qui pourra l'être sûrement dans la suite. On n'aura qu'à exposer la Boule d'un grand Thermometre à la congélation artificielle de l'eau, la surface de la liqueur se trouvera dans le Tube vis-à-vis la ligne marquée pour le terme de la congélation, s'il ne s'est fait aucun changement dans la liqueur depuis que le Thermometre a été construit, & s'il y est arrivé des changements, elle sera au dessous & au dessus de ce terme, selon la nature des changements. On a donc ainsi une méthode de s'assûrer continuellement de l'état de son instrument, de le vérifier, & on sçait jusqu'où on doit compter sur les observations qu'il fournit.

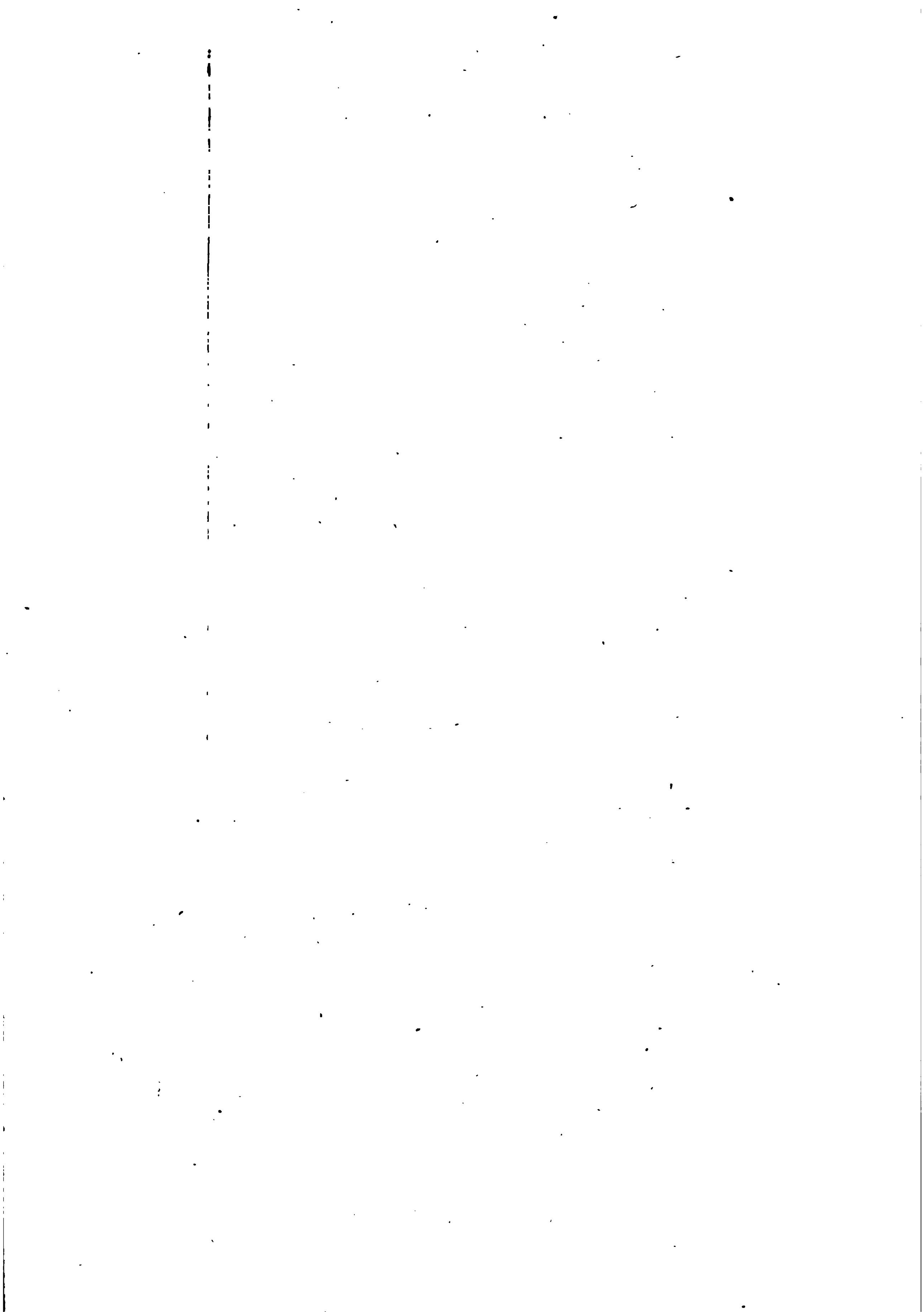
Il seroit à souhaiter que les Physiciens de différents Pays pussent avoir des Thermometres de cette espece, leurs observations nous instruiroient alors chaque année sur le plus grand chaud & le plus grand froid des différents climats. On ne se trouvera pas à portée par-tout de faire souffler des Boules ou des Boîtes au bout des Tuyaux; mais pour peu qu'on puisse avoir des Tuyaux, & qu'on ait une sorte d'industrie, qui ne manque gueres à ceux qui aiment les recherches dont il s'agit, il sera aisé de se faire soi-même un Thermometre. On adaptera le Tube à quelque Bouteille de capacité convenable. Si on est arrêté par la difficulté de sceller ensemble le goulot de la Bouteille, & le bout inférieur du Tuyau, l'équivalent peut être fait par un lut, ou une espece de colle sur laquelle l'Esprit de Vin n'ait pas prise; de la Gomme arabique, de la colle de Poisson, qui se dissolvent si aisément à l'eau, ne se dissolvent point à l'Esprit de Vin.

J'ai luté, avec l'une & l'autre de ces colles, des Tubes à des Bouteilles qui m'ont fait des Thermometres. Il y a lieu de croire qu'ils seront assés durables; c'est sur quoi on ne peut être instruit que par le temps, & sur quoi je ne le suis pas assés. Je ferai seulement remarquer qu'extérieurement il faut couvrir de quelques couches d'un Vernis, qui résiste aux impressions de l'humidité, la surface de la colle : un simple Vernis de Lacque y suffira.

Mais inutilement aura-t-on en différents Pays des Thermometres bien construits sur les principes qui rendent leurs degrés comparables, la comparaison du chaud & du froid des différents Pays & des différentes saisons ne se fera jamais exactement, si ceux qui veulent bien se charger de faire les observations qui y sont nécessaires, & de les communiquer au Public, ne sont attentifs à bien choisir les places où ils mettront leurs Thermometres, au moins quelque temps avant d'observer leur marche. Dans une même Ville, dans une même Maison, on trouvera à la même heure de grandes différences entre les degrés de différents Thermometres, qui tous marqueroient pourtant le même s'ils étoient posés les uns à côté des autres. La liqueur de ceux qui seront dans des chambres, n'y fit-on jamais de feu, sera à des hauteurs fort différentes de celles où sera la liqueur des Thermometres qui seront exposés à l'air libre; il y a tel jour où l'on verra la liqueur de ces derniers monter & descendre de 8 à 10 degrés, pendant que la liqueur des autres aura à peine monté ou descendu d'un degré. Il est donc absolument essentiel que l'Observateur expose son Thermometre à l'air extérieur. L'exposition qu'il doit choisir est celle du Nord, & telle que le Soleil ne puisse donner dessus à aucune heure du jour. Ce ne sera pas même assés, si en rendant compte de ses observations, il n'avertit s'il y a des murs voisins qui renvoyent les rayons du Soleil du côté du Thermometre, ou s'il n'y en a pas; si son Thermometre est placé à un premier, à un second, ou à un troisiéme étage. Toutes ces circonstances sont essentielles à marquer pour mettre en état de faire d'exactes



Simonneau Sculp.



comparaiſons. J'ai vû en Eté deux Thermometres, expoſés à l'air libre & au Nord, dans différentes Maiſons, dont la liqueur de l'un étoit, dans les jours où le Soleil paroiſſoit, d'un degré ou d'un degré & demi plus élevée que celle de l'autre, parce que l'air qui l'environnoit étoit échauffé par la réverbération des murs voiſins. J'ai auſſi obſervé, dans des jours chauds, que la liqueur d'un Thermometre mis à la fenêtre d'un rez-de-chauſſée, étoit d'un degré plus bas que celle d'un autre qui étoit au premier étage, à la fenêtre au deſſus de la précédente. Cependant les Thermometres, dont je parle, étoient de ceux de nouvelle conſtruction, & mis les uns à côté des autres auroient marqué les mêmes degrés. Les inſtruments les plus parfaits demandent de l'habileté & de l'attention dans ceux qui s'en ſervent.



NOUVELLES PROPRIETÉS DE L'HYPERBOLE.

Par M. MAHIEU.

23 Decemb. 1730. LE dessein de ce Mémoire est de découvrir l'analogie qui est entre le Triangle, le Cercle & l'Hyperbole.

J'ai crû que cette comparaison pouvoit être utile, à cause que l'on ne connoît jamais bien ce que les choses sont en elles-mêmes, si l'on ne connoît aussi ce qu'elles sont considérées par rapport à celles à qui elles ressemblent, & dont elles tirent leur origine.

J'établis la comparaison que je fais du Triangle, du Cercle & de l'Hyperbole, sur un principe qui est un Corollaire d'une Proposition d'un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie en 1724. Ce principe fait remarquer que les coupées & les appliquées, prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, peuvent être représentées par une suite infinie de bases changeantes qui appartiennent à des Triangles, qui pris deux à deux, ont deux côtés égaux, chacun à chacun. On verra dans les Mémoires suivants que cette propriété est très-étendüe, & qu'elle continüe à se faire remarquer jusques dans des Courbes d'un ordre plus élevé, dont les appliquées sont les coordonnées prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, ensorte qu'on pourroit réciproquement faire usage de l'Hyperbole pour décrire ces Courbes, & de ces Courbes pour décrire l'Hyperbole.

Au reste les principes de ce Mémoire sont simples : quoique simples, ils conduisent à une proposition qui semble un véritable paradoxe, qui est que deux espaces inégaux, l'un considéré dans le Cercle, & l'autre dans l'Hyperbole, contiennent un même nombre de lignes égales. Je ferai voir dans les Mémoires suivants, que ce qui semble un paradoxe, se rencontre dans toutes les Courbes, en les comparant deux à

deux de la même maniére que j'ai comparé le Cercle & l'Hyperbole, & je déduirai de cette comparaison de nouvelles Courbes, que je nommerai les *déplacées*.

LEMME.

Si quatre Triangles, comparés deux à deux, ont deux côtés égaux chacun à chacun, ensorte que la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux autres Triangles, les bases des deux premiers Triangles seront en raison réciproque avec les bases des deux autres Triangles. I.

1.° Si parmi les quatre angles qui sont sur les deux premiéres bases & sur les deux derniéres, il y en a deux, qui pris ensemble, sont égaux à deux droits.

2.° Si parmi les quatre angles qui sont opposés aux deux premiéres bases & aux deux derniéres, il y en a deux qui sont la différence de la somme des angles sur la base des deux autres Triangles.

3.° S'il y a deux angles obliques égaux sur les bases, & deux inégaux.

4.° Si les perpendiculaires ou les éloignements de perpendiculaires comparés deux à deux étant égaux, il se trouve parmi les quatre angles sur les deux premiéres bases & sur les deux derniéres deux angles inégaux semblablement posés.

Soit les quatre Triangles *ACB, FHG, KLM, NPO,* dont les deux premiers *ACB, FHG,* ont deux côtés *AC* + *CB* égaux aux deux côtés *FH* + *HG*, & les deux derniers *KLM, NPO,* ont pareillement deux côtés *KL* + *LM* égaux aux deux côtés *NP* + *PO*; ensorte que la différence des quarrés des côtés des deux derniers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles. Fig. 1. & 2.

Je dis que les bases *AB, FG, KM, NO,* sont en raison réciproque.

1.° Lorsque les deux angles quelconques *CBA, HGF,* pris ensemble, étant égaux à deux droits, les deux angles

quelconques *LMK, PON,* pris ensemble, sont pareillement égaux à deux droits.

2.° Lorsque l'angle *FHG* étant la différence des angles sur la base du Triangle *ACB,* l'angle *NPO* est pareillement la différence des angles sur la base du Triangle *KLM.*

3.° Lorsque l'angle quelconque *A* étant égal à l'angle *F,* l'angle quelconque *K* est pareillement égal à l'angle *N.*

4.° Lorsque les perpendiculaires *CE, HI,* ou les éloignements de perpendiculaires, *AE, FI,* étant égaux, & les deux angles *CBA, HGF* inégaux, les deux perpendiculaires *LR, PS,* ou les deux éloignements de perpendiculaire *KR, NS,* sont pareillement égaux, & les deux angles *LMK, PON,* pareillement inégaux.

PRÉPARATION.

Pour ne faire qu'un seul cas des quatre, faites l'angle *ACD* égal à l'angle *FHG,* qui est la différence des angles sur la base du Triangle *ACB,* & l'angle *KLQ* égal à *NPO,* qui est la différence des angles sur la base du Triangle *KLM;* puisque l'angle *ACD* est égal à l'angle *FHG,* l'angle *CDB* est égal à l'angle *B,* par conséquent les lignes *CD, CB, GH,* sont égales, & les deux Triangles *ACD, FHG,* sont égaux en tout sens. D'où il suit que lorsque l'angle *FHG* est la différence des angles sur la base du Triangle *ACB,* l'angle *HGF,* ou son égal *CDA,* est le complement à deux droits de l'angle *CBD.*

On prouvera de même dans les autres cas qu'il y a toûjours deux angles sur les deux premiéres bases & sur les deux derniéres, qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits.

DÉMONSTRATION. Dans les Triangles *ACB, AB,* est la somme des éloignements de perpendiculaires, *AD* ou *FG* en est la différence; par conséquent $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = AB \times FG,$ on prouvera de même que $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = KM \times NO:$ or *(hyp.)* $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2;$ donc $AB \times FG = KM \times NO.$

SCHOLIE. Lorsque l'un des angles B est droit, l'angle G II.
qui est son complement à deux droits est aussi droit, les lignes AB, FG, sont égales & moyennes proportionnelles entre KM & NO.

THEOREME I.

Les coupées & les appliquées prises sur les asymptotes d'une portion déterminée de l'Hyperbole, peuvent être représentées par les bases croissantes & décroissantes d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun. III.

DÉMONSTRATION. La suite infinie des Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, peut être représentée par les quatre Triangles ACB, FHG, KLM, NPO, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & quatre angles sur les quatre bases, ensorte que les deux angles CBA, HGF, qui sont sur les deux premiéres bases, étant égaux à deux droits, les deux LMK, PON, semblablement posés sur les deux derniéres bases soient pareillement égaux à deux droits, donc (*Hyp. & par Lem. 1.*) $AB \times FG = KM \times NO$. C'est pourquoi nommant $AB (a)$, $FG (b)$, $KM (x)$, $NO (y)$, si l'on substitüe ces valeurs dans l'Equation, il vient $ab = xy$, qui est l'Equation de l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes. Fig. 1 & 2.

SCHOLIE I. La suite infinie des bases se partage en deux suites infinies; celle qui est la suite des bases qui ont deux angles aigus, représente les coupées; celle qui est la suite des bases qui ont un angle obtus, représente les appliquées. IV.

Concevés sur l'asymptote AQ les bases qui ont un angle obtus, que je nomme y, & sur l'asymptote AP, toutes les bases qui ont deux angles aigus, que je nomme x. Il est évident que les x sont croissantes en allant de A vers P, & les y décroissantes en allant de M vers A. Fig. 4.

SCHOLIE II. Parmi ces bases, celle qui a le plus grand angle obtus, & celle qui a le moindre angle aigu, ne différent ni entr'elles, ni avec les deux bases qui ont chacune un angle droit, que d'une grandeur infiniment petite, c'est pourquoi V.

elles peuvent être prises l'une pour l'autre : ces deux bases représentent la puissance de l'Hyperbole.

THEOREME II.

VI. *Les appliquées & les coupées prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, représentent non seulement les bases changeantes d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun; mais elles représentent aussi les bases changeantes d'une infinité de suites de Triangles qui, considérés séparément, ont les côtés inégaux, & dont la différence des quarrés des côtés est le quarré d'une même ligne.*

Fig. 1 & 3. Soit les deux Triangles *ACB, FHG*, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & deux angles *CBA, HGF*, qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits qui représentent deux Triangles d'une suite infinie. Soit deux autres Triangles *KLM, NPO*, qui représentent deux Triangles d'une autre suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, plus grands ou plus petits que les deux côtés des deux premiers Triangles, ensorte néantmoins que la différence des quarrés des côtés des deux derniers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles; & que les deux angles *LMK, PON*, pris ensemble, soient égaux à deux droits, je dis que $AB \times FG = KM \times NO$, ce qui est évident par le Lemme 1. Soit $AB\ (a)$, $FG\ (b)$, $KM\ (x)$, $NO\ (y)$. Substituant ces valeurs, il vient $ab = xy$. *C. Q. F. D.*

VII. SCHOLIE. On pourroit déduire de ce Théoreme plusieurs propositions sur l'infini qui sont connuës, comme, par exemple, qu'il y a des infinis plus grands les uns que les autres : car le nombre des bases de chaque suite infinie est d'autant plus grand que les côtés d'une suite de Triangles, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, sont plus grands.

2.° On pourroit aussi en déduire qu'il y a différents ordres d'infiniment grands : car, puisque les bases sont infinies lorsque les côtés d'une suite de Triangles ne sont que finis, les suites des bases seront nécessairement infiniment infinies, lorsque

lorsque ces côtés seront infinis : or les côtés des Triangles inégaux deviennent infinis; car parmi les suites infinies, il ne sçauroit se rencontrer aucun Triangle isoscéle.

COROLLAIRE I. Dans l'Hyperbole chaque coupée prise sur l'asymptote est à son appliquée comme le sinus de la somme de deux angles est au sinus de la différence des mêmes angles sur la base de tout Triangle, dont la différence des quarrés des côtés est le quarré de la puissance de l'Hyperbole, & dont la base est égale à une coupée. VIII.

PRÉPARATION. Soient deux Triangles *ACB*, *FHG*, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ensorte que l'angle *FHG* opposé à la base du second soit la différence des deux angles sur la base du premier Triangle *ACB*; des points *B* & *G* des deux lignes égales *BC* & *GH*, abbaissés les perpendiculaires *BV* & *GT*, à cause de l'angle extérieur *BCV* égal aux deux intérieures *A* & *B*. *BV* est le sinus de la somme des angles sur la base du Triangle *ACB*, & *GT* est le sinus de l'angle *FHG*, qui est l'angle de leur différence: or *(par Lemme 1.)* lorsque l'angle *FHG* est la différence des angles *A* & *B*, l'angle *A* est égal à l'angle *F*; d'où il suit que les Triangles rectangles *ABV*, *FGT*, sont semblables; par conséquent *AB* . *FG* : : *BV* . *GT*, ou, par ce qui précéde, la coupée de l'Hyperbole, prise sur les asymptotes, représentée par *AB*, est à l'ordonnée qui peut être représentée par *FG*, ce que le sinus *BV* est au sinus *GT*. C. Q. F. D. Fig. 1.

PROBLEME I.

Un point d'une Hyperbole entre ses asymptotes étant donné, trouver autant de Triangles inégaux que l'on voudra, dont les bases changeantes, prises deux à deux, sont les coupées & les appliquées de l'Hyperbole ; 2.° Décrire l'Hyperbole au moyen des Triangles qui ont les côtés inégaux. IX.

Soit le point donné *N*; par ce point tirés la ligne *NF* parallele à l'asymptote *AQ*. Prenés sur la ligne *AT*, perpendiculaire à l'asymptote *AP*, une ligne *AB* égale à la moitié de la différence de la coupée *AF* & de l'appliquée *FN*; par Fig. 4.

ce point B, à l'ouverture d'une ligne égale à la moitié de la somme de AF & de FN, décrivés un arc de Cercle qui coupera AP en un point C, par le point C tirés à la ligne AT tant de lignes CB que vous voudrés, les Triangles inégaux ABC, ABC, sont ceux que l'on cherche. Pour trouver différents points de l'Hyperbole au moyen de ces Triangles, par les points B à l'ouverture des côtés BA, décrivés des arcs de Cercles qui couperont leurs hypothénuses en r. Prenés sur l'asymptote AP une ligne AG égale à la somme des côtés AB & BC de l'un de ces Triangles rectangles ABC, & par le point G tirés une ligne GH parallele à l'asymptote AQ & égale à la différence Cr des côtés AB & BC; je dis que le point H est un point de l'Hyperbole. Il faut démontrer que la ligne AC est moyenne proportionnelle entre AF & NF.

DÉMONSTRATION. $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$.

CONSTR. $\overline{BC}^2 = \frac{\overline{AF}^2 + 2AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}$

Et $\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AF}^2 - 2AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}$.

Par conséquent $\overline{AC}^2 = \frac{4AF \times FN}{4} = AF \times FN$.

X. COROL. I. D'où il suit que la raison pour laquelle l'Hyperbole approche de plus en plus de son asymptote sans y toucher, est la même que celle pour laquelle une infinité de Cercles, qui ont un point A commun, approchent de plus en plus de la ligne droite, ou, ce qui est la même chose, de leur tangente AP, sans qu'aucun de ces Cercles puissent toucher à leur tangente AP en plus d'un point A.

XI. COROL. II. D'où il suit encore que la raison pour laquelle on peut faire passer entre un Cercle & sa tangente une infinité d'autres Cercles sans se toucher entr'eux, ni à leur tangente, qu'en un seul point, est la même que celle pour laquelle on peut faire passer entre une Hyperbole GIK & ses asymptotes AQ & AP, une infinité d'autres Hyperboles, comme par exemple, LES, sans qu'elles puissent se toucher entr'elles ni à leurs asymptotes.

Figure 7.

PROBLEME II.

Les deux côtés d'un Triangle étant donnés, trouver le lieu de toutes les bases changeantes d'une suite de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & décrire au moyen de ces bases l'Hyperbole par des points très-proches. XII. Fig. 4. 5. & 6.

PREMIÉRE MÉTHODE.

Au milieu d'une ligne *BC* double du plus grand côté, élevés une perpendiculaire égale au plus petit côté *AI*, & par le point *A* à l'ouverture de la ligne *AI*, décrivés un quart de cercle qui rencontre la ligne *BC* en *K*; par le point *A* à l'ouverture du plus grand côté *AB* ou *AC*, décrivés deux arcs de cercle *BE*, *CD*, jusqu'à ce qu'ils rencontrent en *D* & en *E* la ligne *DE* parallele à *CB*. L'espace *CDIGK* contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & l'espace *IGKBE* contient toutes les bases qui ont un angle obtus. Fig. 5.

DÉMONSTRATION. Les bases ne sçauroient être en plus grand nombre que celui qui est exprimé par la hauteur du petit côté *AI*, c'est pourquoi si l'on conçoit une ligne *FGH* qui se meut parallelement à elle-même, en allant de *I* vers *A*, le nombre des lignes paralleles sera égal au nombre des bases de la suite des Triangles qui ont deux côtés égaux *AI*, *AB*, ou *AC*. Je dis de plus que toutes ces lignes paralleles sont les bases que l'on cherche : car, par construction, les Triangles *FAG*, *GAH*, ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux lignes *AB* & *AI*, & deux angles *AGF* & *AGH*, qui pris ensemble sont égaux à deux droits. Par conséquent (*par Théor. 1.*) *FG* est une coupée de l'Hyperbole, & *GH* une ordonnée : c'est pourquoi si on prend sur l'asymptote *AP* une ligne *AF* égale à *FG*, & que par le point *F* on tire une ligne *FN* parallele à l'asymptote *AQ*, & égale à *GH*, le point *N* (*Théor. 1.*) sera un point de l'Hyperbole.

SCHOLIE. On doit par cette méthode décrire l'Hyperbole par des points aussi proches que l'on veut. Car l'espace *CDIGK* contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, XIII.

& l'eſpace *IKBE* contient toutes celles qui ont un angle obtus, on n'a qu'à les choiſir auſſi proches l'une de l'autre que l'on voudra. *C. Q. F. D.*

DEUXIÉME MÉTHODE, *un peu différente de la premiére.*

XIV. A l'ouverture du petit côté *AK*, décrivés un demi-cercle partagé en deux également au point *I*, à l'ouverture du plus grand côté *AB*; par le point *A* décrivés un arc de cercle jusqu'à ce qu'il rencontre en *D* la ligne *ID* parallele à *BC*.

Fig. 6.

On prouvera, comme dans le premier cas, en faiſant couler le long de *AI* une ligne *FG* parallelement à elle-même, que l'eſpace *CIDB* eſt le lieu de toutes les baſes qui ont deux angles aigus, & l'eſpace *IKBD*, celui de toutes les baſes qui ont un angle obtus.

XV. SCHOLIE. Dans l'un & l'autre cas, quand même la ligne *FGH* ne ſeroit point parallele à la ligne *AB*, *FG*, ne laiſſeroit pas d'être une coupée de l'Hyperbole, & *GH* l'ordonnée qui lui répond. Car, dans ce cas, comme dans les deux précédents, les Triangles *FAG*, *GAH*, ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux deux côtés *AI* & *AB*, & deux angles qui, pris enſemble, ſont égaux à deux droits.

XVI. COROLL. I. Chaque ſuite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, répond à une portion déterminée de l'Hyperbole, qui eſt le lieu de toutes les baſes changeantes de la ſuite.

XVII. COROLL. II. Le plus grand de deux côtés inégaux d'une ſuite infinie de Triangles, qui fait trouver toutes les coupées & toutes les ordonnées d'une portion déterminée de l'Hyperbole eſt égal à la moitié de la ſomme, & le moindre côté à la moitié de la différence de la plus grande coupée, & de la moindre ordonnée de la portion déterminée de l'Hyperbole.

DÉMONSTRATION. Par le Probleme 1er, les deux côtés de ce Triangle ſont trouver la plus grande coupée *AF*, & la moindre ordonnée *FN*.

La moindre coupée *AC*, & la plus grande ordonnée *CI*.

égale à *AC*, & par le Probleme 2^d, ils font trouver toutes les ordonnées qui sont moyennes entre *AC, AF, FN* & *CI*.

COROLL. III. D'où il suit que pour trouver, au moyen de l'Hyperbole, le lieu des bases d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés donnés, égaux chacun à chacun, il faut tirer deux lignes qui fassent au point *A* un angle quelconque, prendre sur la premiére une ligne *AF* égale à la somme, & sur la seconde une ligne *AD* égale à la différence des côtés, & par les points *F* tirer les paralleles *FN, DN*, aux lignes *AQ, AF*, & décrire une Hyperbole qui passe par le point *N*. XVIII.

L'espace compris entre la puissance de l'Hyperbole *IC*, & entre l'ordonnée *NF*, est le lieu des bases qui ont un angle obtus, & l'espace *MIND* est celui des bases qui ont deux angles aigus.

COROLL. IV. La différence de l'espace qui est le lieu des bases qui ont deux angles aigus d'avec celui qui est le lieu des bases qui ont un angle obtus, considérée dans le cercle, est un demi-cercle; considérée dans l'Hyperbole, elle est zero absolu. XIX.

La premiére partie de cette Proposition est évidente par la seule inspection de la Figure 6 : car, si de l'espace *CIDB*, qui contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, on ôte l'espace *IHKBD* qui contient toutes les bases qui ont un angle obtus, il reste le demi-cercle *CIHK*.

La seconde est aussi évidente : car si, dans l'Hyperbole, on ôte des deux espaces *MDNI, ICFN*, dont le premier contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & le second toutes les bases qui ont un angle obtus, l'espace mixtiligne *IZN*, il reste de part & d'autre, les deux espaces rectilignes égaux *MDZI, ZCFN*.

COROLL. V. Les espaces qui sont le lieu d'une même suite de bases infinies sont inégaux, considérés dans le Cercle & dans l'Hyperbole; car s'ils étoient égaux, on trouveroit la quadrature du cercle. Dans l'Hyperbole, la différence des deux rectangles rectilignes *MDZI, ZCFN*, seroit un espace rectiligne égal au demi-cercle *CIHK*. XX.

PROBLEME III.

Construire un Compas à tracer une Hyperbole.

XXI. Soit un compas $AKEG$ à trois branches, & à tête mobile, les deux branches AK & KE sont égales entre elles, & à une des lignes AB perpendiculaires à l'asymptote AP, la branche KG est plus grande que chacune des deux autres, & égale à l'hypothenuse BC; je dis que si la pointe A du Compas étant fixe en A, l'on fait couler le long d'une rainure les pointes E & G, ensorte que la pointe qui est en G chasse la branche GH parallele à AQ, pendant que la pointe qui est en E, chasse la branche EH parallele à la ligne AI, qui partage en deux également l'angle QAP des asymptotes, les deux lignes GH, EH, se couperont en un point H, qui sera un point de l'Hyperbole; par le point E tirés la ligne EV parallele à AQ & à GH.

Fig. 4.

DÉMONST. *(constr.)* l'angle $QAP = VEP$, *(hyp.)* l'angle $HEG = \frac{1}{2} QAP$ *(constr.)* donc l'angle $VEH = EHG = HEG$; partant le Triangle EGH est isoscéle, & le côté EG est égal au côté GH.

Soit $KG\,(a)$, $KE\,(b)$, $AC = c$, $AG = x$, $EG = y$; par le Théoreme 1, on aura $\overline{KG}^2 - \overline{KA}^2\,(\overline{AC}^2) = AG \times EG = AG \times GH$, ou en termes algébriques $a^2 - b^2\,(c^2) = xy$. C. Q. F. D.

XXII. SCHOLIE. La précédente Proposition peut servir à confirmer qu'il y a différents ordres d'angles infiniment petits; car lorsque les trois branches du Compas sont infinies, les lignes finies AG, EG, sont infiniment petites par rapport aux branches du Compas, par conséquent les angles AKG, AKE, EKG, sont infiniment petits; c'est pourquoi si l'on suppose que le Compas se soit mû jusqu'à ce que le point K ait infiniment approché de l'asymptote AP, il est évident que pendant ce mouvement les points E & G auront parcouru un espace infini, & que pendant cet espace infini,

l'angle *EKG* aura toûjours diminué, par conséquent il sera devenu infiniment plus petit qu'il n'étoit. *C. Q. F. D.*

COROL. Dans l'Hyperbole le lieu des bases d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, contient le même nombre de bases égales chacune à chacune, qui répondent aux mêmes angles comme le lieu des bases dans le Cercle. XXIII.

Je dis que l'espace *MDNI*, qui est le lieu des bases qui ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de bases qui répondent aux mêmes angles que l'espace *VOSE*, qui est le lieu de toutes les bases qui ont deux angles aigus dans les deux Cercles, dont l'un a pour rayon la moitié de la différence, & l'autre la moitié de la somme de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*. Figure 8.

Pareillement l'espace *ICFN*, qui est le lieu de toutes les bases qui ont un angle obtus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de bases qui répondent aux mêmes angles que l'espace *BRES*, qui est le lieu de toutes les bases qui ont un angle obtus dans les mêmes Cercles.

Soit le Compas à trois branches *AKEG*, dont la plus grande branche *KG* est égale à la moitié de la somme, & les deux plus petites *AK* & *KE* à la moitié de la différence de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*.

Concevés qu'en même temps que la ligne *GH* décrit par un mouvement continu la portion déterminée de l'Hyperbole *ICFN*, la ligne *OKL* suit le point *K*, ensorte qu'elle se meut parallelement à l'asymptote *AF*, & qu'elle entraîne avec elle les lignes égales *AO*, *AK*, & la ligne *AL* égale à *KG*, à cause que ces trois lignes ont leur point fixe en *A*. Lorsque le Compas à trois branches aura décrit la portion déterminée de l'Hyperbole, la ligne *OKL* aura tracé le demi-cercle *VBR* avec son anneau circulaire *BKRELS*; d'où il suit qu'à chaque sécante *OL* répond dans l'Hyperbole une ligne *AG* ou *TH* dans l'espace *MDNI*, qui est le lieu de toutes les bases qui ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, & qu'à chaque *KL*, dans le Cercle, répond dans l'Hyperbole une

ligne *EG* ou *GH* dans l'eſpace *ICFN*, qui eſt le lieu des baſes qui ont un angle obtus, par conſéquent le nombre des baſes dans le Cercle & dans l'Hyperbole eſt le même, ce qui ſemble un véritable Paradoxe.

2.° Je dis que les baſes, dans le Cercle & dans l'Hyperbole, ſont égales chacune à chacune, & qu'elles répondent à des angles égaux.

Il faut démontrer que la longueur de chaque *OL*, priſe dans le Cercle, eſt égale à la longueur de chaque *AG* ou *TH*, priſe dans l'Hyperbole, & que la longueur de chaque *KL* eſt égale à la longueur de chaque *EG* ou *GH*, de plus que les lignes ſont adjacentes aux mêmes angles, tirés la ligne *KQ* parallele à l'axe *AB*.

Les Triangles iſoſcéles *OAK*, *AKE*, ont deux côtés égaux chacun à chacun ; de plus à cauſe des paralleles *PA* & *KQ*, l'angle du milieu *OAK* eſt égal à l'angle du milieu *AKE*, par conſéquent $OK = AE$. D'où il ſuit que $KL = EG = GH$, ce qui eſt évident, à cauſe des perpendiculaires égales *AP*, *KQ*, & des obliques égales *AK*, *KE*, *AL*, *KG*,

XXIV. COROLL. I. La moitié de la différence *AQ* de chaque coupée *AG*, d'avec ſon appliquée *GH* ou *EG*, eſt égale à l'ordonnée *PK* d'un Cercle, dont le rayon *AK* eſt égal à la moitié de la différence de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*; de plus le nombre des différences dans la portion déterminée de l'Hyperbole eſt égal au nombre des ordonnées dans le Cercle.

XXV. COROLL. II. La moitié de la ſomme de chaque coupée *AG* & de chaque appliquée *GH* eſt égale à l'ordonnée *PL* d'un Cercle qui a pour rayon une ligne *AL* égale à la moitié de la ſomme de la plus grande coupée *AF* & de la moindre appliquée *FN*; de plus le nombre de ces lignes, dans la portion déterminée de l'Hyperbole, eſt égal à celui des ordonnées compriſes entre la tangente *BS* & le rayon *AE*.

DÉMONSTRATION. $PK = \frac{AG - GH}{2} = \frac{AG - EG}{2}$;

ajoûtés

ajoûtés de part & d'autre les grandeurs EG & KL, on aura $PL = \frac{AG-EG}{2} + EG$, ou $PL = \frac{AG+EG}{2} = \frac{AG+GH}{2}$. *C. Q. F. D.*

CorOL. III. Lorſque le Compas n'a que deux branches égales AK & KE, & que la branche KE pouſſe par ſon extrémité E la grandeur conſtante EG, & la ligne GH qui fait un angle quelconque ſur la ligne AP, la ligne KG devient une grandeur changeante, je dis que ſi pendant le mouvement du Compas on prend ſur GH les différentes valeurs de GK, la ligne qui paſſera par ces points ſera une Parabole. XXVI.

Soit $AK = KE = a$, $EG = b$, $AG = x$, $KG = y$, on aura (*Théor.* 2.) $\overline{KG}^2 = \overline{AK}^2 + AG \times EG$, ou, en termes algébriques, $y^2 = a^2 + bx$, qui eſt une équation à la parabole.

CorOL. IV. Lorſque le point fixe eſt en G, & le point mobile en A, & que la branche KG eſt égale à la branche AK, alors EK devient une grandeur changeante. Si l'on ſuppoſe que la branche AK pouſſe la branche AQ, & que pendant le mouvement du Compas on prenne ſur AQ les différentes valeurs de EK, la courbe qui paſſera par ces points ſera encore une Parabole. XXVII.

Soit $AK = KG = a$, $EG = b$, $AE = x$, $KE = y$, à cauſe du Triangle iſoſcéle, AKG, $\overline{AK}^2 - AE \times EG = \overline{EK}^2$, ou, en termes algébriques, $a^2 - bx = y^2$.

CorOL. V. Lorſque le Compas n'a que deux branches inégales AK, KE, & que le point D qui décrit la Courbe, tombe ſur une des branches inégales KE, alors le Compas décrit une Courbe du troiſiéme genre, qui eſt une double ellipſe; par les points K & D, tirés les perpendiculaires KG, DC, & par le point D la ligne DH parallele à la ligne AC. XXVIII. Fig. 9.

Soit $AK\,(a)$, $KE\,(b)$, $ED\,(d)$, $AF\,(x)$, $FD\,(y)$.

Soit $d \,.\, c :: FD\,(y) \,.\, DC\,(\frac{cy}{d})$, & $d \,.\, \sqrt{d^2-c^2} :: FD\,(y)$. $FC = \frac{y\sqrt{d^2-c^2}}{d}$, à cauſe du Triangle rectangle DCE,

$CE = \sqrt{d^2 - \frac{c^2 y^2}{d^2}} = \frac{1}{d}\sqrt{d^4 - c^2 y^2}$, à cauſe des Triangles ſemblables DEC, EKG.

$DE\,(d) \,.\, CE\,(\frac{1}{d}\sqrt{d^4 - c^2 y^2}) :: KD\,(\overline{b-d}) \,.\, HD$,
ou $GC = \frac{b-d}{d^2} \times \sqrt{d^4 - c^2 y^2}$,
& $DE\,(d) \,.\, DC\,(\frac{cy}{d}) :: KE\,(b) \,.\, KG = \frac{bcy}{d^2}$.

Partant $GF = \frac{b-d}{d^2}\sqrt{d^4 - c^2 y^2} - \frac{y\sqrt{d^2 - c^2}}{d}$,
ou $GF = \frac{\overline{b-d}\sqrt{d^4 - c^2 y^2} - dy\sqrt{d^2 - c^2}}{d^2}$.

Or $AG = \sqrt{\overline{AK}^2 - \overline{KG}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2 c^2 y^2}{d^4}}$
$= \frac{1}{d^2}\sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}$: d'où l'on tire une ſeconde valeur de $GF = x - \frac{1}{d^2}\sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2} = \frac{d^2 x^2 - \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}}{d^2}$.

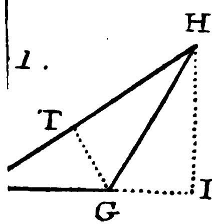
Donc $\overline{b-d}\sqrt{d^4 - c^2 y^2} - dy\sqrt{d^2 - c^2} = d^2 x^1 - \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}$; pour abbréger, lorſque $d = c$, l'équation devient
$\overline{b-d} \times d\sqrt{d^2 - y^2} = d^2 x - d\sqrt{d^2 a^2 - b^2 y^2}$,
ou $\overline{b-d}\sqrt{d^2 - y^2} = dx - \sqrt{d^2 a^2 - b^2 y^2}$.

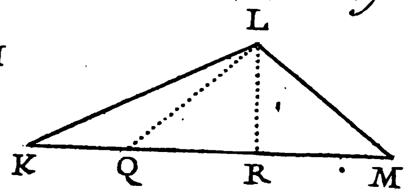
Faiſant évanoüir les incommenſurables, l'équation devient

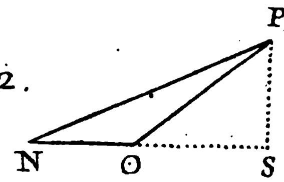
$$\left.\begin{array}{lll} \overline{2b-d}^2 y^4 & + 4b^2 x^2 y^2 & + d^2 x^4 \\ & - 2d \times \overline{b-d}\, x^2 y^2 & - 2d^2 a^2 x^2 \\ & - 2da^2 \times 2\overline{b-d}\, y^2 & - 2d^2 \overline{b-d}^2 x^2 \\ & + 2d \times \overline{b-d}^2 \times 2\overline{b-d}\, y^2 & + d^2 a^4 \\ & & - 2d^2 a^2 \overline{b-d}^2 \\ & & + d^2 \overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0.$$

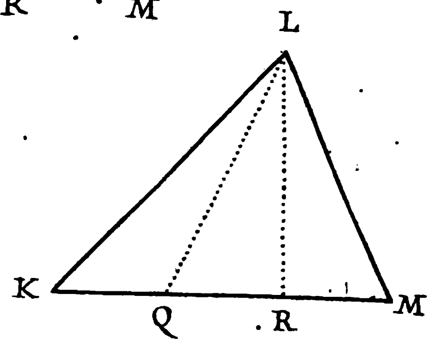
Lorſque $y = 0$

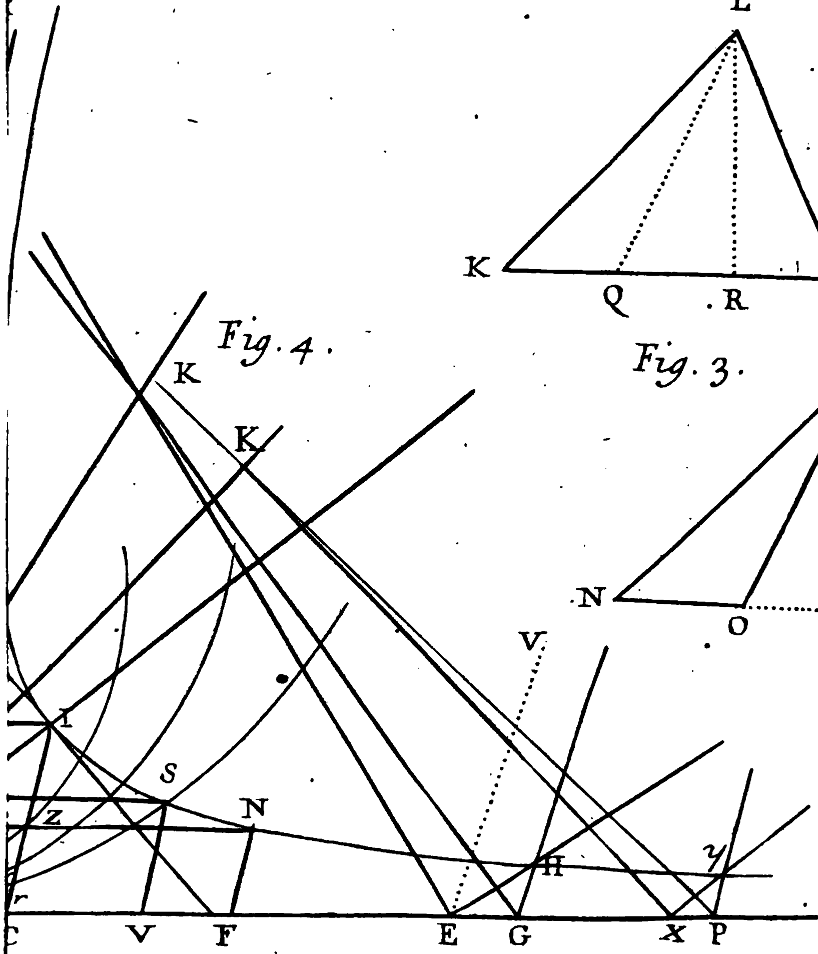
$$\left.\begin{array}{lll} x^4 & - 2\overline{b-d}^2 x^2 & + a^4 \\ & - 2a^2 & - 2a^2 \times \overline{b-d}^2 \\ & & + \overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0. \quad \text{Partant}$$

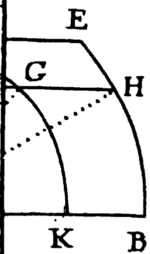

1.
H
T
G
I

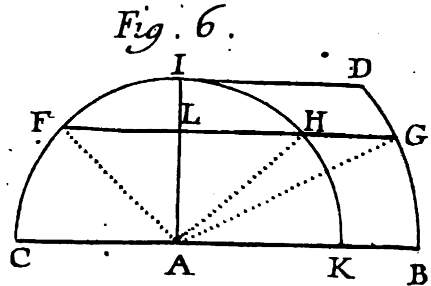

L
K
Q
R
M

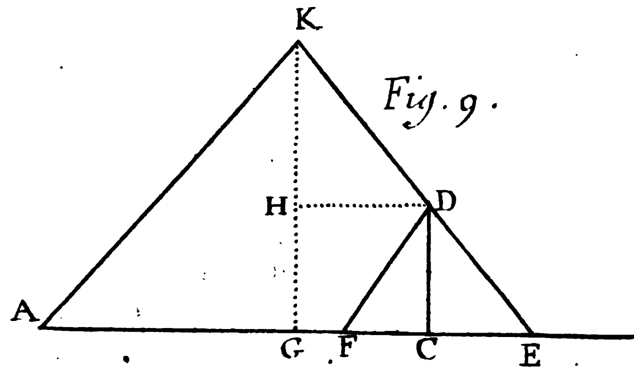

Fig. 2.
P
N
O
S

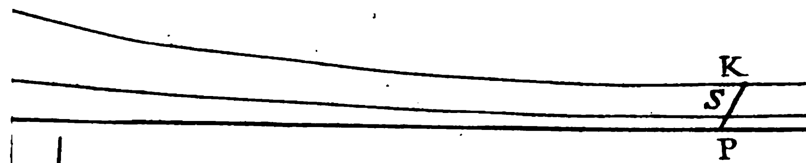

L
K
Q
R
M

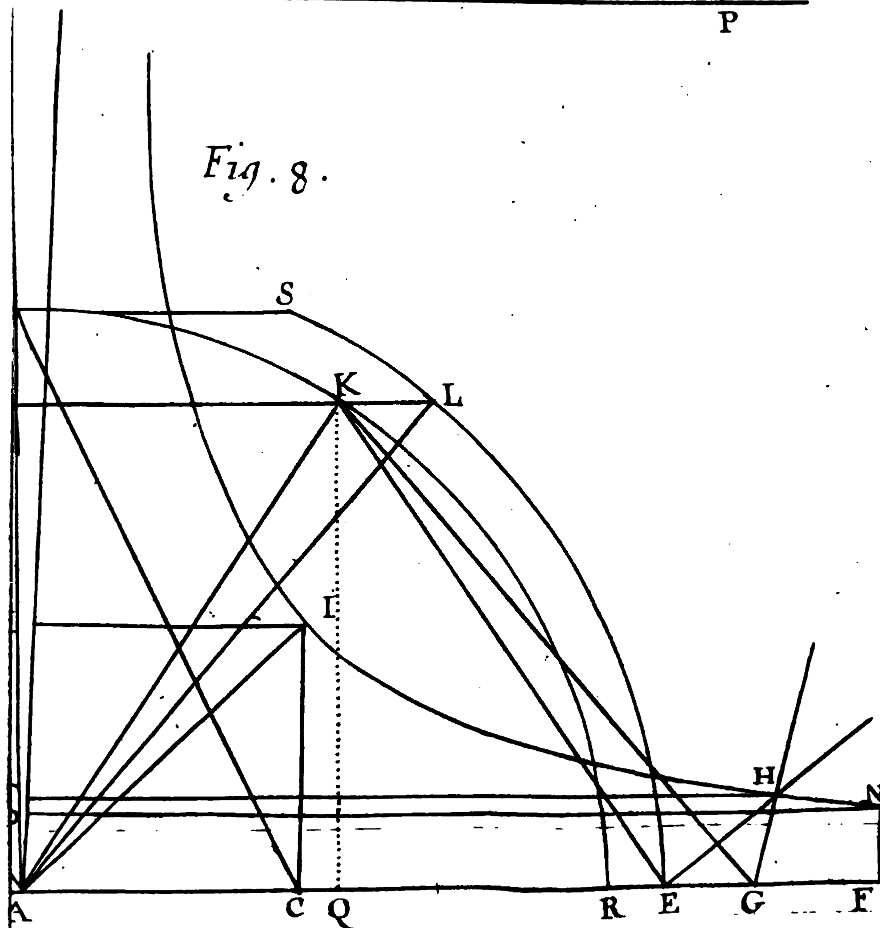

Fig. 4.
Fig. 3.
K
K
P
N
O
S
V
I
S
N
Z
H
y
r
C
V
F
E
G
X
P


E
G
H
K
B


Fig. 6.
I
D
F
L
H
G
C
A
K
B


K
Fig. 9.
H
D
A
G
F
C
E


K
S
P


Fig. 8.
S
K
L
I
H
N
A
C
Q
R
E
G
F

$$x^2 = a^2 + \overline{b-d}^2 \pm \sqrt{4a^2\,\overline{b-d}^2}$$

ou $x^2 = a^2 \pm 2a \times \overline{b-d} + \overline{b-d}^2.$

$$x = a \pm \overline{b-d} \qquad -x = -a \mp \overline{b-d}.$$

Lorſque $x = 0$,

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{2b-d}^2 y^4 & -2da^2 \times \overline{2b-d}\,y^2 & +d^2a^4 \\ & +2d \times \overline{b-d}^2 \times \overline{2b-d}\,y^2 & -2d^2a^2\,\overline{b-d}^2 \\ & & +d^2\,\overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0.$$

qui eſt un quarré parfait, partant $y^2 = \frac{da^2 - d\,\overline{b-d}^2}{\overline{2b-d}}$,

$$y = \pm \sqrt{\frac{da^2 - d\,\overline{b-d}^2}{2b-d}}.$$

Lorſque $\overline{b-d}$ eſt égal à a, la valeur de y eſt zero abſolu au point où x eſt zero. Par conſéquent les deux doubles ellipſes oppoſées ſe touchent à l'origine.

Lorſque a eſt plus grand que $b-d$, il y a deux valeurs de y à l'origine. Par conſéquent dans ce cas, les deux doubles ellipſes ſe coupent en croix.

Lorſque $b-d$ eſt plus grand que a, la valeur de y à l'origine des x eſt imaginaire. Par conſéquent dans ce cas, les deux doubles ellipſes ne ſe touchent, ni ne ſe coupent point, mais elles ſont ſéparées l'une de l'autre d'un intervalle qui eſt plus ou moins grand, ſelon la quantité dont $b-d$ ſurpaſſe a.

Lorſque a eſt égal à b, les deux doubles ellipſes oppoſées ſe confondent & ſe changent en une ſimple ellipſe, dont l'Equation eſt $\frac{d^2x^2}{\overline{2a-d}^2} = d^2 - y^2$.

On donnera la ſuite dans un autre Mémoire, où on rendra raiſon de ce qui ſemble dans celui-ci un Paradoxe.



MEMOIRE SUR UN GRAND NOMBRE DE PHOSPHORES NOUVEAUX.

Par M. DU FAY.

15 Novemb. 1730.

LA découverte de la plus grande partie des Phoſphores que nous connoiſſons, eſt dûë au haſard; peu touchés de l'utilité qui pouvoit en réſulter, & encore moins inſtruits des routes qu'il falloit tenir, les Chimiſtes ont de tout temps aſſés négligé la recherche des Phoſphores. Je n'entrerai point dans le détail de tous ceux qui ſont connus, & dont la plûpart n'ont aucun rapport avec ceux dont j'entreprends de parler, & je ne m'arrêterai qu'à celui qui a fait tant de bruit, ſous le nom de *Pierre de Boulogne*. Tout le monde ſçait qu'un Artiſan, moins occupé de ſon mêtier que du deſir de faire en Chimie quelque découverte utile, s'aviſa de calciner cette Pierre, eſpérant que ce pourroit être une Mine d'Argent, & trouva qu'elle avoit cette propriété ſinguliére, & alors crüe unique, d'être lumineuſe dans l'obſcurité, après avoir été expoſée pendant quelques moments au jour dans l'air libre. Cette découverte fut extrêmement célébrée, pluſieurs perſonnes écrivirent ſur ce ſujet, & entrerent dans un grand détail ſur la nature de cette Pierre, les lieux où elle ſe trouve, ſes différentes préparations, ſes propriétés, &c. Poterius, Licetus, Celius, Mentzelius, & pluſieurs autres en firent une Hiſtoire fort ample, & juſqu'alors on n'avoit entendu parler d'aucune autre matiére qui eût la même propriété. Enfin Balduinus, Chimiſte Allemand, donna dans les Ephémerides d'Allemagne, un Traité intitulé *Aurum auræ*, à la fin duquel il y a une Section qui a pour titre, *Phoſphorus hermeticus*, dans laquelle il décrit la préparation & les effets d'un

In App. ad annum 4 & 5, natur. curioſ. p. 171.

Phosphore qui paroît avoir infiniment de rapport avec la Pierre de Boulogne, mais tout cet ouvrage est écrit si énigmatiquement, & en des termes si obscurs, que j'avoüe qu'il m'a été impossible d'y rien entendre. Mentzelius, dont l'ouvrage est postérieur à celui de Balduinus, compare d'une maniére fort détaillée, la Pierre de Boulogne avec ce nouveau Phosphore, mais sans l'avoir vû, & simplement sur les effets qui sont rapportés dans le Traité de Balduinus.

Kunkel, Boyle, M. Lémery, Theichmeyer en dernier lieu, ont donné sous le nom de *Phosphore hermetique de Balduinus*, un procédé qui réüssit parfaitement, & qu'on peut croire en effet être le même que celui de Balduinus, puisqu'il en a réellement toutes les propriétés, quoiqu'à dire le vrai, on ne trouve rien dans la composition de ce dernier qui ait aucun rapport avec le premier, celui-ci étant une dissolution de Craye par l'Eau forte évaporée & calcinée, au lieu que celui de Balduinus est la Tête-morte d'un Alkaest, dont la préparation est décrite en termes si pompeux & si obscurs, qu'on n'en peut faire aucun usage. Quoi-qu'il en soit, celui qu'on trouve dans ces Auteurs a beaucoup de conformité pour ses effets avec la Pierre de Boulogne, & c'est, à ce que je crois, la seule préparation connuë qui ait cette propriété; on n'a même trouvé jusqu'à present dans les Minéraux, ni dans les autres matiéres simples, que la seule Pierre de Boulogne qui ait cette vertu singuliére de s'abbreuver, pour ainsi dire, des rayons de lumiére, & de les conserver assés longtemps, pour paroître lumineuse dans l'obscurité pendant quelques minutes.

Le P. Kirker dit en avoir trouvé de pareilles, & qui avoient les mêmes propriétés auprès d'une Mine d'Alun à Tolfa. Mentzelius décrit cinq especes de cette Pierre, qui se trouvent toutes aux environs de Boulogne, & dont quelques-unes ont des différences considérables. Il semble que cela devoit naturellement faire soupçonner qu'il se pouvoit rencontrer ailleurs des Pierres semblables, ou d'autres qui eussent les mêmes avantages; il faut cependant que personne

De Arte magn. p. 581.
Sect. 2. cap. 5.

ne s'en soit avisé, & il semble qu'on se soit refusé aux découvertes qui s'offroient d'elles-mêmes dans une infinité d'opérations. Plus les expériences sont simples, plus elles tardent souvent à être découvertes; on va être étonné sans doute de ce qu'une chose aussi commune, & qui demande aussi peu d'appareil, a pû demeurer si long-temps sans être connuë.

Il y a quelques années que je formai le dessein d'examiner, par les différents moyens que je pûs imaginer, la nature de toutes les Pierres fines. Parmi les épreuves que j'en faisois, celle de les calciner étoit une des principales. Comme je tâchois de n'obmettre aucune des Pierres qui peuvent être rangées dans la classe des Pierres fines, j'examinai aussi celles qui n'y sont que parce qu'il n'étoit pas trop aisé de les placer ailleurs; la Topaze commune est de ce nombre: comme il y en a de plusieurs sortes, il est bon d'avertir que celle dont je parle, n'est quasi connuë qu'en Médecine, on l'employe dans les préparations où il doit entrer des Topazes; c'est une Pierre très tendre, jauneâtre, pesante, talqueuse, & qui, lorsque j'en voulus faire la description, me rappella sur le champ l'idée de la Pierre de Boulogne, dont elle ne differe que par la forme extérieure, celle-ci étant ordinairement un peu arrondie & raboteuse, au lieu que la Topaze affecte le plus souvent la forme cubique, ou du moins est presque toûjours terminée par des surfaces paralleles. Sans en faire de comparaison plus détaillée, je calcinai cette Topaze dans un creuset, comme les autres Pierres, & lorsqu'elle fut refroidie, je trouvai qu'elle avoit une forte odeur de Soufre semblable à celle de la Pierre de Boulogne calcinée, je ne doutai plus qu'elle ne fût lumineuse; je l'exposai à la lumiére du jour, & la portai ensuite dans l'obscurité, & je la trouvai semblable aux meilleures Pierres de Boulogne. Je comparai ensuite avec plus de soin cette Pierre, avec un assés grand nombre de celles que j'avois rapportées de Boulogne, il y a quelques années, & je trouvai que c'étoit en effet la même nature de Pierre, ensorte qu'il y en avoit quelques-unes d'entiérement semblables; ma surprise changea d'objet, & je ne

fus plus étonné que de ne m'en être pas avisé plûtôt.

J'avois soupçonné autrefois que la Bélemnite, ou Pierre de Lynx, pouvoit avoir quelque rapport avec la Pierre de Boulogne, à cause de sa disposition en rayons, je l'essayai sur le champ, elle se réduisit presque en poudre par la calcination, & n'avoit, étant refroidie, aucune odeur de Soufre, cela me parut d'un mauvais augure, mais ma conjecture se trouva très-fausse, car la Bélemnite me donna une belle lumiére, & même un peu plus vive que la Topaze; je ne songeai plus alors qu'à pousser plus loin ma découverte, & à essayer toutes les Pierres qui me vinrent dans l'idée.

Je ferois un volume entier, si je voulois rapporter toutes les expériences que je fis, & les différentes maniéres dont elles me réüssirent; mais, pour éviter un détail ennuyeux, je dirai simplement que j'essayai toutes les especes de Gyps, ou Pierres à plâtre, que je pûs recouvrer, & toûjours avec succès; toutes me donnerent de la lumiére, presque toutes avoient une odeur sulphureuse, mais quelques-unes étoient plus lumineuses que les autres, les Albâtres, & le Gyps de Montmartre, appellé improprement *Talc,* étoient de ce nombre.

Ayant épuisé les Gyps, je passai aux Pierres à chaux, & aux Marbres, qui sont pour la plûpart de même nature, tout se trouva Phosphore, tout me donna de la lumiére, il est vrai qu'elle étoit moins vive dans ces derniéres Pierres que dans les Gyps, & qu'il falloit un degré de feu beaucoup plus violent pour les calciner; souvent après la premiére, & même la seconde calcination, ces Pierres ne donnoient aucune lumiére, mais en les calcinant de nouveau, elles devenoient lumineuses, ensorte qu'il n'y en a aucune, de celles qui se peuvent réduire en Chaux, qui ne m'ait donné de la lumiére, lorsque je me suis obstiné à la calciner.

Les matiéres terreuses, telles que la Marne, les Bols, la Craye, les Moilons, les Pierres de Taille & de Liais, n'ont point donné de la lumiére par la calcination, quelque violente qu'elle ait été. Je résolus donc de tenter une autre voye, &

la facilité qu'elles ont presque toutes à se dissoudre dans les Esprits acides, me fit juger que j'en devois attendre le même effet que de la Craye dans le Phosphore de Balduinus; j'en essayai plusieurs qui me réüssirent très-bien, & il est vraisemblable que toutes celles qui se peuvent dissoudre dans l'Eau forte, deviendront lumineuses en suivant le même procédé.

Les Pierres à chaux, les Marbres, les Gyps, les Albâtres, la Bélemnite, les Coquilles pétrifiées tendres, & généralement toutes les Pierres qui se peuvent dissoudre par les acides, quoique lumineuses par la seule calcination, le sont aussi par le procédé de Balduinus. Enfin, à la réserve des Pierres dures ou impénétrables aux acides, comme les Agathes, les Jaspes, le Caillou, le Porphyre, le Grais, le Sablon, le Cristal de Roche, le Cristal d'Islande, le Sable de Riviére, la Pierre de Lar, la Pierre de la Croix, l'Ardoise, le Talc, les Pierres précieuses dont aucune ne m'a réüssi, il n'y en a peut-être point qui ne soit lumineuse, soit par la simple calcination, soit par la préparation que nous avons rapportée, ou même des deux maniéres.

Je ne crois pas cependant les Pierres dures, dont je viens de parler, absolument intraitables, & j'espere parvenir à les rendre lumineuses comme les autres, par un procedé que je n'ai point encore eû le temps de finir. Peut-être les Métaux mêmes ne sont-ils pas exempts d'une propriété commune à tout ce qui est renfermé dans les entrailles de la Terre, mais je réserve ce travail pour un autre temps.

Le Phosphore de Balduinus ne doit être regardé que comme faisant partie de la classe générale des matiéres qui deviennent lumineuses par la dissolution : Voici la maniére de les préparer toutes, qui m'a paru la plus simple. On fait dissoudre dans l'Eau forte, ou l'Esprit de Nitre, quelqu'une des Terres, Pierres, ou Crayes, dont nous venons de parler, & pour cela, on les pulvérise, & on les jette petit à petit dans l'Eau forte, afin que l'ébullition ne soit point trop violente, ce que l'on continuë jusqu'à ce qu'il ne se fasse plus de

de fermentation. On verſe la diſſolution par inclination, & on la fait évaporer juſqu'à ſiccité dans un vaiſſeau de terre, ou de grès; on prend un peu de cette matiére ſéche, on la met dans un Creuſet, dont elle ne rempliſſe que la moitié, & ſans le couvrir, on le place entre les charbons ardents; la matiére ſe fond, & après avoir boüillonné pendant quelque temps, elle ſe deſſéche, ſans qu'il ſoit beſoin de faire un plus grand feu que celui qu'il faut pour fondre du plomb; on laiſſe refroidir le Creuſet, & l'ayant expoſé à la lumiére, on le porte dans l'obſcurité : il eſt inutile de dire ici que pour bien voir l'effet de tous ces Phoſphores, il faut avoir tenu pendant quelque temps les yeux fermés; tout le monde en ſçait les raiſons, & il les faut obſerver exactement dans ces expériences, pour les voir dans toute leur beauté.

Entre les Pierres qui deviennent lumineuſes par la diſſolution, la Pierre de Taille m'a paru faire le plus bel effet, & la Bélemnite, qui par la ſimple calcination eſt une des plus lumineuſes, m'a ſemblé la moins brillante par la diſſolution; je n'entrerai point dans l'examen des autres, parce que ce détail n'auroit point de bornes. Il ne ſeroit pas non plus poſſible d'examiner en particulier toutes celles qui deviennent lumineuſes par la ſeule calcination, il ſuffit de s'arrêter à celles qui font le plus bel effet, telles que ſont la Bélemnite, la Topaze, la Pierre de Boulogne & le Gyps talqueux. Voici la maniére de les préparer toutes, qui eſt très-ſimple, & qui m'a parfaitement réüſſi.

Je prends une, ou pluſieurs de ces Pierres entiéres, ou pulvériſées, je les mets dans un Creuſet que je couvre & que je place dans une Forge, je l'entoure de charbons, & je le chauffe à peu près comme ſi je voulois fondre de l'Argent; je le laiſſe en cet état environ une demi-heure, ou trois quarts d'heure, & ayant laiſſé refroidir le Creuſet, ma Pierre ſe trouve lumineuſe. La Pierre de Boulogne ne demande pas plus de préparation que les autres, & quoique le procedé de Cellius*, rapporté par M. Homberg, ſoit parfaitement bon, celui-ci réüſſit également bien, & demande moins d'appareil.

* *Il Fosforo, ò vero la Pietra Bolognese preparata per far rilucere fra l'ombre.*

Si la Pierre n'eſt point lumineuſe, ou qu'elle ne le ſoit que foiblement, on la calcine une ſeconde, ou même une troiſiéme fois, & elle le devient.

Pour en voir l'effet, je les expoſe ordinairement pendant une minute au grand jour, & elles s'impregnent d'une lumiére, dont la vivacité & la durée ſont inégales; celle de la Topaze eſt fort vive & dure peu, mais j'ai ſouvent vû la Bélemnite la conſerver plus d'une heure. Toutes ces Pierres, de même que celle de Boulogne, deviennent lumineuſes étant expoſées au jour à travers l'eau, le verre, & tous les corps tranſparents; elles le deviennent auſſi, mais très-foiblement, au clair de Lune, à la lumiére d'un flambeau, ou d'une bougie, & même pendant le crépuſcule, enſorte qu'en Eté j'en ai vû prendre de la lumiére une heure entiére après le coucher du Soleil. Pluſieurs Auteurs ne conviennent pas de quelques-unes de ces expériences à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais cela vient ſans doute de ce qu'ils ſe ſont ſervi de Pierres qui avoient peu de vertu, car le fait eſt certain, & je l'ai éprouvé plus d'une fois. En général la lumiére eſt par-tout la même, elle ne differe que par le plus ou le moins de vivacité; ainſi quelque cauſe qui la produiſe, on en doit toûjours attendre le même effet. M. Lémery a remarqué que la Pierre de Boulogne ne prenoit pas tant de lumiére étant expoſée au Soleil que dans l'ombre, ſoit que la matiére de la lumiére, pouſſée avec trop d'impétuoſité, ſoit réfléchie en plus grande quantité par la Pierre, ſoit que le Soleil enleve promptement les parties les plus propres à conſerver le mouvement; quoiqu'il en ſoit, j'ai fait la même obſervation ſur la pluſpart des matiéres dont j'ai parlé dans ce Mémoire. Il eſt auſſi à remarquer que l'effet de ces Pierres eſt moins beau, & que quelques-unes n'en font aucun, lorſqu'elles viennent d'être calcinées, & qu'elles ſont encore chaudes, qu'étant refroidies; il m'a auſſi paru qu'elles faiſoient encore mieux le lendemain que le jour même de leur calcination.

Je dois ajoûter ici que, n'ayant pas toûjours calciné chacune de ces Pierres ſéparément, mais en ayant mis quelque-

fois plusieurs ensemble, j'ai remarqué que rien ne faisoit mieux que la Topaze calcinée dans le même creuset avec de la Bélemnite concassée ou pulvérisée ; & qu'en général celles qui demeurent entiéres dans la calcination, font mieux, lorsqu'on les entoure de poudre de la même pierre, ou de quelqu'autre ; M. Homberg l'avoit remarqué à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais sans cela la Pierre ne laisse pas d'être lumineuse, & cette circonstance ne sert qu'à rendre sa lumiére plus vive.

J'ai tâché, par tous les moyens que j'ai crû pratiquables, de fixer le degré de feu le plus convenable pour ces sortes de calcinations, mais je n'ai pû y parvenir, & quand je l'aurois fait, on n'en auroit tiré aucune utilité, parce qu'il est presque impossible de ne pas réüssir dans toutes ces opérations ; j'ai poussé le feu sur la Topaze, la Bélemnite & la Pierre de Boulogne jusqu'à vitrifier tout l'intérieur du creuset, elles ont toûjours été lumineuses, elles m'ont cependant paru l'être un peu moins que lorsqu'elles étoient calcinées plus modérément ; il résulte de-là qu'on ne peut manquer qu'en ne donnant pas le feu assés fort, auquel cas il faut recommencer, & on est assûré de réüssir. En général, les Gyps & Albâtres demandent le moins de feu, les Marbres & les Pierres à Chaux en demandent le plus, & il faut le degré moyen à la Bélemnite, la Topaze & la Pierre de Boulogne.

Je vais rapporter maintenant quelques observations sur plusieurs de ces Phosphores, qui méritent d'être remarquées. Nous avons déja observé que toutes ces matiéres ne rendent pas une lumiére égale, il se trouve encore beaucoup d'autres variétés dans leurs effets. Celles qui deviennent lumineuses par dissolution, donnent une lumiére rougeâtre, & semblable à un charbon de feu, mais cette propriété ne leur dure guéres plus d'un mois ; la lumiére des Pierres à Chaux & des Marbres est blanche, & assés vive dans les commencements ; mais leur vertu n'est pas non plus de longue durée, & je n'en ai point vû qui l'eût conservée deux mois après sa calcination. Les Albâtres & les Gyps sont, à peu près, dans le même cas, excepté celui de Montmartre que j'ai conservé

lumineux pendant plus de six mois, mais sa vivacité alloit toûjours en diminuant. Je ne puis encore assigner aucun terme à la durée de la propriété des autres Pierres, n'ayant pas même remarqué de diminution sensible dans la plûpart, quoique j'en aye de calcinées depuis huit mois, & qu'elles ayent été exposées toutes très-souvent à la lumiére, ce qui paroît leur devoir faire le plus de tort.

J'ai voulu voir l'effet que feroient ces différents Phosphores dans l'eau, & il n'y en a aucun de ceux que j'ai essayés qui y ait entiérement perdu sa lumiére. Les Marbres & les Pierres à Chaux étant nouvellement calcinés, y font un effet singulier. Lorsqu'on leur a fait prendre de la lumiére, en les exposant à l'air, si on les porte dans l'obscurité, & qu'on les plonge subitement dans l'eau, leur lumiére augmente tout à coup, à mesure qu'elles se dissolvent & s'échauffent, & un moment après elle s'évanoüit presque entiérement; l'espece de pâte liquide, en laquelle se réduisent alors ces Pierres, demeure cependant encore un peu lumineuse, & même reprend de la lumiére, quoique noyée d'eau, si on l'expose de nouveau au jour; il est vrai que cette propriété lui dure très peu, & qu'au bout de 24 heures, elle n'en avoit plus aucune. Les mêmes Pierres éteintes à l'air pendant huit jours, prennent encore de la lumiére, & ne font plus le même effet étant plongées dans l'eau, elles y conservent leur lumiére sans cette augmentation subite, mais sans diminution sensible, & cependant elles perdent leur vertu en peu de temps; les Gyps & Albâtres plongés dans l'eau font le même effet que la Chaux éteinte à l'air, toutes les autres Pierres n'y souffrent aucun changement, l'eau se charge seulement de la poudre la plus subtile, & paroît d'une lumiére blancheâtre ou laiteuse, les particules plus grosses demeurent au fond de la liqueur, & sont plus lumineuses que le reste. L'Esprit de Vin & l'Huile ne font pas plus d'effet que l'eau, & j'ai conservé pendant plusieurs jours des morceaux de ces Phosphores dans chacune de ces liqueurs, ils ont fait leur effet à l'ordinaire, mais ils ont perdu leur propriété plûtôt qu'ils n'auroient fait étant conservés séchement.

L'Eau forte & les autres Esprits acides n'éteignent pas la lumiére de la Topaze, ni de la Pierre de Boulogne; l'ayant même perduë au bout de quelques minutes, comme elles auroient fait dans l'expérience ordinaire, elles la reprennent à travers la liqueur dans laquelle elles ne se dissolvent point, quelque temps qu'elles y demeurent, & j'en ai conservé pendant très long-temps sans qu'il leur soit arrivé plus de changement que dans l'eau commune. M. le Comte de Marsilly dit que la Pierre de Boulogne fermente dans l'Eau forte, je l'ai examiné avec soin, & il m'a paru que lorsqu'elle étoit bien nette, & dégagée de toute matiére terreuse, elle ne fermentoit, ni ne se dissolvoit point dans les Acides. Le Phosphore de Balduinus, & tous ceux qui se font par dissolution, ne s'éteignent pas non plus dans les Acides, mais ils s'y dissolvent de nouveau, lentement, & sans ébullition, & ils ne cessent de faire leur effet que lorsqu'ils sont entiérement dissouts. La Bélemnite s'éteint dans l'Eau forte, & fait lorsqu'on l'y jette, un bruit semblable à un fer rouge qu'on plonge dans l'eau, sa lumiére augmente dans l'instant, & se perd un moment après. Le Gyps fait à peu près le même effet, horsmis qu'il ne fait pas ce bruit dont je viens de parler, mais il s'y dissout avec ébullition, & perd sa lumiére; il faut entendre la même chose des Albâtres & des Sélénites : toutes ces Pierres exhalent une forte odeur de Soufre, en les plongeant dans l'Eau forte, ce que ne font point celles qui n'y perdent pas leur lumiére sur le champ.

Aucune de ces matiéres ne m'a paru faire d'effet sensible dans les dissolutions de Sels alkalis, elles n'y font que comme dans l'eau commune, c'est-à-dire, qu'elles y conservent leur lumiére.

Il y a encore un grand nombre d'expériences à faire sur ce sujet, & elles peuvent être variées à l'infini, par le nombre prodigieux de ces sortes de Phosphores, car le champ est encore infiniment plus vaste qu'il ne l'a paru par ce Mémoire, dans lequel nous n'avons parlé que des seuls Minéraux, & il ne faut pas croire que le regne des Végétaux & celui

des Animaux ne nous fournisse pas un aussi grand nombre de pareils Phosphores. Dans une matiére aussi étenduë, il ne m'a été possible d'en essayer qu'un petit nombre, mais tous ceux que j'ai essayés m'ont réüssi. L'Yvoire, les Os d'Animaux, les Ecailles d'Huîtres, les Coquilles d'Oeufs & les autres matiéres semblables, étant brûlées simplement dans le feu, ou dans un Creuset, deviennent lumineuses, & quelques-unes conservent leur lumiére assés long-temps. Les Bois, les Fruits, les Herbes, & tout ce qui peut être réduit en cendres, donne aussi de la lumiére, il ne faut que dissoudre ces cendres dans l'Eau forte, & procéder comme dans la préparation de Balduinus, l'effet en est le même. Enfin il est à croire qu'il ne se trouvera plus rien sur la Terre qui ne mérite le nom de Phosphore à aussi juste titre que la Pierre de Boulogne. Dans quel étonnement ne seroient point ceux qui ont fait des volumes entiers pour faire l'éloge des propriétés merveilleuses de cette Pierre, s'ils voyoient aujourd'hui qu'il est presque impossible de trouver quelque matiére dans le monde qui n'ait pas les mêmes avantages ! Et ce sera un phénoméne très-singulier, qu'une matiére qu'on ne pourra rendre lumineuse, ni par calcination, ni par dissolution.

Je ne crois pas cependant que les observations les plus importantes qu'il y ait à faire, roulent sur les particularités de ces différentes matiéres, elles doivent avoir pour objet tous ces Phosphores en général. Nous sçavons que ces Chaux s'impregnent avec beaucoup de facilité de la substance de la lumiére, qu'elles la conservent quelque temps, & la perdent enfin ; mais nous ne sçavons pas trop bien comment la plûpart des matiéres acquiérent cette propriété par la seule calcination, pourquoi d'autres ont besoin de l'addition des Sels acides, ce qui fait perdre à quelques-unes cette propriété en peu de jours si elles demeurent exposées à l'air, comment elles la recouvrent par une nouvelle calcination, ensorte que leur lumiére devient aussi belle que la premiére fois, comme je l'ai éprouvé ; il faudroit peut-être bien des années & bien des calcinations répétées pour épuiser cette propriété, &

peut-être n'y parviendroit-on pas. La lumiére qu'elles prennent n'eſt pas toûjours la même, elle eſt ſouvent blanche, d'autres fois rouge, quelquefois bleüe. La cauſe de ces différences n'eſt point encore connüe ; la couleur du feu pendant la calcination, celle des rayons qu'on fait tomber ſur la Pierre par le moyen du priſme, en l'expoſant au jour, les milieux par leſquels paſſent ces rayons, les corps qui les réfléchiſſent, la quantité ou la vivacité de la lumiére, la durée du temps qu'elle y demeure expoſée, toutes ces circonſtances cauſent des variétés conſidérables, & méritent d'être obſervées avec grand ſoin ; peut-être une connoiſſance beaucoup plus exacte de la nature de la lumiére ſera-t-elle le fruit de cet examen. Juſqu'à préſent la rareté de la Pierre de Boulogne a rendu ces recherches très-difficiles ; préſentement tout en peut tenir lieu, & plus il y a de différentes matiéres qui produiſent les mêmes effets, plus on aura de facilité ; nous trouverons dans l'une très-aiſément ce qui nous eût échappé dans l'autre ; enfin il eſt à croire que cela nous menera à de nouvelles connoiſſances qui pourront avoir leur utilité. J'ai déja fait pluſieurs expériences dans les vûës que je viens d'indiquer : mais outre qu'il en reſte encore un bien plus grand nombre à eſſayer, je ne les ai point faites avec aſſés de préciſion pour y pouvoir compter ; je pourrai cependant les donner dans une autre occaſion, mais je ſouhaiterois que d'autres perſonnes vouluſſent prendre la peine d'y travailler auſſi de leur côté, & j'oſe aſſûrer que le champ eſt aſſés vaſte pour occuper pluſieurs Phyſiciens, & pour fournir un grand nombre de nouvelles découvertes & d'obſervations des plus curieuſes & des plus ſinguliéres.



REFLEXIONS
SUR
LE MOUVEMENT DES EAUX.

Par M. PITOT.

16 Décemb. 1730.

I. LES avantages qu'on tire du mouvement des Eaux sont connus de tout le monde. Comme cette partie des Mathématiques est une des plus utiles, elle a fait l'objet des recherches de plusieurs habiles Mathématiciens. Heron, Majottus, Guglielmini, Castelli, Borelli, Toricelli, & sur-tout M.rs Mariotte & Varignon, ont porté cette science à un point de perfection, qu'il semble qu'on n'a plus rien laissé à desirer. Nous avons crû cependant que les réfléxions suivantes pourroient avoir leur utilité, principalement pour le Calcul des Machines mües par des chûtes & courants d'Eau, dont nous avons traité dans les Mémoires de l'Académie des années 1725, 1727 & 1729. Ce que nous disons ici peut être regardé comme une suite de ce que nous avons donné dans ces différents Mémoires.

II. Comme la science du mouvement des Eaux est une de celles qu'on peut appeller *Physico-Mathématique*, on a commencé par des expériences, pour connoître, à peu-près, les loix de leurs équilibres, de leurs vîtesses, par rapport à la hauteur des Réservoirs, du temps de leurs écoulements, de la force de leurs impulsions, &c. & l'on a donné ensuite des démonstrations géométriques de presque tout ce que les expériences n'avoient fait qu'indiquer. Un seul principe qui sert de base & de fondement à presque toute cette théorie, ne paroissoit pas susceptible de démonstration géométrique, mais M. Varignon l'a démontré dans les Mémoires de 1703. Voici ce principe: *Les vîtesses de l'Eau, à la sortie des ouvertures faites au bas des Réservoirs ou des Tuyaux de conduite,*

sont

sont entr'elles comme les racines des hauteurs de l'Eau au dessus des ouvertures.

III. Par ce principe on peut trouver ou connoître quelle doit être la hauteur du Réservoir, ou la longueur du Tuyau, pour que la vîtesse uniforme avec laquelle l'Eau coulera & sortira du Tuyau, soit égale à une vîtesse donnée, & réciproquement la hauteur du Tuyau étant donnée, on trouvera la vîtesse. Mais puisque les dépenses d'un même Tuyau sont proportionnelles aux vîtesses de l'Eau, on connoîtra par-là les dépenses des Tuyaux suivant leurs différentes longueurs & grosseurs, & réciproquement. Voici en deux mots comment on peut faire ces calculs, & la regle qu'on doit suivre; il est vrai que M. de la Hire a parlé de cette regle dans les Mémoires de 1702, mais nous avons besoin de la rappeller ici.

IV. On a trouvé, par expérience, qu'un corps en tombant dans l'air libre, parcourt un espace de 14 pieds dans la premiére seconde de sa chûte, & l'on sçait que si ce corps continuoit à se mouvoir avec toute la vîtesse acquise par sa chûte de 14 pieds, il parcourroit 28 pieds par seconde d'un mouvement uniforme. Voilà donc un rapport constant, c'est-à-dire, que nommant x la hauteur de la chûte d'un corps, ou de l'Eau d'un Réservoir, & u la vîtesse uniforme que ce corps doit acquérir en tombant de la hauteur x, on aura, par le principe, $\sqrt{14} . 28 :: \sqrt{x} . u$, & $28\sqrt{x} = u\sqrt{14}$, qu'on réduit à $56x = uu$. Par cette égalité ou formule on fera tous les calculs entre les hauteurs des Réservoirs & les vîtesses des Eaux : car on voit, 1.° Que si la hauteur x est connüe ou donnée, pour trouver la vîtesse u on multipliera la hauteur ou la valeur de x par 56, & la racine quarrée sera la valeur de u, ou de la vîtesse uniforme acquise par la chûte de la hauteur x. 2.° Mais si la vîtesse u est donnée, on en prendra le quarré, qu'on divisera par 56, & le quotient sera la hauteur x. On voit aussi que si l'on décrit la parabole, dont $56x = uu$ est l'équation, les abscisses x marqueront les hauteurs des Réservoirs, & les ordonnées u

les vîtesses uniformes des Eaux. Ces regles conviennent également à toutes sortes de chûtes d'Eau, de quelle grandeur & figure que soient les ouvertures des Réservoirs & des Tuyaux de conduite.

V. Donc la vîtesse de l'Eau dans les Tuyaux est toûjours uniforme, égale à la vîtesse d'un corps acquise en tombant de la hauteur du niveau de l'Eau du Réservoir au dessus de son ouverture, & par conséquent la vîtesse ou la chûte de l'Eau dans les Tuyaux est toûjours double, ou se fait dans la moitié moins de temps que par sa chûte de la même hauteur dans l'air libre.

Figure 1. VI. Voilà la raison d'où vient que la vîtesse de l'Eau à l'orifice *T*, quoique plus grande que sa vîtesse en *P*, sa quantité est cependant la même; car pour que la quantité d'Eau en *T* fût proportionnelle à sa vîtesse, il faudroit que la vîtesse à l'orifice *P* fût égale à celle de *T*, ce qui ne sçauroit être, les Tuyaux étant de différentes hauteurs.

VII. Cette considération peut être utile dans les Machines mûes par des chûtes d'Eau, pour placer avantageusement la Roüe de Moulin, ou la Roüe qui porte les Aubes; & calculer exactement l'action de l'Eau sur les Aubes, ou la force motrice de la Machine. Car soit, par exemple, deux Roües de Moulin *V* & *X*, placées au bas d'un Réservoir, l'une en *P*, & l'autre en *T*, je dis qu'on ne doit pas calculer la force de l'Eau sur les Aubes de la Roüe *X* par la méthode ordinaire; car pour connoître la force de l'impulsion de l'Eau sur les Aubes d'une Roüe ou de toute autre surface, sa vîtesse étant connüe, on prend, par la méthode ordinaire, le poids d'un solide d'Eau qui a pour base la surface choquée, & pour hauteur celle d'où l'Eau doit tomber pour acquérir cette vîtesse. Or lorsque la hauteur du Réservoir est connüe, la valeur de ce solide l'est aussi, dont le poids, à raison de 70 livres le pied-cube, est la valeur de la force de l'impulsion, ou choc perpendiculaire de l'Eau sur les Aubes de la Roüe de Moulin. Mais si au contraire la vîtesse de l'Eau est donnée, on trouvera facilement la hauteur du Réservoir par l'égalité

Figure 2.

$-56x = uu$, comme il a été expliqué ci-dessus.

Voilà le calcul qui convient aux Aubes de la Roüe *V*, parce qu'on peut les regarder comme placées immédiatement au dessous de l'ouverture *P*. Mais si on vouloit appliquer ce même calcul aux Aubes de la Roüe *T*, l'Eau ayant parcouru l'espace *PT* dans l'air libre, on trouveroit une force plus grande qu'elle ne seroit réellement, & on se tromperoit ; en voici la raison, & en même temps la méthode de faire les Calculs pour les Roües disposées de cette sorte. Puisque les forces des impulsions sont égales aux solides d'Eau qui ont pour base la surface des Aubes, laquelle surface doit être égale à l'orifice du Tuyau, & pour hauteur celle du niveau de l'Eau du Réservoir, si le Tuyau descendoit jusqu'en *T*, l'impulsion de l'Eau sur l'Aube placée en *T* seroit à l'impulsion sur l'Aube placée en *P*, comme la hauteur *TK* à la hauteur *PK*, parce qu'alors ses impulsions sont en raison composée de celle des vîtesses, ou comme $\sqrt{TK}$ à $\sqrt{PK}$, & de la raison des quantités d'Eau écoulées en temps égaux par les orifices *T* & *P* ; or cette raison étant la même que celle des vîtesses, l'impulsion sur l'Aube en *T* sera à l'impulsion sur l'Aube en *P* comme les quarrés des vîtesses, ou comme *TK* à *PK*. Mais si le Tuyau ne descend que jusqu'en *P*, les quantités d'Eau écoulées seront les mêmes, & alors les impulsions seront nécessairement dans la raison simple des vîtesses, ou comme $\sqrt{TK}$ à $\sqrt{PK}$.

VIII. On voit par-là l'avantage qu'il y a de conduire l'Eau avec un Tuyau le plus près qu'il est possible de la Roüe de Moulin, ou de mettre les Aubes le plus près qu'on peut de l'ouverture faite au bas des Réservoirs, au lieu de la laisser tomber dans l'air libre, ou même sur un plan incliné par le moyen d'une rigole en forme de gouttiére, comme je l'ai vû pratiquer à plusieurs Roües pour mouvoir des Soufflets & Marteaux de Forges, à moins qu'on ne soit assujetti par la quantité d'Eau que l'on a à dépenser, mais en ce cas il vaut mieux faire les ouvertures & les aubes plus petites.

IX. Ce que nous venons de dire des chûtes d'Eau verticales, se doit entendre des chûtes inclinées à l'horison, en prenant leurs hauteurs verticales pour leurs hauteurs propres, ce qui a été démontré par tous ceux qui ont écrit des Hydrauliques ou Mouvements des Eaux.

X. L'Eau coulante ou courante sur des plans inclinés doit accélérer sa vîtesse suivant les racines des hauteurs perpendiculaires, ou, si l'on veut, suivant les racines des longueurs du plan parcouriies, cela est connu. Or puisque les lits des Fleuves, des Riviéres & des Aqueducs, sont des plans inclinés, la vîtesse de leurs Eaux doit, par cette raison, s'accélérer & augmenter depuis leurs sources jusqu'à leurs embouchûres : ainsi, suivant ce principe, on trouveroit aisément par l'équation de l'Art. IV, la vîtesse du courant des Riviéres, leurs pentes, étant données, & réciproquement la hauteur ou l'inclinaison de leurs pentes, les vîtesses étant connües. Mais deux causes principales dérangent totalement cette regle; ces causes sont, la premiére, la résistance que les Eaux des Fleuves & grandes Riviéres trouvent à leurs embouchûres en se déchargeant dans la Mer, & la seconde, les frottements des Eaux contre les surfaces du fond & des bords.

Sans cette résistance & ces frottements, les Eaux des Riviéres s'accéléreroient, comme nous venons de dire, depuis leurs sources jusqu'à leurs embouchûres, leurs rapidités seroient beaucoup plus considérables, plus grandes vers leurs fonds qu'à leurs surfaces, & leurs largeurs ou profondeurs diminüeroient depuis leurs sources jusqu'aux embouchûres.

XI. Je considére d'abord quel seroit l'état des Fleuves, si la résistance & les frottements, dont nous venons de parler, étoient nuls, & je suppose de plus que toute l'Eau d'un Fleuve part d'une seule & même source, & coule sur un plan parfaitement droit, en telle sorte que les Eaux gardent toûjours le même niveau de pente, la profondeur du lit soit par-tout la même.

Par ces suppositions, il est évident, 1.° Que dans toute la longueur du Fleuve, il s'écoulera en temps égaux des

quantités ou des masses égales d'eau. 2.° Que la vîtesse des Eaux augmentant ou s'accélérant toûjours depuis la source jusqu'à l'embouchûre, & la profondeur étant supposée par-tout la même, la largeur entre ces bords doit toûjours diminuer, & cela dans le rapport réciproque des vîtesses, ou en raison renversée des racines des hauteurs, ou des longueurs parcouruës depuis la source. Ainsi si les Eaux d'un Fleuve, après avoir parcouru l'espace EF depuis la source E, la largeur entre ces bords est AB; lorsqu'elles seront parvenuës en G, la profondeur étant supposée la même par-tout, la largeur CD doit être à la largeur AB, comme la vîtesse de l'Eau en F est à sa vîtesse en G: car, en temps égaux, il doit passer entre AB & CD des quantités ou des masses égales d'Eau.

XII. Si l'on nomme EF (a), FG (x), AB $(2b)$, & CD $(2y)$, puisqu'on peut exprimer les vîtesses de l'Eau en F & en G, par $\sqrt{EF}$ & $\sqrt{EG}$, ou par $\sqrt{a}$ & $\sqrt{x}$, on aura $2y . 2b :: \sqrt{a} . \sqrt{x}$, d'où l'on tire cette équation $abb = xyy$, qui montre que dans ses suppositions chaque bord du Fleuve est une hyperbole du second genre : ces hyperboles ont la ligne EFG pour asymptote commune.

XIII. Comme les Eaux des Fleuves sont plus basses vers le fond, par rapport à la hauteur de leurs sources, que celles de la surface, leur vîtesse doit, par cette raison, être plus grande près du fond que vers la surface. Or la hauteur de la source & la profondeur des Eaux étant connuës, il seroit aisé de déterminer par le principe général, la différence entre la vîtesse du fond & celle de la surface, & réciproquement cette différence étant connuë, on trouveroit la hauteur de la source. Guglielmini donne sur ce principe une méthode pour trouver l'origine ou la hauteur de la source d'un Fleuve, en connoissant par expérience deux vîtesses des Eaux prises dans des profondeurs différentes.

XIV. Nous avons dit ci-dessus que la vîtesse ou la rapidité des Eaux des Fleuves & des Riviéres seroient très-considérables, si elles n'étoient rallenties par la résistance qu'elles

trouvent à l'embouchûre, en se déchargeant dans la Mer; & beaucoup plus encore par les frottements considérables qu'elles souffrent dans tout leur cours, en roulant sur des plans inégaux & très-raboteux. Pour déterminer ce que les Fleuves doivent perdre de leurs vîtesses, depuis leurs sources, par la résistance des Eaux de la Mer à leurs embouchûres, je considére d'abord la vîtesse que prendroit une surface plane, poussée en même temps par deux fluides mûs dans des directions directement opposées.

Si la surface AC est poussée par l'action du fluide $BADC$ dans la direction EL, & en même temps par le fluide $MAPC$ dans la direction EK, directement opposée, & qu'on nomme M la masse du premier fluide, & V sa vîtesse m, la masse du second, u sa vîtesse, & x la vîtesse que la surface doit prendre dans la direction EL, en supposant que le premier fluide doive l'emporter sur le second. $u + x$ sera la vîtesse respective du fluide $MAPC$ contre la surface, & $V - x$ celle du fluide $BADC$. Or, il est évident que la vîtesse x doit être telle que le produit des masses de chaque fluide par le quarré de leurs vîtesses respectives contre la surface, soient égaux, on aura donc cette égalité $\overline{uu + 2ux + xx} \times m = \overline{VV - 2Vx + xx} \times M$, de laquelle on tirera la valeur de x. Si les masses sont égales, ou que les fluides soient les mêmes, tous deux de l'Eau, ou tous deux de l'air, on aura $x = \frac{VV - uu}{2V - 2u} = \frac{V + u}{2}$; & si l'on suppose de plus que le fluide $MAPC$ soit en repos, on aura $u = 0$ & $x = \frac{1}{2}V$.

D'où l'on voit que si $BADC$ représente le cours d'un Fleuve, AC son embouchûre ou son entrée dans la Mer, $AMPC$, qu'il y ait une surface en AC ou non, l'Eau du Fleuve doit perdre la moitié de sa vîtesse à la rencontre des Eaux de la Mer; l'on voit encore que les Eaux du Fleuve conservent toûjours leur même niveau de pente. Si les derniéres parties, ou la derniére tranche AC est retenuë de la moitié, toutes les autres seront retenuës d'une quantité qui

rendra leurs vîtesses uniformes, & égales à la moitié de la plus grande vîtesse des Eaux avant leurs rencontres avec celles de la Mer ; & il est encore évident que cette diminution doit se faire sentir jusqu'aux $\frac{3}{4}$ de la longueur du Fleuve depuis son embouchûre, en remontant vers sa source; car la vîtesse acquise depuis la source jusqu'au quart de sa longueur est égale à la moitié de la vîtesse que les Eaux doivent acquérir par leurs chûtes de toute la pente du Fleuve.

XV. Voilà la premiére cause qui diminuë la vivacité ou la rapidité des Fleuves, & qui rend leur cours presque uniforme. Les frottements sont une cause de diminution beaucoup plus considérable, comme nous allons voir; mais on ne sçauroit les réduire au calcul, il faut avoir recours à l'expérience. Nous comprenons ici sous le nom de *frottement des Eaux*, les détours des filets d'Eau à la rencontre des petites éminences du fond raboteux des Riviéres. Si *AB* est le fond ou lit d'une Riviére, les filets d'Eau *ab* rencontrant des petites éminences en *b*, se détournent dans une direction comme *bc*, & sont en même temps entraînés par les filets supérieurs, ce qui rallentit nécessairement leurs vîtesses de quelque chose: or ces détours, quoi-que petits, sont en si grand nombre dans tout le cours d'une Riviére, que cette cause, est, je pense, la plus considérable qui arrête & retarde les Eaux.

XVI. Une preuve bien sensible que les frottements rallentissent considérablement le courant des Eaux, est que plus les Fleuves & les Riviéres baissent ou diminuënt, plus leurs vîtesses se rallentissent, & au contraire plus elles augmentent ou s'enflent, plus leurs rapidités augmentent; & on sçait que dans les grandes Eaux, leur courant devient double, triple, & quelquefois quadruple de celui de leur état moyen. Elles coulent cependant sur la même pente, & le même plan incliné.

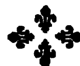
XVII. Mais voici une 2.[de] preuve de la quantité considérable des frottements. Par les nivellements de M. Picard, de la justesse desquels on ne sçauroit douter, la Riviére de Loire a au moins trois fois plus de pente que la Seine, &

cependant la vîtesse des Eaux de la Seine est presque double de celle de la Loire; la raison est que le lit de la Loire a peu de profondeur, puisqu'elle n'est souvent pas navigable, & qu'elle ne porte que des Batteaux très-petits, en comparaison de ceux de la Seine : or il est bien certain qu'une petite quantité d'Eau recevant tous les frottements, doit être bien plus rallentie qu'une plus grande quantité. Mais aussi lorsque les Eaux de ces deux Riviéres grossissent, la vîtesse ou le courant de la Loire augmente en plus grande raison que le courant de la Seine; ce qui rend la Loire plus sujette à déborder & à changer de lit, toutes choses d'ailleurs égales.

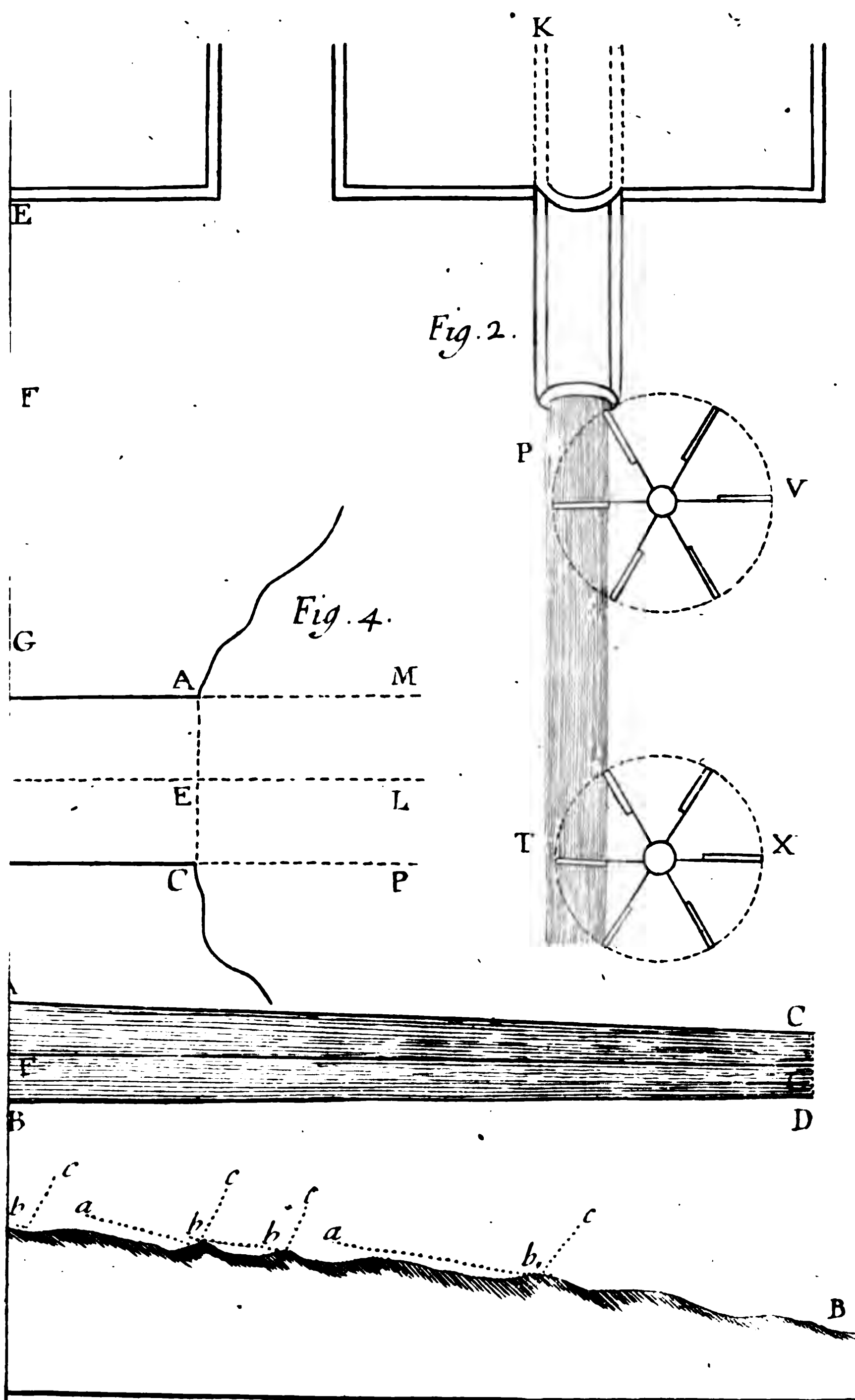
Le Rhône & le Rhin ont la profondeur de leurs lits beaucoup plus grande que la Seine & la Loire, c'est aussi par cette raison que ces Fleuves sont beaucoup plus rapides.

XVIII. Voyons quelle seroit, à peu près, la rapidité extrême des Riviéres, si les frottements étoient nuls, & la résistance de l'air. Je fais ce calcul pour la Seine, dont la pente depuis Paris jusqu'à la Mer est environ de 110 pieds, & comme Paris est presque dans le milieu entre les sources & l'embouchûre de la Seine, prenons 200 pieds pour toute la pente de cette Riviére. Si l'on substituë dans $56x = uu$, 200 à la place de x, on aura la vîtesse $u = 106$, donc il faut prendre la moitié, à cause de la résistance des Eaux de la Mer, pour avoir 53 pieds par seconde pour la vîtesse extrême que les Eaux de la Seine auroient, si les frottements étoient nuls : cette vîtesse est la même, à peu près, que celle d'un jet d'Eau de 50 pieds de hauteur à la sortie de son ajoûtoir.

Les frottements des Eaux contre le fond & les bords des Riviéres sont donc très-avantageux ; car sans eux les Riviéres ne seroient pas navigables, tant par leur trop grande rapidité, que par le peu de profondeur qu'elles auroient.



RECHERCHES


K
E
Fig. 2.
F
P
V
Fig. 4.
G
A
M
E
L
C
P
T
X
C
F
B
D
c
b
a
c
b
c
b
a
c
b
B

RECHERCHES ANATOMIQUES SUR LES OS DU CRANE DE L'HOMME.

Par M. HUNAULD.

I.

VESALE, & après lui des Anatomistes de grande réputation *, nous ont dit, qu'en éxaminant la calotte du Crâne humain, on ne remarque sur sa face concave, à l'endroit des sutures, que des lignes plus ou moins irréguliéres, au lieu qu'à sa face convexe les dents (comme tout le monde le sçait) y sont très-sensibles. On peut encore exposer cette même remarque d'une autre façon, en disant, que les dents qui unissent les os coronal, pariétaux & occipital entr'eux, ne se trouvent qu'à la Table externe & au Diploë, & qu'il n'y a point de dentelure à la Table interne de ces os. 6 Décemb. 1730.

Prévenu en faveur d'une observation qui vient de si bonne part, & que j'avois vérifiée plusieurs fois, je fus fort étonné en y trouvant par la suite des exceptions. Je voulus m'assûrer, en éxaminant quantité de Crânes, si ces exceptions n'étoient point un jeu de la Nature, & voici ce que j'ai trouvé:

Les Crânes qu'on étudie le plus, & dont on sépare les os pour la démonstration, sont assés souvent des Crânes de Sujets morts au de-là de la jeunesse. On ne trouve point pour l'ordinaire de dents à la Table interne de ces Crânes, & plus les Sujets sont avancés en âge, & plus l'union des os en dedans de la calotte du Crâne paroît en forme de lignes; ces lignes même s'effacent entiérement dans la vieillesse. Au contraire, dans le bas âge il y a des dents à la Table interne

* *Vesale, de Corporis humani fabricâ, lib. 1. cap. 6. Eustachi, Ossium examen. Fallope, expositio de Ossibus, cap. 13. Spigel, de humani Corporis fabricâ, lib. 2. cap. 7. Mem. de l'Acad. Royale des Sc. de 1720. p. 347.*

de la calotte du Crâne, & les sutures paroissent à sa surface concave. Ces dents & ces sutures y sont d'autant plus apparentes que les Sujets sont plus jeunes. Voilà une variété bien certaine, bien constante, & qui fait porter à faux l'observation de Vésale, & des autres Anatomistes que je viens de citer. C'est de cette variété dont je vais tâcher de développer les causes.

Une Voûte a plus d'étendüe à sa surface convexe qu'à sa surface concave, & plus une Voûte est épaisse, & plus sa surface interne est petite par rapport à l'externe. Cette différence d'étendüe est cause que les piéces qui composent une Voûte doivent être taillées obliquement pour être appliquées les unes à côté des autres. Si l'on suppose que les piéces d'une Voûte fassent également effort pour s'augmenter suivant toutes leurs dimensions, la pression de ces piéces les unes contre les autres, sera plus forte vers la surface concave que vers la surface convexe. Ces idées simples, appliquées à ce qui se passe dans l'augmentation du Crâne, fourniront, je crois, la raison que je cherche.

Dans l'enfance le Coronal, les Pariétaux & l'Occipital commencent peu-à-peu à s'ajuster ensemble par le moyen des dents & des échancrûres qui se trouvent à leurs bords. Ces os sont alors très-minces, & les dents qui se trouvent gravées dans toute leur épaisseur, sont aussi longues à la Table interne qu'à l'externe ; ainsi les sutures coronale, sagittale & lambdoïde, paroissent à la surface concave de la calotte du Crâne de même qu'à la surface convexe. Mais bientôt ensuite les choses changent. Les os du Crâne se pressent mutuellement les uns & les autres à mesure que leur étendüe augmente : comme en même temps leur épaisseur devient plus considérable, il faut nécessairement que les dents ayent moins de longueur à la Table interne qu'à l'externe, & il faut que la pointe de ces mêmes dents soit taillée obliquement, car la calotte du Crâne, ainsi qu'une Voûte, a moins d'étendüe à sa surface concave qu'à sa surface convexe ; ainsi les bords des os qui la composent, pour pouvoir s'appliquer à côté

les uns des autres, doivent être taillés obliquement.

A mesure que l'épaisseur du Crâne augmente, les dents deviennent de plus en plus moins longues à la Table interne qu'à l'externe. Cette inégalité de longueur fait que les échancrures, qui ne sont que les interstices des dents, ont aussi moins d'étendüe à la surface concave du Crâne qu'à la surface convexe; par conséquent si l'on regarde le dedans de la calotte du Crâne, quand il commence à acquérir une certaine épaisseur, les sutures y doivent paroître moins considérables qu'à sa surface externe.

Voilà donc déja les dents moins longues & les échancrûres moins profondes à la Table interne qu'à l'externe; mais il y faut encore quelque chose de plus, car avec l'âge les échancrures se remplissent entiérement à la Table interne, & les dents y disparoissent entiérement.

Lorsque les os de la calotte du Crâne commencent à se presser réciproquement par l'augmentation de leur étendüe, la partie de la pointe des dents, qui appartient à la Table interne, pressée contre les échancrûres de l'os opposé, trouve moins de résistance vers la substance spongieuse du Diploë que contre la Table interne des échancrûres où ces dents sont engagées: cette partie de la pointe des dents qui appartient à la Table interne, se dirigera donc vers le Diploë. Le peu d'épaisseur de la Table interne rend cette détermination facile. La Table interne de la dent, en se portant ainsi vers le Diploë, forme un talus, & perd le niveau du dedans du Crâne, mais la Table interne du fond de l'échancrûre en profite bientôt en s'avançant sur le talus de la dent opposée, & elle s'y avance d'autant plus, que les os faisant plus d'effort les uns contre les autres vers leur surface concave qu'ailleurs, y sont plus disposés à s'étendre vers les endroits où il se trouve une diminution de résistance. Figure 1.

Voilà donc en même temps deux nouvelles causes qui contribüent à effacer les sutures du dedans de la calotte du Crâne. 1.° Toute la pointe des dents, qui se releve vers le Diploë, cesse de paroître en dedans du Crâne. 2.° La Table

interne qui s'avance du fond de chaque échancrûre, diminüe la longueur des dents du côté de leur racine ; ainsi par ce double moyen, peu-à-peu & avec le temps, les dents se trouvent effacées au dedans du Crâne, il n'y paroît plus de suture, & l'union des os ne s'y fait appercevoir que par des lignes.

On peut facilement s'assûrer de la vérité de ce que je viens de dire ; car dans les Crânes d'un certain âge, après qu'on en a séparé les os, on voit à la surface concave la pointe des dents taillée en talus. Ce talus se remarque encore mieux en rajustant ces os séparés. On voit aussi la Table interne du fond de chaque échancrûre qui s'avance considérablement vers l'os opposé, & le bord de ces avances est très-mince.

La pointe des dents qui appartient à la Table interne, se porte vers le Diploë, & non pas vers le dedans du Crâne, Figure 1. parce que les fibres *A B*, dont la dent *BD* est une continuation, en se déterminant vers le Diploë *D*, affectent plus la ligne droite, au lieu qu'en se réfléchissant en dedans du Crâne *C*, elles feroient un angle *ABC*. Or le suc qui coule continuellement dans ces fibres, tend plûtôt à leur donner la *rectitude*, ou, ce qui est la même chose, à les diriger vers *D*.

On ne peut pas dire que par la même raison la partie de la dent, qui appartient à la Table externe, devroit se réfléchir à l'extérieur du Crâne ; car 1.° la Table externe est plus épaisse que l'interne, ainsi la Table externe des dents d'un os, & la Table externe des échancrûres de l'os opposé se touchent par une plus grande surface que leurs Tables internes. 2.° Les dents ne sont pas pressées, contre les échancrûres qui les reçoivent, aussi fortement à la Table externe qu'à la Table interne. Je pourrois encore assigner une autre cause qui rend l'effort des os, les uns contre les autres, plus grand à leur Table interne qu'à l'externe, c'est l'action continuelle du Cerveau, qui causée par le battement continuel des arteres, oblige la Table interne à s'étendre, & augmente la pression de ce côté-là.

Il arrive ſouvent, par un effet de cette preſſion plus forte à la Table interne qu'à l'externe, que la partie de la dent *BD*, qui s'eſt déterminée vers le Diploë *D*, devient plus longue que la partie de la dent qui eſt à la ſurface convexe. Les fibres de la Table interne d'un os trouvant dans la Table interne de l'os oppoſé beaucoup de réſiſtance à leur allongement, s'allongent d'autant du côté où elles rencontrent moins de réſiſtance. Voilà d'où vient la longueur des pointes qui ſont engagées dans le Diploë.

On ſçait aſſés combien les dents qui forment les ſutures, contribüent à affermir l'union des os; cependant on pourroit dire que ſi les deux Pariétaux, par exemple, étoient ſeulement appliqués l'un contre l'autre, ſans qu'il y eût de dents à leur bord ſupérieur, ils ne pourroient être enfoncés, à moins qu'il n'arrivât fracture, par un fardeau appuyé ſur la ſuture ſagittale, ni par un coup donné ſur la même ſuture ou aux environs (je ſuppoſe que la partie inférieure de ces os ſoit bien retenüe). En voici la raiſon. La Table externe des Pariétaux eſt plus grande que leur Table interne, à cauſe que la calotte du Crâne a plus d'étendüe à ſa ſurface convexe qu'à ſa ſurface concave : ainſi la Table externe d'un Pariétal eſt retenüe par la Table interne de l'autre Pariétal. En effet l'enfoncement ne peut arriver que le bord ſupérieur du Pariétal droit n'avance ſur le côté gauche, & que le bord ſupérieur du Pariétal gauche n'avance ſur le côté droit, d'où il naît un obſtacle à la dépreſſion de la partie ſupérieure des deux Pariétaux. Mais lorſque le Crâne n'a encore que peu d'épaiſſeur, & que la Table interne d'un os eſt, à très-peu de choſe près, auſſi étendüe que l'externe, ſi l'on ſuppoſe que les Pariétaux ne ſe touchent que par un bord tout uni, ils vacilleront, & ne ſe ſoûtiendront pas l'un l'autre, mais les dents d'un Pariétal s'avançant ſur la Table interne du Pariétal oppoſé, & *vice versâ*, aſſujettiſſent le bord ſupérieur des Pariétaux, & s'oppoſent à leur enfoncement. Ce que je viens de dire des deux Pariétaux, regarde tous les os unis par ſuture dentelée.

Pour revenir aux Sutures, les dents qui les composent, ne sont pas toutes de la même longueur. Les petites dents qui ne sont séparées que par de petites échancrûres, disparoissent les premiéres. Plusieurs dents d'une longueur inégale, placées à côté les unes des autres, se confondent, & n'en font plus qu'une d'une largeur considérable, lorsque les interstices qui les séparent, sont remplis. Il se trouve encore des dents beaucoup plus longues que les autres : celles-ci disparoissent plus tard, ou ne disparoissent même jamais entiérement. Toutes ces inégalités donnent à l'union des os, en dedans du Crâne, la figure de lignes irréguliéres.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que s'il ne paroît point de dents à la surface concave du Crâne, ce n'est point pour empêcher, comme on le dit ordinairement, que la Dure-mere ne soit blessée dans les cas de fracture ou d'enfoncement à l'endroit des sutures, mais c'est par une suite nécessaire de la conformation des os du Crâne & de sa figure.

Lorsque les dents de la Table interne sont effacées, & que les sutures ont disparu du dedans du Crâne, les os qui le composent, ne laissent pas encore quelquefois de s'étendre. Le Diploë, en s'épaississant de nouveau, écarte les deux Tables; ces Tables même augmentent en épaisseur : aussi voit-on dans les Sujets d'un certain âge, & sur-tout dans ceux dont les Crânes sont fort épais, que les dents n'occupent pas la moitié de l'épaisseur des os ; ensuite les os s'unissent & se soudent insensiblement ensemble, de sorte que la plûpart des différentes piéces de la calotte du Crâne n'en font plus qu'une. Ils commencent à se souder par la Table interne, parce que la partie interne de la membrane, dont je parlerai dans la suite de ce Mémoire, s'ossifie la premiere; ou, si l'on veut, en attendant une autre cause, on peut dire que le suc osseux tendant toûjours à étendre & à dilater les fibres des os dans le temps même que le Crâne ne peut plus augmenter de volume les surfaces par lesquelles les os se touchent à force de se presser, s'unissent & se soudent ensemble. Or comme la pression de ces os est plus forte à la Table interne qu'à

l'externe, les os commencent à se souder par leur Table interne, ainsi s'effacent jusqu'aux lignes qui en dedans du Crâne distinguoient auparavant les différents os. Peu-à-peu la soudure gagne, pour ainsi dire, de la Table interne vers l'externe, les dents d'un os se soudent avec les dents d'un os voisin, & ce n'est qu'après beaucoup de temps que le suc osseux, en passant & repassant d'un os à l'autre, fait disparoître de la surface convexe du Crâne les marques même des sutures.

Ces observations & les suivantes, que m'a fourni l'examen d'un grand nombre de Crânes, sont aussi assûrées que s'il avoit été possible de les faire toutes successivement sur un même Sujet. On ne peut en vérifier toutes les circonstances, qu'en examinant des Crânes de différents âges, & en séparant avec attention les os qui les composent.

Au reste il paroîtra peut-être que je me suis un peu trop étendu sur la matiére que je viens de traiter; mais si l'on fait attention que personne ne l'avoit encore examinée avec des yeux Physiciens, on verra que j'ai été obligé de peser un peu plus que je n'eusse fait, sur les raisons que j'ai donné. J'eusse encore été beaucoup plus long, si j'eusse voulu suivre la plûpart des Auteurs jusques dans les petits détails de quantité de petites choses où ils sont entrés à l'occasion des Sutures, détails qui quelquefois sont peu justes, souvent inutiles, & toûjours ennuyeux, lorsqu'une saine théorie ne les accompagne pas.

II.

Les os nommés Surnuméraires, Clefs, ou *Ossa Wormiana*, suivent, quand ils se trouvent, la même analogie que les autres os du Crâne. Comme ils font partie de la Voûte du Crâne, ils paroissent plus grands au dehors qu'au dedans, & plus le Crâne où ils se trouvent est épais, plus leur surface interne est petite à l'égard de l'externe. Les dents qu'ils avoient d'abord gravées dans les deux Tables, disparoissent peu-à-peu de l'interne, & leur union avec les autres os ne s'y remarque que comme une ligne. Il leur arrive encore avec l'âge ce qui arrive aux autres os du Crâne, c'est de s'unir avec eux en

dedans, pendant qu'à la surface convexe ils en paroissent encore distingués, de sorte qu'on jugeroit d'abord qu'ils ne pénétrent pas, & qu'ils n'ont jamais pénétré jusques dans la concavité du Crâne. Je ne nie pas pour cela qu'il n'y ait de petits os surnuméraires qui ne s'étendent pas jusqu'au dedans du Crâne.

J'ai vû des os surnuméraires tout-à-fait différents de ces derniers, & dont personne, je crois, n'a encore parlé. Ils paroissent à l'intérieur du Crâne, & ne s'étendent pas jusqu'à la Table externe, il y en a dans beaucoup de Crânes, ils sont placés à l'endroit des sutures. Ils tombent ordinairement quand on démonte les piéces du Crâne, & lorsqu'on remonte ces piéces, on croit, sans y faire trop d'attention, que le vuide, qu'ils ont laissé en se détachant, est causé par la rupture d'une dent.

Il me semble avoir remarqué que dans les petits Crânes les dents disparoissent, & les sutures s'effacent plûtôt que dans des Crânes plus grands & plus étendus. Si cela est, c'est apparemment une suite de la différence qui se trouve entre la surface concave & la surface convexe dans une Voûte plus ou moins cintrée.

III.

L'examen des Sutures vrayes ou dentelées m'a conduit naturellement à l'examen des Sutures fausses ou écailleuses. La différence qui se trouve entre ces deux sortes de Sutures, montre assés que leurs usages doivent être différents. Dans l'une les os s'unissent par le moyen des avances & des enfoncements qui sont à leurs bords : dans l'autre le bord d'un os est appliqué sur le bord d'un autre os, & pour s'ajuster ainsi, ils sont tous les deux taillés en bizeau. Presque tous les Anatomistes ont ou proposé des raisons de cette différence, ou ont adopté quelques-unes des raisons qu'on avoit proposé avant eux ; cependant en les examinant toutes, on sent bien qu'on n'en a point encore trouvé de suffisantes. Celle que je vais proposer, me paroît mieux fondée.

Un fardeau appuyé sur une Voûte où le poids seul de la Voûte

Voûte tend à déjetter en dehors les murs ou les piliers qui la soûtiennent : c'est par une résistance placée en dehors de la Voûte qu'on s'oppose à cet effort. Voilà à quoi servent les murs-boutans & les arcs-boutans.

Un fardeau considérable *A*, placé sur le sommet de la Tête, tend à enfoncer en dedans la suture sagittale *B*, ou, ce qui est la même chose, le bord supérieur *CC* de chaque Pariétal *CD, CD;* cela ne se peut faire que le bord inférieur *D, D,* des Pariétaux ne soit écarté & déjetté en dehors. Un coup donné sur le haut de la Tête fait la même chose. Or, c'est à cet écartement en dehors des bords inférieurs des Pariétaux que s'opposent les Temporaux *FF.* Etant appliqués fortement, comme ils le sont, contre la partie inférieure de chaque pariétal, ils font la fonction de véritables murs-boutans qui retiennent & assujettissent les Pariétaux. Figure 2.

Un effet de la suture dentelée est de contribüer à empêcher que les pieces qui la forment, ne s'enfoncent en dedans, comme je l'ai fait voir plus haut; mais elle ne s'oppose point à leur écartement en dehors; il n'y a que la partie de quelques dents engagée dans le Diploë qui y pourroit faire un obstacle, mais bien foible. Une suture dentelée qui uniroit les Pariétaux avec les Temporaux, résisteroit à une compression faite sur la partie latérale de la Tête, ou à un coup porté sur le même endroit, mais elle ne s'opposeroit pas à l'écartement en dehors causé par un fardeau ou un coup sur le sommet de la Tête, & c'est-là ce que font merveilleusement bien les Temporaux par la portion écailleuse, ou le bizeau qui est à leur bord supérieur, & qui s'applique si parfaitement à l'écaille ou bizeau du bord inférieur des Pariétaux. Ce que je viens de dire de la portion écailleuse de l'os des Tempes se doit également entendre des deux portions écailleuses de l'os sphénoïde, qui s'appliquent de la même maniére sur l'angle antérieur & inférieur de chaque Pariétal.

Pendant que la suture écailleuse s'oppose à l'écartement du bord inférieur des Pariétaux, la suture sagittale qui est dentelée, s'oppose, comme je l'ai dit, à l'enfoncement de

leur bord ſupérieur. C'eſt par ce double moyen que les Pariétaux ſont en état de ſoûtenir des fardeaux auſſi conſidérables que ceux qu'on voit ſur la Tête de quantité de gens; la ſuture ſagittale a même d'autant moins à ſouffrir de l'action d'un fardeau que les Temporaux arc-boutent plus fortement. Si l'on fait attention que dans la ſuture ſagittale, ainſi que dans les autres ſutures dentelées, les dents d'un os ſont appuyées ſeulement ſur la Table interne de l'os oppoſé, laquelle eſt fort mince, & que les dents ont beaucoup moins d'épaiſſeur que le reſte de l'os, on verra combien il importe que la partie inférieure des Pariétaux ſoit ſolidement aſſujettie: ainſi les Temporaux arc-boutants avec force, ſoûtiennent une partie du fardeau appuyée ſur la ſuture ſagittale, & la ſoulagent de cette façon.

A preſent, on peut bien facilement répondre à une queſtion que ſe ſont fait la plûpart des Anatomiſtes, & qui leur a paru ſi embarraſſante. Ils demandent pourquoi la portion écailleuſe des Temporaux recouvre en dehors la portion écailleuſe des Pariétaux, & pourquoi au contraire le bord des Pariétaux n'eſt pas à l'extérieur *.

Figure 2.

Pour que les Temporaux puiſſent faire la fonction de murs-boutans, il faut qu'ils ſoient, pour ainſi dire, inébranlables dans leur ſituation. C'eſt auſſi ce qu'on reconnoît en démontant les piéces d'un Crâne, lorſqu'après avoir ôté les Pariétaux, on tire en dehors le bord ſupérieur des Temporaux encore unis avec l'os occipital & l'os ſphénoïde. On ne ſera point étonné de leur fermeté, en conſidérant de quelle façon chaque os des Tempes eſt engagé & aſſujetti par le moyen de l'Occipital & du Sphénoïde.

Un coup porté ſur le bas des Pariétaux fait tout le contraire d'un coup donné ſur la ſuture ſagittale, ou d'un fardeau appuyé ſur la même ſuture ; il tend à enfoncer en dedans la partie inférieure des Pariétaux, & à déjetter en dehors leur partie ſupérieure. Tout l'artifice dont j'ai parlé, & qui eſt ſi

* *Véſale, lib. 1. cap. 6. Fallope, expoſitio de Oſſibus, cap. 13. Memoires de l'Académie Royale des Sciences de 1720, p. 349. &c.*

propre à empêcher l'effet d'un fardeau ou d'un coup sur le ſommet de la Tête, ne s'oppoſe nullement à l'effet d'un coup donné ſur le bas d'un Pariétal. Voici ce qui réſiſte à un pareil coup.

Le bord ſupérieur du Coronal eſt ſoûtenu pour l'ordinaire par les Pariétaux; mais aux parties latérales du Coronal, on voit la Table interne, qui beaucoup plus longue que l'externe, fait une avance aſſés conſidérable *BC* qui ſoûtient un pareil prolongement *FG* de la Table externe des Pariétaux: ainſi un Pariétal pouſſé vers le dedans par un coup donné à ſa partie inférieure, eſt retenu par cette avance de la Table interne du Coronal. Il y a de plus au bord ſupérieur de l'os des Tempes, entre la portion écailleuſe & la portion pierreuſe, une échancrûre d'une figure particuliére, où s'engage la partie *H* du Pariétal. C'eſt ce qui aſſujettit encore fortement la partie inférieure de ce dernier os. Fig. 3. & 6. Figure 4. Fig. 5. Fig. 5. & 6.

Ce n'eſt pas ſeulement au bord du Coronal & des Pariétaux qu'il ſe trouve des eſpeces d'*avances* & d'*enfoncements*, ou de la Table interne ou de l'externe; la coupe de la plûpart des os n'eſt pas perpendiculaire à l'os. Le bord d'un os a ſouvent deux coupes, de ſorte qu'il s'unit avec ſon voiſin en deux différents ſens; il le ſoûtient, pour ainſi dire, & il en eſt ſoûtenu. Ces coupes ſont plus ou moins obliques, par rapport au corps de l'os. La coupe de la partie ſupérieure *DF*, du bord antérieur de chaque Pariétal qui regarde en-haut, n'eſt pas auſſi apparente que la coupe de la partie inférieure *FG* des mêmes Pariétaux qui regarde intérieurement. Il en eſt ainſi de la double coupe du Coronal *AB*, *BC*, qui s'ajuſte avec celle de chaque Pariétal. La partie ſupérieure du bord de l'os des Tempes qui s'articule avec l'os ſphénoïde regarde en dedans, & la partie inférieur du même bord regarde en bas. La partie du bord de l'os ſphénoïde qui s'articule avec l'os des Tempes a par conſéquent une double coupe, mais en ſens contraire. On n'a fait juſqu'à preſent, ce me ſemble, aucune mention de cette double coupe de la plûpart des os du Crâne, ni de ſes effets, qui ſont Fig. 3. 4. 5. & 6. Fig. 6. Fig. 5. Fig. 3. & 4.

de rendre l'union des os entre eux plus ferme & plus ſolide.

Au reſte, il faut faire remarquer que les dents de la partie inférieure du bord antérieur des Pariétaux ſont tellement diſpoſées avec les dents du Coronal, qu'elles concourrent par leur union à l'action que j'ai attribué aux Temporaux, en empêchant l'écartement en dehors de la partie inférieure des Pariétaux.

I V.

On ne connoît d'autre union entre les différents os du Crâne, que celle qui ſe fait par la différente diſpoſition de leurs bords. On regarde tous les os du Crâne comme des piéces qui ne ſont unies entre elles, que parce que leurs bords différemment configurés s'ajuſtent les uns avec les autres. On ſçait que la plûpart de ces piéces ſe ſoudent enſemble peu à peu dans la vieilleſſe; mais ce qu'on ne ſçait point, c'eſt que toutes ces piéces dans tous les âges n'en ſont véritablement qu'une ſeule; qu'elles ne ſont pas ſeulement appliquées les unes contre les autres, & que dans tout le Crâne, dès le moment de ſa formation, il n'y a pas une ſeule interruption de continuité.

Pour s'aſſûrer de cette vérité qui en a d'abord ſi peu les apparences, il faut avec ſoin enlever le Péricrane deſſus une ſuture, on apperçoit alors la continuité d'un os avec ſon voiſin par le moyen d'une membrane qui eſt placée entre deux, & qui fait partie de l'une & de l'autre. On remarque des filets membraneux qui ſortant du fond des échancrûres, s'implantent dans les dents de l'os oppoſé, & qui lorſqu'on remuë en différents ſens un des os qui forme la ſuture, s'étendent & ſe relâchent. Après avoir détaché exactement la Dure-mere, on apperçoit la même choſe au dedans du Crâne. Tout cela ſe remarque très-bien dans la Tête d'un Enfant mort d'Hydrocephale.

Cela ſe concevra ſans peine, ſi l'on fait attention à la maniére dont ſe forment les différents os du Crâne. Le Crâne dans un Fœtus peu avancé n'eſt qu'une membrane qui ſe métamorphoſe inſenſiblement en os. Un endroit de cette

membrane commence peu à peu à s'offifier; cette offification gagne & fe continuë par des lignes qui partent comme d'un centre de l'endroit où l'offification a commencé. Dans différents endroits de cette calotte membraneufe, commencent en même temps d'autres offifications, qui de même font du progrès & s'étendent. Lorfqu'elles font parvenuës à un certain point, le bord de chaque offification commence à prendre en partie la conformation que le bord de l'os doit avoir par la fuite, & à s'ajufter avec l'offification voifine.

Au bord fupérieur du Pariétal droit, l'offification fe continuë en forme de dents qui gagnent jufqu'à la partie gauche de la calotte membraneufe. L'offification du Pariétal gauche fe continuë de même à fon bord fupérieur par des dents qui gagnent jufque du côté droit dans les intervalles membraneux, que les dents du Pariétal droit en fe formant, laiffent entr'elles. Par là on s'apperçoit, qu'entre les deux Pariétaux, il doit refter une portion de membrane, qui eft interpofée entre le Pariétal droit & le gauche, & qui lorfqu'elle fera offifiée ne fera plus qu'un os de deux Pariétaux.

Au refte, on ne doit pas être plus étonné de trouver entre les deux Pariétaux, par exemple, une portion membraneufe, que d'en trouver entre les pieces offeufes de l'Occipital d'un Fœtus. Quand on leve avec adreffe dans un Enfant la Dure-mere & le Péricrane à l'endroit de la Fontanelle, ne voit-on pas une membrane qui eft continüe avec les deux Pariétaux & le Coronal, laquelle fait partie de ces trois os, & qui s'offifie avec l'âge? on n'apperçoit point d'autre différence entre ces différentes portions membraneufes, fi ce n'eft que les unes s'offifient très-promptement, & les autres avec plus ou moins de lenteur. Les membranes qui féparent les piéces offeufes de l'Occipital d'un Fœtus, s'offifient peu après la naiffance; celle qui fe trouve à la Fontanelle difparoît, excepté à l'endroit des futures, à trois ou quatre ans plus ou moins. Il en eft de même de la membrane qui fépare en deux le Coronal, & qui cependant quelquefois fubfifte jufqu'à la vieilleffe. Celle qui eft

entre les deux Pariétaux, ainsi que celles qui sont entre les os du Crâne & de la face, s'ossifient presque toutes dans un âge avancé, les unes plûtôt, les autres plus tard.

Je n'ai jamais observé cette membrane avec plus de plaisir que dans l'endroit des sutures écailleuses. On y découvre que cette membrane est composée de deux lames, de même que le Crâne est composé de deux Tables. Après avoir emporté le Péricrane de dessus la suture écailleuse du Temporal avec le Pariétal, vous voyés de la portion écailleuse de l'os temporal partir, pour ainsi dire, une membrane qui va former la Table externe du Pariétal. En dedans du Crâne, après avoir emporté la Dure-mere, on voit une membrane continüe à la Table interne du Temporal, & à la portion écailleuse du Pariétal.

Cette observation, aussi-bien que quelques autres, prouve que les portions écailleuses des os ne sont pas formées par les deux Tables.

V.

En examinant le Crâne de plusieurs Fœtus de différents âges, il m'a paru que les fibres osseuses, qui s'étendent du milieu de l'os comme d'un centre vers sa circonférence, & qui étant unies ensemble par le moyen de petites fibres transverses, forment les Mailles dont parle M. Malpighi, il m'a paru, dis-je, que ces fibres sont composées de petites lames appliquées les unes sur les autres, à peu-près comme les écailles des Poissons. L'éxistence de ces lames est prouvée, parce qu'on les apperçoit dans les Crânes qui se décomposent par une longue exposition aux injures de l'air, & dans les os qui s'exfolient ; mais, comme je viens de le dire, on les peut encore observer dans les os du Crâne d'un Fœtus peu avancé, lorsqu'ils sont tous nouvellement débarrassés des autres parties, ou qu'on les a un peu laissés dans l'eau. En courbant alors légerement ces os suivant la longueur de leurs fibres, on voit ces petites lames qui se soûlevent & s'écartent les unes des autres par une de leur extrémité.

VI.

Il y a dans le Crâne des choses qui sont sensibles, qui sont de conséquence, qui ne demandent que des yeux pour être apperçûës, & qui ont, je crois, échappé à tous les Anatomistes. Telle est la différence qui se trouve presque toûjours entre les deux trous par où les jugulaires communiquent avec les sinus latéraux, ainsi qu'entre les fosses où est logée la tête des mêmes jugulaires. Ce trou & cette fosse sont souvent du côté droit une ou deux fois plus grands que du côté gauche. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter la vûë sur plusieurs Crânes. Cette inégalité dans les trous & les fosses des deux jugulaires internes est une suite d'une observation qu'a fait M. Morgagni sur un Sujet [a], & qui m'a paru constante; c'est que le sinus latéral droit est plus large, & contient plus de sang que le gauche; ainsi le sang du sinus latéral droit, pour entrer dans la jugulaire droite, a dû se conserver un passage plus grand dans le Crâne que celui du gauche. L'inégale quantité du sang dans les deux sinus latéraux, vient de ce que le sinus longitudinal supérieur, comme l'a entrevû M. Vieussens, & comme le trajet de ce sinus, qui est gravé sur les os, le fait appercevoir même dans les Crânes décharnés, ne se divise pas également dans les deux sinus latéraux. Ce sinus décharge le sang qu'il contient dans le sinus latéral droit, ainsi que l'a parfaitement bien developpé [b] l'illustre M. Morgagni, & le gauche n'en reçoit qu'une médiocre quantité par une, ou deux, ou quelquefois trois petites communications qu'il a ordinairement avec le droit.

Comme il se trouve dans quelques Sujets que le sinus longitudinal supérieur se décharge également dans les deux sinus latéraux; alors le diametre des jugulaires & des trous par où elles prennent naissance est égal du côté droit & du côté gauche. Quand le sinus longitudinal se détourne dans le sinus latéral gauche, comme il arrive très-rarement, puisque

[a] *C'est dans l'explication de la premiére Figure de la premiére Planche de ses sixiémes Adversaires.*

[b] *Adversaria VI. animadvers. 1.*

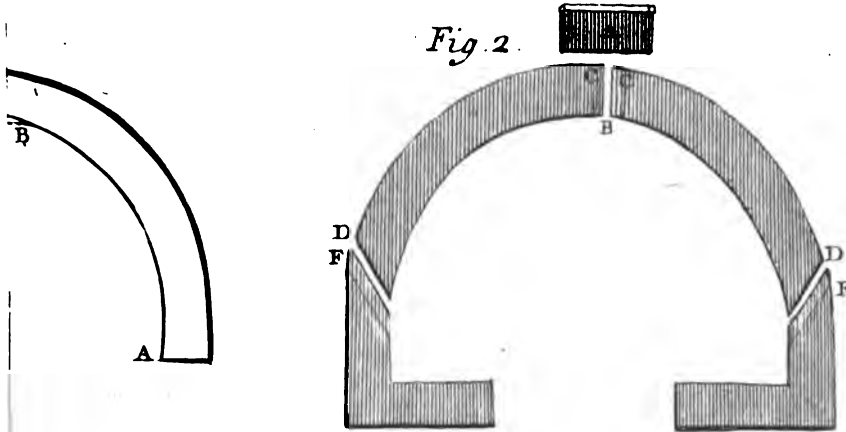
dix Sujets ouverts exprès n'en ont fourni à M. Morgagni qu'un seul exemple, c'est du côté gauche que le sinus, la jugulaire, la fosse & le trou sont plus grands.

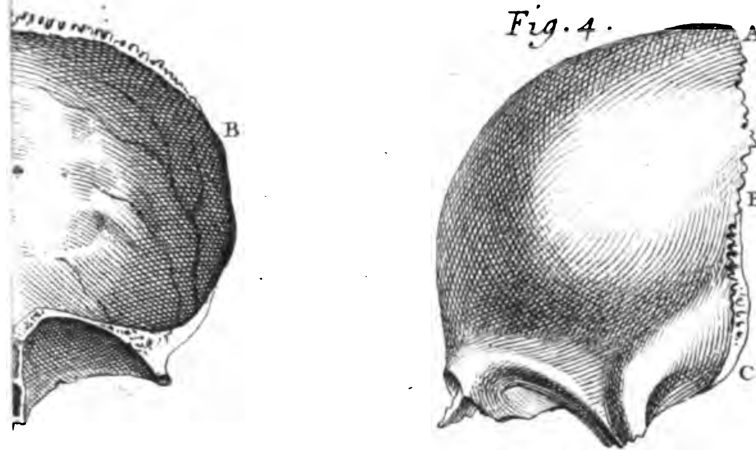
Cette différence entre ces parties du côté droit & du gauche, avec quelques autres raisons, m'ont fait dire, il y a long-temps, qu'il y a de la différence entre la saignée qu'on fait à la jugulaire droite, & celle qu'on fait à la gauche.

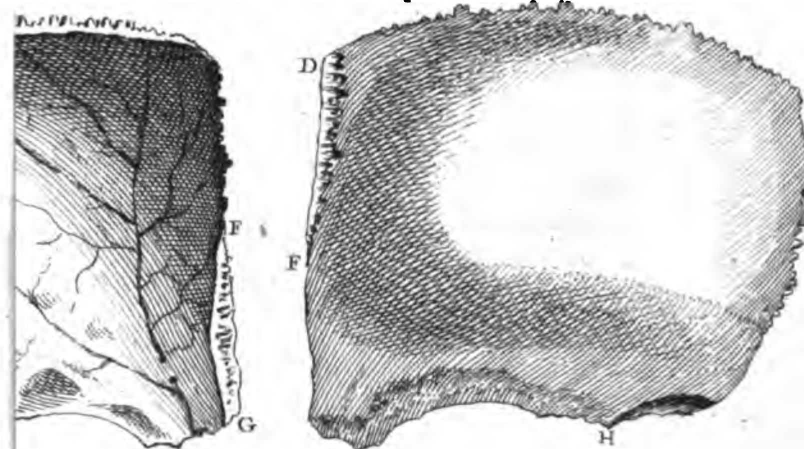
VII.

Je crois qu'on peut retrancher du nombre des os qu'on compte ordinairement dans la Tête, les deux cornets inférieurs ou les lames spongieuses inférieures du nés. Il m'a souvent paru que ce ne sont point des os particuliers, mais des portions de l'os ethmoïde. Je les ai vû attachés à l'os ethmoïde dans des Têtes de différents âges, chacun par une lame dont la figure est souvent différente, & qui quelquefois est percée. Ces lames descendent de devant en arriére, & vont de la partie antérieure latérale de l'os ethmoïde au bord supérieur des cornets inférieurs. J'ai des os ethmoïdes séparés du reste de la Tête, ausquels les cornets inférieurs sont restés attachés. Comme les lames osseuses qui font cette union sont très-minces & très-fragiles, on les casse presque toûjours, & d'autant plus facilement qu'ils sont retenus avec l'os maxillaire par leur apophise en forme d'oreille qui est engagée dans le sinus maxillaire. Les cornets inférieurs se soudent avec l'os du Palais, & ensuite avec l'os maxillaire, mais cette union ne les doit pas faire regarder comme faisant partie de l'un ou de l'autre de ces os. Presque tous les os qui se touchent, s'unissent & se soudent ensemble avec l'âge, les uns plûtôt, les autres plus tard. Une piéce osseuse peut être regardée comme un os particulier, lorsque dans l'âge où les os sont bien formés, on ne trouve point entr'elles & les piéces voisines une continuité non interrompuë d'ossification.

Pour avoir un os ethmoïde auquel les cornets inférieurs restent attachés, je choisis une Tête où ces cornets ne soient point encore soudés avec les os du Palais & les os maxillaires. J'ouvre le sinus maxillaire par sa partie externe, je détruis







Ph. Simonneau Sculp.

le bord de l'os maxillaire sur lequel l'oreille du cornet inférieur est appliquée. Pour ne point en même temps détacher le cornet de l'os ethmoïde, il faut un peu d'adresse & de patience, & avec cela ne réüssit-on pas toûjours. L'oreille du cornet étant ainsi dégagée, on ôte l'os maxillaire que suit ordinairement l'os du Palais, & le cornet reste attaché à l'os ethmoïde.

Au reste, il n'est pas besoin de cette préparation, si l'on veut seulement s'assûrer de la continuité des lames spongieuses inférieures avec l'os ethmoïde; il ne faut que consulter des Têtes où il n'y a rien de détruit, on verra presque toûjours que du bord supérieur de chaque cornet inférieur s'éleve une lame qui va s'attacher à l'os ethmoïde, & lorsque les cornets inférieurs sont séparés de l'os ethmoïde, on apperçoit sur leur bord supérieur de petites éminences osseuses qui ne paroissent être que les restes de la lame rompüe.



REMARQUES

Sur un Ecrit de M. Davall, *qui se trouve dans les Transactions Philosophiques de la Societé Royale de* Londres, *n.° 402, an. 1728, touchant la comparaison qu'a fait M.* Delisle, *de la grandeur de* Paris *avec celle de* Londres, *dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1725, page 48.*

Par M. DE MAIRAN.

UN des principaux motifs de feu M. *Delisle* dans ce qu'il nous a laissé sur l'étenduë des grandes Villes, étoit de concilier ou d'éclaircir quelques observations Astronomiques, dont le résultat pouvoit devenir assés différent, par la différence des lieux où elles auroient été faites, quoique dans l'enceinte d'une même Ville. C'est ce dont il nous avertit dès le commencement de cette recherche, de l'*utilité* de laquelle il donne des preuves & des exemples. Après cela, M. *Delisle* compare entr'elles quelques-unes des Villes, tant anciennes que modernes, dont la grandeur nous est connüe, soit par observation, soit par le témoignage des Auteurs qui en ont parlé, telles qu'*Alexandrie, Rome, Babylone, Bysance, Ispahan, le Caire, Londres,* &c. *Paris* qui nous intéresse plus qu'aucune autre Ville du monde, lui sert de base & de terme de comparaison, par rapport aux autres, & sur-tout par rapport à la Ville de *Londres ;* il fait, comme on le sçait, celle-ci plus petite que *Paris,* tout au moins d'une vingtiéme partie. C'est sur le Plan de *Morden,* qu'il s'est reglé, & plus encore sur des dimensions très-exactes qu'il avoit reçû de *Londres* même. Cette fameuse Ville nous fournit tous les jours de bien plus dignes sujets d'émulation que celui que pourroit faire naître l'étenduë de ses murailles : elle n'a pas dédaigné cependant ce leger avantage, & elle a trouvé dans

la *Société Royale* qu'elle renferme, & en la personne de M. *Davall* un défenseur contre la décision de M. *Delisle*. Selon M. *Davall*, non seulement ce vingtiéme de plus attribué à l'étendüe de *Paris* s'évanoüit, mais il suit du calcul même de M. *Delisle* & d'une erreur de fait où il paroît être tombé, que *Londres* doit être plus grand que *Paris*, d'environ la quatorziéme partie.

On ne peut disconvenir que M. *Delisle* ne se soit mépris, en énonçant la méthode qu'il a suivie pour dresser son Plan de *Paris*, & pour faire la comparaison de cette Ville avec celle de *Londres*; mais après avoir éxaminé son Mémoire, & le Plan dont il s'agit, il me paroît évident que sa méprise ne tombe que sur son énoncé, & non sur ses opérations, ou sur les conséquences qu'il en a tirées; & partant que la conclusion de M. *Davall*, en ce qu'elle a de favorable à l'étendüe de *Londres*, ne suit nullement de l'erreur qu'il a reprochée à M. *Delisle*. C'est là tout ce que je me propose de prouver dans ces Remarques. Outre que l'on sera peut-être curieux de sçavoir sur quoi roule la difficulté, il m'a semblé que nous ne pouvions refuser un tel éclaircissement à la mémoire du sçavant Géographe que cette question intéresse.

M. *Delisle*, après avoir donné le détail de la Méthode qu'il avoit suivie pour tracer le Plan de Paris qu'il publia en 1716, & qui est le même dont il s'est servi pour déterminer la grandeur de cette Ville, méthode toute géométrique, & bien différente en cela de la plûpart de celles qu'on avoit employé jusqu'alors, ajoûte qu'il en lia les parties ou les triangles avec les Observations éxactes de M.[rs] de l'Observatoire pour la description de la Méridienne de France. Il n'oublia pas de tracer « cette Méridienne à travers la Ville, ce qui le mit en état, « dit-il, après les précautions rapportées ci-dessus, de diviser « l'étendüe de la Ville par Méridiens & par Paralleles, comme « on fait sur une Carte générale, ce qui sert à indiquer à quelle « portion du Ciel les différentes parties de cette Ville répondent. »

Jusques-là M. *Delisle* rapporte fidellement ce qu'il a fait en traçant sa Carte de *Paris*, & cette Carte en est la preuve.

Mais voici où sa mémoire ne l'a pas servi de même, comme le prouve encore la même Carte.

» J'y ai tracé les Paralleles de 15 en 15 secondes, & les » Méridiens de 20 en 20 secondes; & comme sous le Parallele » de *Paris* 15 degrés de Latitude en valent 20 de Longitude, » & qu'il en est ainsi des minutes & des secondes, en donnant » 5 minutes de plus à l'intervalle des Méridiens qu'à celui des » Paralleles, je me suis fait des Quarrés parfaits.

Ce qu'il y a de faux dans cet énoncé, c'est que sous le Parallele de *Paris* 15 degrés de Latitude ne vaillent que 20 degrés de Longitude ; ils en valent près de 23 : c'est ainsi que le donne la *Regle* si connüe, du Sinus du complément de Latitude, &c. Mais il y a grande apparence que M. *Delisle,* au lieu du complément, aura pris ici la Latitude même, qui à l'égard de *Paris,* étant introduite dans l'Analogie au lieu de son complément, répondroit en effet à environ 20 degrés ou 19 $\frac{11}{12}$ de Longitude pour 15 de Latitude. Il ne faut pour cela qu'avoir regardé à droite à l'ouverture des Tables des Sinus, au lieu de regarder à gauche. Voilà, dis-je, vrai semblablement la source de l'erreur que M. *Davall* a relevée, & qui lui a fait tirer des conclusions si favorables à l'étendüe de *Londres.* Ecoutons-le lui-même : je ne sçaurois mieux mettre le Lecteur au fait de ce calcul, & du raisonnement qu'il fournit à M. *Davall,* qu'en rapportant ses propres paroles.

» En lisant ce Mémoire de M. *Delisle*, dit-il, après avoir » transcrit l'énoncé qu'on vient de voir, je me suis d'abord » apperçû, que la méthode qu'il a suivie pour comparer l'éten- » düe de *Paris* avec celle de *Londres*, & par laquelle il conclut » que la premiére de ces deux Villes est d'un vingtiéme plus » grande que l'autre, est fondée sur une fausse hypothese; sça- » voir, que sous le Parallele de *Paris* 20 degrés de Longitude » sont égaux à 15 de Latitude, & par conséquent, que si l'on » trace les Méridiens de 20 en 20 secondes, & les Paralleles » de 15 en 15, les figures données par leurs intersections » seront des Quarrés parfaits : car l'Equateur & ses Paralleles » sont entre eux comme les Sinus de leurs distances respectives

du Pole. D'où il suit que comme le Rayon ou Sinus de 90 «
degrés est au Sinus de la distance d'un parallele quelconque «
du Pole, ou au Sinus du complément de la Latitude : ainsi «
le degré donné de l'Equateur, ou d'un grand Cercle quel- «
conque, est à la portion semblable du Parallele donné. Pre- «
nant donc la Latitude moyenne de *Paris* de 48° 51′, le «
rapport des degrés d'un grand Cercle à ceux du Parallele de «
Paris sera, par les Tables des Sinus, comme 10000000 «
est à 6580326 ; au lieu que selon M. *Delisle* ce rapport «
n'étant seulement que comme 20 & 15, ou comme 100 & «
75, il suit que les figures que M. *Delisle* appelle des Quarrés, «
n'en sont point, mais des Rectangles, dont le plus grand côté, «
qui contient 15 secondes d'un grand Cercle, se trouve dans «
la même proportion avec le plus petit, qui contient 20 se- «
condes du Parallele de *Paris*, que 750 &c. avec 658 &c. «
ou à peu-près comme 8 à 7; & que les intervalles qu'il «
devroit avoir donné en compensation aux Méridiens pour «
faire de ces figures des Quarrés parfaits, devroient avoir été «
$\frac{15 \times 100}{658}$ &c. secondes, ou approchant de 22″ $\frac{4}{5}$, ou 22″ «
48‴ du Parallele de *Paris*. «

Or « continüe M. *Davall* » M. *Delisle* dit que ces figures «
sont des Quarrés parfaits, & qu'il les a calculées comme des «
Quarrés, dont le côté étoit de 15″ d'un grand Cercle, & selon «
lui *Paris* contient 63 de ces Quarrés, qui font 3538647 «
toises quarrées, lequel nombre étant divisé par 63, le quo- «
tient 56196 sera le nombre de toises quarrées contenües «
dans chaque Quarré, dont la racine donne 237 toises pour le «
côté de chacun d'eux, ce qui fait tout juste 15″, ou $\frac{1}{240}$ de «
degré d'un grand Cercle. «

M. *Delisle* a donc fait par cette supputation « conclut M. «
Davall » la superficie de chaque rectangle*, & par conséquent «
celle de toute la Ville de *Paris* trop grande d'environ $\frac{1}{7}$. «

* Il faut entendre *de chaque quarré*, car autrement la supputation de M. *Delisle* pourroit être juste.

Tout ce raisonnement se réduit, si je ne me trompe, à ceci.

1.° Que M. *Delisle* a pris ou tracé un Plan de *Paris*, tel qu'il devoit être dans toutes ses dimensions.

2.° Qu'il a divisé ce Plan par des Quarrés, au lieu de le diviser par des Rectangles.

3.° Que ces Quarrés se trouvent plus petits que n'auroient été les Rectangles ; d'où il suit, que l'aire totale de *Paris* contient un plus grand nombre de ces Quarrés qu'elle n'auroit contenu de Rectangles.

4.° Que malgré le trop de petitesse de chacun de ces Quarrés, M. *Delisle* les a évalués au même nombre de toises quarrées, que celui qu'auroit contenu réellement chaque Rectangle.

D'où il suit enfin, que l'aire totale de *Paris* résultante de la somme de ces Quarrés, se trouve plus grande qu'il ne faut d'une quantité, qui a le même rapport à sa véritable aire, que celle de chaque Rectangle à chacun de ces Quarrés.

Pour répondre à l'objection, il ne s'agit que d'éclaircir, & de prouver ce que nous avons déja avancé, que l'erreur reprochée à M. *Delisle*, n'est que dans l'exposé de sa méthode, & nullement dans la méthode même, ni dans les résultats.

Car 1.° c'est sur sa Carte de *Paris* déja faite, & publiée en 1716, augmentée seulement peut-être de quelques additions pour les nouveaux bâtiments, que M. *Delisle* a calculé & déterminé l'étendüe & la superficie de *Paris*, & qu'il l'a comparée avec l'étendüe de *Londres*. Il n'y a qu'à lire son Mémoire pour s'en convaincre.

2.° Cette Carte de *Paris*, qui est en effet divisée par Méridiens de 20 en 20 secondes, & par Paralleles de 15 en 15, ne contient point des Quarrés parfaits résultants de l'intersection de ces deux sortes de Cercles, mais des Rectangles tels que M. *Davall* dit qu'ils doivent être, & dont le grand côté, de 15 secondes en Latitude, se trouve sur les Méridiens, & le petit qui n'est que de 20 en Longitude, sur les Paralleles. Il ne faut encore pour cela que jetter les yeux sur le Plan* de M. *Delisle*. On y verra que les côtés des Rectangles dont je parle, étant comparés entre eux, sont à peu-près dans le rapport de 7 à 8, comme le demande M. *Davall*. Il y a plus, les secondes sont tracées & numérotées sur le bord du Plan,

* Il se trouve avec ses autres Cartes sur une feüille de même grandeur.

comme le sont les degrés sur la plûpart des Cartes géographiques : sçavoir, les secondes en Longitude, & dont 20 forment le petit côté du Rectangle, sur les deux Paralleles qui terminent la superficie de cette Carte au Septemtrion & au Midi ; & les secondes en Latitude, dont 15 forment le grand côté, sur les deux Méridiens qui la terminent à l'Orient & à l'Occident ; & avec une telle justesse, que si l'on porte le Compas sur un de ces Méridiens, à 15 secondes d'ouverture, & qu'on l'applique ensuite sur l'un des Paralleles gradués & divisés en secondes de Longitude, on trouvera que 15 secondes du Méridien répondent sensiblement à 22″ ½ du Parallele. Ce qui est, comme l'on a vû, la portion réciproque que M. *Davall* leur donne.

Donc si M. *Delisle* a calculé l'étendüe de *Paris* sur de pareils Rectangles, il l'a très-bien calculée, & il n'y a point d'erreur dans son opération.

Mais, répondra-t-on, M. *Delisle* dit positivement qu'il a calculé l'étendüe de *Paris* non sur des Rectangles, tels que ceux qu'on vient de décrire, mais sur des Quarrés parfaits ?

Je replique, qu'il est moralement impossible que M. *Delisle* ait pratiqué dans le temps, ce que par un défaut de mémoire, & par inadvertance, il a rapporté dans la suite d'une maniére si peu fidelle. Il est, dis-je, impossible qu'ayant sous ses yeux sa propre Carte, dont les principales dimensions lui étoient connuës par voye géométrique, ou par des mesures immédiates, il l'ait couverte de ces prétendus Quarrés, malgré les Rectangles qu'il y voyoit, qu'il en ait déduit des résultats qui ne pouvoient manquer de la défigurer dans toutes ses parties, & qu'il ait démenti grossiérement sa premiére graduation, son échelle de 500 toises, & les distances qu'il avoit déterminées par ses triangles.

Que M. *Delisle* ait appellé des Quarrés ces Rectangles mêmes de sa Carte gravée que nous avons entre les mains, c'est ce qui est encore évident par les paroles qui suivent son énoncé. *Les Quarrés chiffrés*, ajoûte-t-il, *m'ont servi de renvoi à une Table alphabétique, qui fait trouver tout d'un coup la situation*

des ruës dont on ne sçait que le nom ; mais ce n'étoit pas là le principal usage que j'en voulois faire. C'étoit de comparer par le moyen de ces quarrés la grandeur de Paris *à celle de* Londres. La Carte où les ruës sont indiquées est donc la même qui a servi à comparer la grandeur de *Paris* à celle de *Londres.* Donc M. *Delisle* s'est mal expliqué seulement, quand il a appellé des Quarrés, ce qui réellement & de fait n'étoit sur sa Carte que des Rectangles.

J'avoüe qu'on auroit de la peine à donner raison d'une telle méprise, mais quelque extraordinaire qu'elle paroisse, elle devient cependant moins difficile à concevoir, dès qu'on sçait que M. *Delisle* n'a pû voir imprimer son Mémoire, & que par conséquent il a pû ne le pas relire ou retoucher avec la nouvelle attention qu'inspire presque toûjours, & avec raison, à un Auteur, l'idée de l'impression.

Car M. *Delisle* mourut le 25 Janvier 1726, comme on l'apprend dans son Eloge; & je puis prouver, tant par les dates qui sont à la tête des Mémoires de 1724, & 1725, que par d'autres circonstances, dont j'ai retenu la note, que nos premiers Mémoires de 1725, parmi lesquels se trouve celui de M. *Delisle,* ne furent donnés à l'Imprimerie, tout au plûtôt, que vers le commencement du mois d'Août de l'année 1726, c'est-à-dire, plus de 6 mois après sa mort.

C'est donc un ouvrage posthume que le Mémoire de M. *Delisle;* & l'on n'ignore pas quelle indulgence cette qualité doit concilier à son Auteur.

J'ai montré, si je ne me trompe, que l'inadvertance de M. *Delisle* n'empêchoit pas qu'on n'eût tout lieu de croire ses résultats conformes à la vérité. Mais M. *Davall* a-t-il pû, ou dû entrer dans cette discussion; & faut-il l'accuser de trop de sévérité, quand il a pris pour des Quarrés, ce que M. *Delisle* lui-même appelle des Quarrés dans son Mémoire? Enfin a-t-il vû la Carte de cet Auteur, sur laquelle rouloit principalement, & la détermination qu'il fit de l'étendüe de *Paris,* & la comparaison de cette Ville avec *Londres!* on en jugera par cette instance de M. *Davall* même.

» Pour

Pour confirmer ce que je dis, & le mettre hors d'atteinte, «
nous avons M. *Delisle* lui-même pour témoin, qui, dans le «
plan de *Paris*, qu'il a fait graver, & qu'il a publié lui-même, «
& auquel il renvoye dans ce même Mémoire, n'a nulle- «
ment fait des Quarrés des figures ci-dessus mentionnées; mais «
il a donné à leurs côtés entr'eux le rapport de 8 à 7, qui «
est aussi approchant de leur vraye proportion qu'on puisse «
l'exprimer par lignes dans un Plan de la grandeur de celui-ci. «

Voilà, je l'avoüe, ce qui me paroît difficile à concilier. Il faut que M. *Davall* ait conçu que M. *Delisle* laissant là son Plan de *Paris*, le seul cependant dont il ait fait mention dans son Mémoire, & qu'il ait jamais donné, en a tracé tout exprès un autre sans égard au premier, tout différent, & même tout contraire, dans l'unique dessein de faire la comparaison de *Paris* avec *Londres*. Mais il n'y avoit, comme je l'ai déja remarqué, qu'à lire la suite de l'énoncé de M. *Delisle*, pour se convaincre que le Plan sur lequel il avoit mesuré l'étendüe de *Paris*, pour la comparer à l'étendüe de *Londres*, étoit celui-là même où l'on avoit vû les Rectangles.

Ce que je comprends encore plus difficilement, c'est la conclusion que tire M. *Davall* de la fausse hypothese de M. *Delisle*, en faveur de l'étendüe de *Londres*. Car voici comment il raisonne :

Or est-il que dans le Mémoire que nous venons d'exa- «
miner, M. *Delisle* avoüe lui-même qu'en mesurant *Londres*, «
il a tracé des Quarrés, qui contiennent 15 secondes d'un grand «
Cercle, & dont il dit que *Londres* contient 60. Donc, & par «
les raisons précédentes, pour comparer *Paris* avec *Londres*, «
nous devons retrancher des 63 Rectangles que *Paris* contient, «
une quantité en raison de 8 à 7; mais parce qu'elle est un «
peu au de-là de la véritable, faisons seulement ce retranche- «
ment dans le rapport de 9 à 8, qui est un peu plus petit «
qu'il ne faut. Par-là le nombre des Quarrés contenus dans «
Paris, & dont le côté est 15 secondes d'un grand Cercle, sera «
réduit au rapport de 63 à 56. Et par conséquent selon la «
maniére même de mesurer de M. *Delisle*, la grandeur de «

» *Londres* ſera à celle de *Paris* comme 60 eſt à 56, ou comme
» 15 eſt à 14, c'eſt-à-dire, que *Londres* ſera plus grand que
» *Paris* d'un quatorziéme.

Comment conçoit-on que M. *Deliſle* meſurant l'étendüe de *Londres* ſur le même pied qu'il a meſuré l'étendüe de *Paris,* le rapport de grandeur entre ces deux Villes ne ſe trouve pas le même, quelle que ſoit la méthode qu'il y a employée? n'eſt-ce pas, dans le cas préſent, comme s'il s'étoit ſervi d'une toiſe de 5 pieds, au lieu d'une toiſe de 6 pieds? Il en réſultera une ſurface abſolüe plus grande ou d'un plus grand nombre de toiſes qu'il ne faut pour *Paris,* & pour *Londres*, mais les ſurfaces relatives & leurs rapports ne demeureront-ils pas les mêmes? M. *Deliſle* a dit expreſſément dans ſon Mémoire, & M. *Davall* n'a pas oublié de le rapporter, qu'*il avoit mis le Plan de* Londres *ſur la même échelle que celui de* Paris. Qu'*il y avoit tracé de même des Quarrés de 15 en 15 ſecondes d'un grand Cercle, & qu'alors il s'étoit trouvé en état de comparer immédiatement la grandeur de ces deux Villes.* Voilà donc une meſure commune, & par conſéquent un rapport de grandeur toûjours le même. Mais tâchons de démêler encore, s'il eſt poſſible, les ſuites que peut avoir eu cette méthode, en la prenant ſelon la derniére rigueur.

M. *Deliſle* ne parle pas de la quantité de ſecondes en Longitude qu'il a données à la portion des petits Cercles ou des Paralleles de *Londres*, relativement aux 15 ſecondes de Latitude qu'il a pris ſur les Méridiens ou grands Cercles. Ce qui, en ſuppoſant toûjours la fauſſe hypotheſe des Quarrés, peut être entendu de pluſieurs maniéres, mais dont aucune cependant ne favoriſe la conſéquence tirée par M. *Davall.*

Suppoſons premiérement que M. *Deliſle* a attribué 20 ſecondes au côté du Quarré qui exprime les degrés de Longitude du Parallele de *Londres*, en donnant le même intervalle aux Méridiens du Plan de cette Ville, qu'il avoit donné à ceux du Plan de *Paris.* C'eſt là tout ce qu'on peut imaginer de plus rigoureux d'après ſon ſilence là-deſſus, & en vertu de l'identité de méthode & d'échelle qu'il dit avoir employées pour les

deux Plans. Mais en ce cas, bien-loin que la conséquence de M. *Davall* soit juste, & que celle de M. *Delisle* soit peu favorable à l'étendüe de *Londres*, il suit que *Londres* a réellement beaucoup moins de surface par rapport à *Paris*, que M. *Delisle* ne lui en avoit donné. Car *Londres* étant plus septemtrional que *Paris*, d'environ 2° 40', son Parallele contiendra des degrés de Longitude plus petits, en raison des Sinus de complément des deux Latitudes, ou à peu-près de 17 à 18. Donc selon le calcul & le raisonnement qu'a fait M. *Davall* à l'égard de *Paris*, & qu'en rigueur, on doit faire de même à l'égard de *Londres*, il faudra que 15 secondes d'un grand Cercle répondent encore à un plus grand nombre de secondes du Parallele de *Londres*, qu'elles ne faisoient à l'égard du Parallele de *Paris*. Si l'on formoit donc, comme il le demande, des Rectangles dont le côté supérieur contînt 20", l'autre côté qui lui est perpendiculaire, & auquel il en faut donner 15 d'un grand Cercle, devroit avoir un plus grand rapport avec lui sur le Plan de *Londres*, que sur le Plan de *Paris*. Ou si enfin l'on tombe dans l'erreur de ne donner à ce second côté que la longueur de celui de 20" du Parallele, comme on suppose qu'il avoit été pratiqué à l'égard de *Paris*, & que ces figures deviennent des Quarrés parfaits, ces Quarrés seront relativement encore plus défectueux par leur petitesse à l'égard de *Londres*, qu'ils ne l'étoient à l'égard de *Paris*. Donc la surface de *Londres* en contiendra un plus grand nombre qu'elle n'auroit contenu de Rectangles; donc si l'on évalüe la surface de chacun de ces Quarrés en toises quarrées, sur le même pied que les Rectangles, & comme s'ils n'étoient pas défectueux, & que de leur somme on en déduise la surface totale de la Ville de *Londres*, cette surface paroîtra plus grande qu'elle n'est réellement, & plus encore que n'avoit paru celle de *Paris*; en raison inverse des Sinus du complément de Latitude de ces deux Villes, c'est-à-dire, comme 18 est à 17. Donc l'erreur de M. *Delisle* doit avoir plus influé sur l'étendüe de la Ville de *Londres* en excès, qu'elle n'avoit fait sur l'étendüe de la Ville de *Paris*, d'environ $\frac{1}{18}$. Nous

évaluons toûjours ici les degrés des Paralleles, de même que ci-dessus, sur l'hypothese de la Terre sphérique, & non sur le pied de celle du sphéroïde oblong, ou applati.

Secondement, si l'on veut que M. *Delisle*, ayant eû égard à la Latitude de *Londres*, ait transporté sur les Quarrés qui résultent de l'intersection des Méridiens, & des Paralleles tracés sur le Plan de cette Ville, une erreur proportionnelle à celle qui lui est reprochée touchant la dimension de *Paris ;* (car enfin il ne seroit pas raisonnable de penser que M. *Delisle* ne sçavoit pas que la Latitude de ces deux Villes est différente, & que *Londres* étant plus éloigné de l'Equateur que *Paris,* les degrés de Longitude de son Parallele, devoient être en moindre raison avec ceux de l'Equateur, & qu'il en falloit un plus grand nombre pour égaler la longueur de 15 degrés d'un grand cercle ; & il n'y a point d'équivoque qui puisse l'avoir fait tomber dans cette méprise :) si l'on fait, dis-je, cette supposition, le rapport conclu par M. *Delisle* demeure dans son entier, & il faut dire avec lui que *Paris* est plus grand que *Londres* d'un vingtiéme, sans y comprendre les Jardins considérables & les grands Enclos de ces deux Villes, ou d'un sixiéme, en y comprenant les grands Jardins, & les grands Enclos.

Que faudroit-il donc pour conclurre de l'énoncé, & de la méthode de M. *Delisle,* que *Londres* est plus grand que *Paris* d'une quatorziéme partie? rien de moins que de faire opérer ce sçavant Géographe d'une maniére toute différente de celle qu'il dit qu'il a fait, & la plus extravagante du monde. Il faudroit lui faire diviser le Plan de *Londres* en Rectangles convenables, tandis qu'il n'auroit divisé le Plan de *Paris* qu'en Quarrés défectueux ; ou, si l'on veut, qu'il ait divisé le Plan de *Londres* en des Quarrés, dont l'un des côtés pris sur un grand Cercle ou sur le Méridien, soit, comme il dit, de 15", il faut que l'autre côté, qui fait partie du Parallele, réponde nécessairement, & quoiqu'ait voulu faire M. *Delisle,* au nombre de secondes en Longitude que doit comporter ce Parallele, sçavoir à environ 24" 6"'. Car par ce moyen chaque partie

de la surface de *Londres* contenant un plus petit nombre de ses Quarrés, que pareille portion de la surface de *Paris* ne contient des siens, & attribuant à chaque espece de Quarré la même aire, & le même nombre de toises, il sera possible que *Londres* paroisse être plus petit que *Paris*, quoique réellement plus grand. En un mot, il faut faire opérer M. *Delisle* sur son Plan de *Paris*, dont la seule inspection devoit le redresser, de la maniére la plus inusitée, & la plus fautive, & lui faire ensuite mesurer l'étenduë de *Londres*, selon toutes les regles de l'Art. C'est-là aussi sans doute ce qu'a prétendu M. *Davall*; puisque, comme on a vû, des 63 Quarrés que M. *Delisle* donne à l'étendüe de *Paris*, il en retranche 7, & les réduit à 56, & qu'il n'ôte rien des 60 Quarrés que le même M. *Delisle* donne à l'étendüe de *Londres*. Je laisse à penser aux personnes équitables, & à M. *Davall* lui-même, quand il voudra bien y faire attention, s'il est possible d'imaginer rien de pareil.

Après tout ce qui a été remarqué ci-dessus, & que je crois suffisant pour justifier les calculs & les conclusions de M. *Delisle*, je ne sçaurois rien ajoûter de plus fort, sinon que j'ai vû les Plans de *Paris*, & de *Londres*, ou les deux feüilles mêmes sur lesquelles il avoit établi ses dimensions & son calcul, & qu'en ayant éxaminé toutes les parties, je n'y ai rien trouvé qui ne soit entiérement conforme à ce que je viens de dire. La feüille de *Paris* ne consiste que dans le Plan même gravé en 1716, dont nous avons parlé, augmenté seulement à la main de quelques nouveaux bâtiments considérables qui avoient été faits depuis, & celle de *Londres* est, comme il a été dit, la Carte de *Morden* rectifiée ou augmentée de même sur les nouvelles dimensions que M. *Delisle* avoit reçûës. Nulle division par Quarrés, & par-tout, dans l'une & dans l'autre, des Rectangles relatifs à la Latitude du lieu. C'est M. *Buach*, de cette Académie, digne disciple de feu M. *Delisle*, & ensuite son gendre, & l'héritier de ses Papiers, qui a bien voulu me communiquer ces deux Plans. J'ai prévenu en quelque façon la recherche qu'il méditoit là-dessus, par la commodité que

j'ai eu de voir avant lui, l'Ecrit de M. *Davall,* & par l'engagement où je me ſuis trouvé d'en dire mon ſentiment, à l'occaſion d'une diſpute qui s'étoit muë ſur ce ſujet. Mais le Public n'y perdra rien, ſi M. *Buach* ſe détermine, comme il le fait eſpérer, à meſurer lui-même, tant ſur les Mémoires de M. *Deliſle,* que ſur de nouvelles pieces, l'étendüe de *Paris* & de *Londres*, & à juſtifier par-là d'une maniére encore plus directe, & plus détaillée que je n'ai fait, le fameux Géographe que tout le monde ſçavant regrette, en demeurant riche du fruit de ſes travaux.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES FAITES PENDANT L'ANNÉE M. DCCXXX.

Par M. MARALDI.

ON a vû pluſieurs fois pendant l'année 1730, l'Aurore Boréale, mais elle n'a été éclatante & ſenſible que le 9 d'Octobre qu'on l'a vûë à 8^h du ſoir, élevée ſur l'horiſon de 15 à 20 degrés vers le Nord-oüeſt, partagée en deux Colomnes lumineuſes, inclinées à l'horiſon, de maniére que la partie ſupérieure de ces Colomnes regardoit l'Orient, & la partie inférieure le Nord. Il y avoit entre ces Colomnes un eſpace ſerein, ſans Lumiére, où étoient les Pleïades. Ces deux Colomnes occupoient chacune 16 à 18 degrés de longueur ſur 5 à 6 de largeur; le reſte du Ciel étoit fort ſerein, & on diſtinguoit pluſieurs Etoiles du Taureau & de Perſée, au travers même des Colomnes lumineuſes.

Celle qui étoit à droite des Pleïades, c'eſt-à-dire, plus vers l'Orient, commença à diminüer à $8^h\ 25'$, pendant que celle qui étoit à gauche augmentoit de grandeur, juſqu'à ce que l'autre fût entiérement ceſſée. Elle s'éleva enſuite, & à $8^h \frac{3}{4}$ elle étoit entre les Pleïades & les Etoiles de Perſée.

Elle diminüa ensuite, & cessa entiérement de paroître un peu après 9 heures.

Observations de la Pluye tombée à l'Observatoire pendant l'année 1730.

	pouc.	lign.		pouc.	lign.
EN Janvier.....	0	$0\frac{4}{6}$	En Juillet.......	2	$1\frac{3}{6}$
Février......	1	4	Août.........	0	$8\frac{1}{6}$
Mars........	1	$5\frac{1}{6}$	Septembre...	1	$3\frac{1}{6}$
Avril.......	1	6	Octobre.....	1	$9\frac{2}{6}$
Mai.........	1	$3\frac{2}{6}$	Novembre...	1	$1\frac{2}{6}$
Juin........	2	$6\frac{3}{6}$	Décembre....	0	$11\frac{1}{6}$
	8	$1\frac{4}{6}$		7	$10\frac{4}{6}$

Donc la hauteur de la Pluye qui est tombée pendant toute l'année 1730 est de 16 pouces & $\frac{1}{3}$ de ligne, qui est moindre de la hauteur des années moyennes établie l'année 1726 par M. Maraldi de 17 pouces $\frac{1}{2}$. La hauteur des six premiers mois est de 8 pouc. 1 ligne & $\frac{2}{3}$, & celle des six derniers est de 7 pouces 10 lign. & $\frac{2}{3}$, avec la seule différence de 3 lignes.

La Pluye a été plus abondante dans le mois Juin & celui de Juillet qu'en aucun autre mois de l'année.

Il y a eû pendant le mois de Juillet de grands Vents de Sud-oüest qui ont causé plusieurs orages; le 4 de ce mois, à 3 heures après midi, il tomba une grande quantité de Grêle, dont les grains étoient fort gros.

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid marqué par le Thermometre est arrivé le 20 & le 27 de Janvier, la liqueur descendit le 20 à 24 degrés, & le 27 elle a été à 23 degrés, ce qui marque un froid modéré, puisque l'année 1709 elle descendit à 5 degrés.

La chaleur de l'Eté a été aussi modérée, car la liqueur du même Thermometre a toûjours été pendant les mois de

Juin & Juillet au dessous de 60 degrés, & elle n'est montée qu'à 63 degrés le 4 & le 5 d'Août au lever du Soleil, le temps étant serein & tranquille. Le 4 de ce mois, à 3 heures après midi, la liqueur étoit à 74 degrés, mais le 5, à la même heure, s'étant levé un vent de Sud-oüest, elle monta à 76 degrés. Dans les plus grandes chaleurs des années précédentes, elle est montée jusqu'à 82 degrés.

Sur le Barometre.

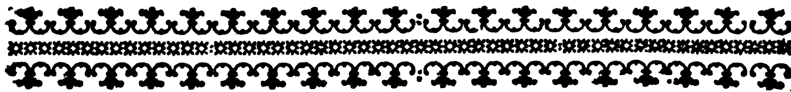
On a observé la moindre hauteur du Barometre de 27 pouces 2 lignes le 9, le 10 & le 11 de Mars, le Ciel étant couvert, avec un petit vent de Sud-oüest. La plus grande hauteur a été observée de 28 pouces 5 lignes le 22 de Janvier par un temps serein & un vent de Nord. Le 23, le 25, & le 26 de Novembre il a été à 28 pouces 4 lignes.

Sur la Déclinaison de l'Aimant.

Le 20 Novembre on a observé avec une Aiguille de 4 pouces la déclinaison de l'Aimant de 14° 25' vers le Nord-oüest.



MESSIEURS



MESSIEURS DE LA SOCIETE' Royale des Sciences, établie à Montpellier, ont envoyé à l'Academie l'Ouvrage qui suit, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles; comme ne faisant qu'un seul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roy au mois de Fevrier 1706.

PHASCOLUS PEREGRINUS, flore roseo, semine tomentoso.

Phascolus Indicus, hederæ folio anguloso, semine oblongo, lanuginoso. *Raii Hist. 3. tom. 438.*

Par M. NISSOLE.

APrés avoir semé quelques Graines mêlées, que j'avois reçûës de Hollande, j'eûs le plaisir de voir lever plusieurs Plantes curieuses, parmi lesquelles je trouvai.

Premiérement, cette espece de Haricot qu'il me fût impossible de ranger sous aucune des especes de ceux qui ont été décrits par les Auteurs de Botanique que j'ai lûs, & c'est ce qui m'a déterminé à en donner la description & la figure.

Sa racine est longue d'environ un pied sur trois ou quatre lignes d'épaisseur au colet, blanche en dedans, & couverte en dehors d'une pellicule qui est ordinairement grisâtre, mais qui se trouve quelquefois de couleur brune tirant sur le rougeâtre,

de forte qu'il y a beaucoup d'apparence qu'elle fe charge toûjours de la couleur de la terre qu'elle occupe.

A deux pouces au deffous du collet, elle eft garnie de quelques fibres d'un demi-pied de long fur deux lignes d'épaiffeur à leur naiffance, entremêlées en quelques endroits de quelque peu de chevelu. Toutes ces fibres, auffi-bien que le corps de la racine qui les fournit, diminüent confidérablement de groffeur à mefure qu'elles s'étendent & s'enfoncent dans la terre, deforte qu'elles font très-déliées à leur extrémité.

Il s'éleve de cette racine une tige de fept à huit pieds de hauteur fur deux lignes de groffeur à fa naiffance, qui à un pouce au-deffus de la terre fe divife en plufieurs branches qui font de différentes longueurs, fouples & pliantes, & qui, comme celles des autres efpeces de Haricot, s'entortillent aux Plantes voifines, ou aux échalas qu'on leur a préparés pour les foûtenir. Toutes ces tiges font couvertes d'une petite pellicule d'un verd-brun, lorfque la Plante eft encore jeune, mais qui dans la fuite devient rougeâtre, & garnie de petits poils blancs fort déliés.

Les feüilles qui garniffent ces tiges y font attachées alternativement fur des queües fort déliées d'environ un pouce de long, qui fourniffent fur le dos de chacune, trois petits filets qui difparoiffent à leur extrêmité. Ces feüilles font fort irréguliéres, d'un verd-mat, & difpofées toûjours trois à trois fur la même queüe. Les plus grandes & les plus réguliéres ont environ un pouce & demi de long fur un pouce de large, elles font arrondies à leur bafe, & s'élargiffent infenfiblement jufque vers le milieu, & diminuant enfuite peu à peu fe terminent en pointe, de forte qu'elles repréfentent affés bien un fer de picque. Il s'en trouve quelques-unes qui font découpées en trefle, & il y en a d'autres qui ont des découpures fi différentes & fi bizarres, que j'aurois été bien embarraffé à les décrire.

Les fleurs qui font légumineufes, de couleur de rofe pâle,

naissent aux aisselles des feüilles, elles sont soûtenües par des queües d'environ trois pouces de long. Il s'en trouve ordinairement quatre ou cinq sur la même queüe. L'extrémité de l'étendart ou feüille supérieure est recourbé, & d'une couleur un peu plus foncée que celle des autres parties de la fleur, car elle tire sur le rouge-brun.

Lorsque ces fleurs commencent à se faner, elles blanchissent insensiblement, & deviennent enfin jaunâtres, elles tombent ensuite, & l'on voit alors sortir du fond des calices qui soûtenoient les fleurs, les pistiles qui deviennent des gousses presque rondes d'environ deux pouces & demi de longueur, sur trois ou quatre lignes de grosseur. Ces gousses sont composées de deux cosses tannées, blancheâtres & luisantes en dedans, qui renferment six ou sept semences de figure presque cilindrique, longues d'environ quatre lignes sur une & demie de diametre; elles sont noirâtres & couvertes d'un petit duvet blanc. Elles sont attachées aux côtés par un petit filet blanc, bordé de noir, d'environ deux lignes de long, y en ayant, au côté qui lui est opposé, un noir de la même grandeur.

Dès que j'eus examiné la Plante qui suit, je trouvai qu'elle avoit beaucoup de rapport avec le *Luffa Arabum;* de sorte que je fus dans l'obligation de la ranger à la classe que M. Tournefort avoit déja établi dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, c'est pourquoi je la nommai

Luffa Arabum fructu echinato, fructus momordicæ vulgaris facie.

Mais j'appris dans la suite qu'elle avoit été nommée par M. Caspard Commelin, & qu'il en avoit donné la description & la figure dans le Catalogue des Plantes étrangeres, imprimé in 4.° à Leyden, sous le nom de

Momordica Americana fructu reticulato sicco.

Cependant si on y fait attention, & qu'on examine sérieusement les fruits du *Momordica vulgaris,* qui sont charnus & humides en dedans, & couverts d'une petite pellicule rouge,

avec cette différence que ceux du *Luffa* sont entiérement secs & arides, & dans lesquels on ne trouve que quelques filaments qui renferment quelques fruits noirâtres, on pourra voir facilement la différence de ces différentes especes de Plantes.

FIN.

FAUTES A CORRIGER

Dans les Mémoires de 1727.

PAge 356, ligne 21, pour 10° 20' de Libra, *lisés* 10° 20' d'Aries.

Page 357, ligne 15, pour est d'une année commune 34 jours & près de deux heures, ou de 399 jours & près de deux heures, *lisés* est d'une année commune 33 jours 21^h & $\frac{1}{4}$, ou de 398 jours 21^h 14'.

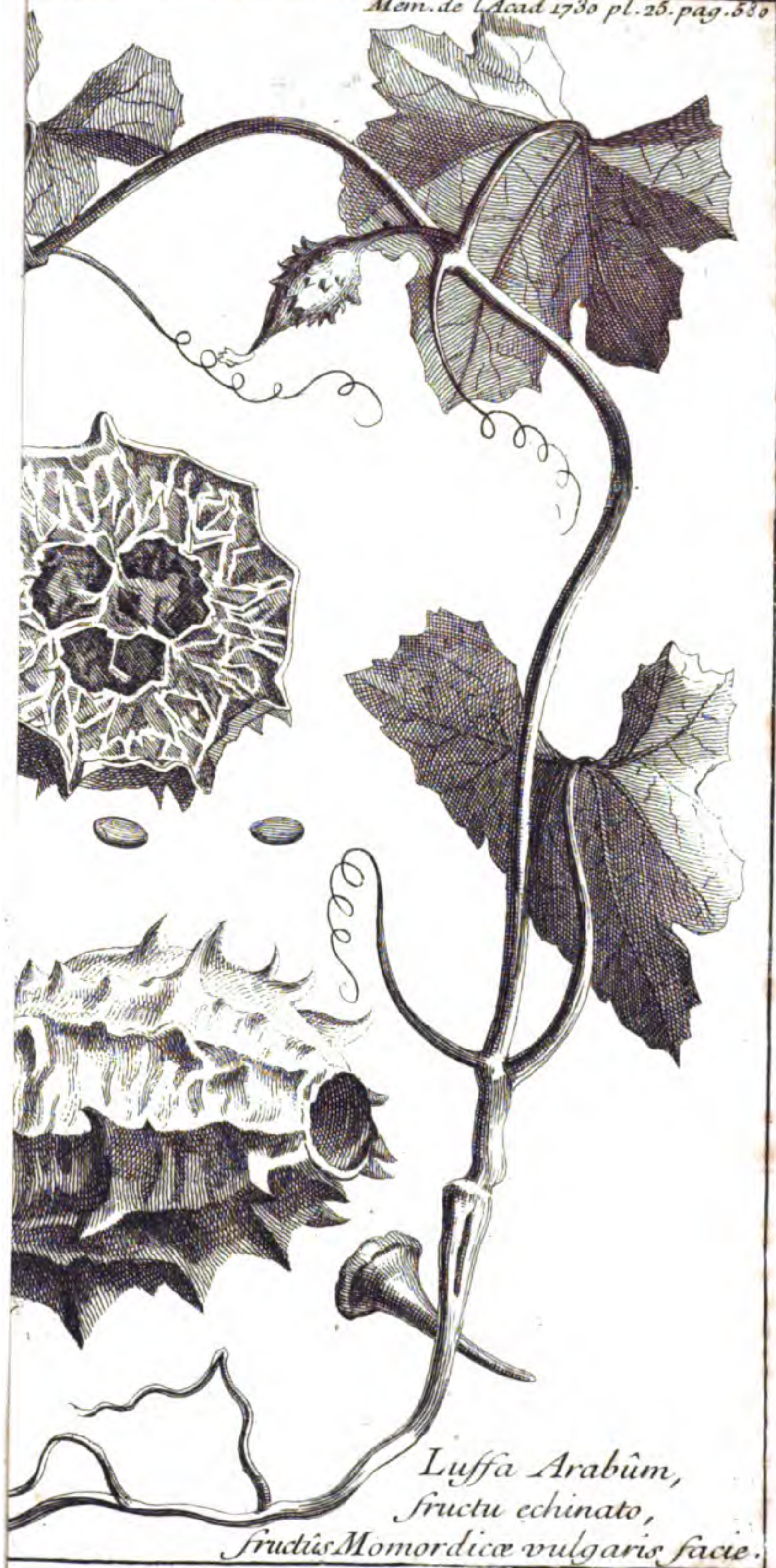
Dans les Mémoires de 1729.

Page 403, ligne 9, pour 20° 6' d'Aries, *lisés* 20° 6' du Taureau.



peregrinus flore - - roseo, semine tomentoso

Simonneau Sculp.



Luffa Arabûm, fructu echinato, fructûs Momordicæ vulgaris facie.

Simonneau Sculp.





